Atividades relacionadas à 'ManjarBrancoG'

Neste conjunto de atividades está mobilizado o estudo da função 'manjar branco', isto é, a função que o domínio é o intervalo fechado [0,1] e assume valores no conjunto dos números reais. Essa função é definida como o limite da seguinte série de funções:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

sendo f_i: [0, 1] → $\mathbb{R}$, definida por $f_i(x) = \frac{1}{2^{i-1}} f(2^{i-1} \cdot x)$, i = 1, 2,.. e $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$. E a aplicação 'ManjarBrancoG'.

Propõe-se:

1) Selecionando-se apenas a opção 'Função contínua e não diferenciável em um número finito de pontos' e utilizando o *mouse*, faça o seguinte:

a) Mova o controle deslizante n para 3, observe o gráfico e responda: para quais valores do domínio a função f_3 não é diferenciável?

____

____

b) Movimente o controle deslizante, para outros valores e conjecture o que acontece com a quantidade de valores do domínio de f_i, para qualquer i, para os quais a f_i não seja diferenciável?

____

____

2) Selecionando-se apenas a opção 'Sequência de funções contínuas e não diferenciáveis', serão exibidos, na Janela de Visualização, n funções que são continuas e não diferenciáveis. Movimente o ponto A, perceba que aparece um conjunto de pontos sobre os gráficos das f_i que têm a mesma abscissa de A.

a) Movimente o controle deslizante para o valor n = 4 e posicione o ponto A em x = 0,5. E analise o comportamento das f_i, i = 1, 2, 3, 4, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

____

____

b) Repita o processo do item anterior, porém, alterando o ponto A para x = 0,625. E analise o comportamento das f_i, i = 1, 2, 3, 4, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

____

____

c) Repita o processo do item a), porém, alterando o ponto A para x = 0,875. E analise o comportamento das f_i, i = 1, 2, 3, 4, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

____

____

d) Conjecture o seguinte: se calcularmos $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, podemos afirmar que a função resultante será diferenciável em $x = 0{,}5$? E em $x = 0{,}625$? E em $x = 0{,}875$?

____

____

3) Selecione a opção 'Representação da soma dos termos da sequência de funções' e observe o gráfico da função que surge na Janela de Visualização 2. Nessa Janela tem um ponto que não permite que seja movimentado, porém, ele é dependente do ponto A da Janela de Visualização. Responda as seguintes questões:

a) A função que é representada na Janela de Visualização 2 é diferenciável em $x = 0{,}5$?

____

____

b) E em $x = 0{,}625$?

____

____

c) E em $x = 0{,}875$?

____

____

4) Com todas as opções disponíveis selecionadas, observe todas as representações que aparecem nas duas Janelas.

a) Preencha a tabela de acordo com o que é observado.

Valor de "*n*"	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização 2
1		
2		
3		
4		

b) Se fizemos *n* tender a infinito, conjecture o que acontece com a quantidade de valores nos quais a função, representada na Janela de Visualização 2, não seja diferenciável?

____

____

5) Movimente controle deslizante para $n = 30$, espere um pouco, essa é a representação máxima que o *software* suporta da sequência de funções cujo limite é uma função contínua e não diferenciável. O *software* tem uma restrição, ou seja, fica muito instável para essa quantidade de termos e não conseguimos utilizar a ferramenta zoom para observar com detalhes essa representação gráfica da função.

Atividades relacionadas à 'ManjarBrancoG' – com respostas

Neste conjunto de atividades está mobilizado o estudo da função 'manjar branco', isto é, a função que o domínio é o intervalo fechado [0,1] e assume valores no conjunto dos números reais. Essa função é definida como o limite da seguinte série de funções:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

sendo f_i: $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_i(x) = \frac{1}{2^{i-1}} f(2^{i-1} \cdot x)$, $i = 1, 2, ..$ e $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$. E a aplicação 'ManjarBrancoG'.

Propõe-se:

1) Selecionando-se apenas a opção 'Função contínua e não diferenciável em um número finito de pontos' e utilizando o *mouse*, faça o seguinte:

a) Mova o controle deslizante n para 3, observe o gráfico e responda: para quais valores do domínio a função f_3 não é diferenciável?

(Resposta esperada: 0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875)

b) Movimente o controle deslizante, para outros valores e conjecture o que acontece com a quantidade de valores do domínio de f_i, para qualquer i, para os quais a f_i não seja diferenciável?

(Resposta esperada: A quantidade de valores nos a função f_i aumenta à medida que n aumenta).

2) Selecionando-se apenas a opção 'Sequência de funções contínuas e não diferenciáveis', serão exibidos, na Janela de Visualização, n funções que são continuas e não diferenciáveis. Movimente o ponto A, perceba que aparece um conjunto de pontos sobre os gráficos das f_i que têm a mesma abscissa de A.

a) Movimente o controle deslizante para o valor $n = 4$ e posicione o ponto A em $x = 0,5$. E analise o comportamento das f_i, $i = 1, 2, 3, 4$, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

(Resposta esperada: As funções f_i para i = 1,2,3,4 não são diferenciáveis em $x = 0,5$.)

b) Repita o processo do item anterior, porém, alterando o ponto A para $x = 0,625$. E analise o comportamento das f_i, $i = 1, 2, 3, 4$, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

(Resposta esperada: Existem duas funções que são diferenciáveis em

x = 0,625 e outras duas que não são diferenciáveis nesse ponto.)________

c) Repita o processo do item a), porém, alterando o ponto A para x = 0,875. E analise o comportamento das f_i, i = 1, 2, 3, 4, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

(Resposta esperada: Existem duas funções que são diferenciáveis em x = 0,875 e outras duas que não são diferenciáveis nesse ponto.)____

d) Conjecture o seguinte: se calcularmos $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, podemos afirmar que a função resultante será diferenciável em x = 0,5? E em x = 0,625? E em x = 0,875?

(Resposta pessoal)____

3) Selecione a opção 'Representação da soma dos termos da sequência de funções' e observe o gráfico da função que surge na Janela de Visualização 2. Nessa Janela tem um ponto que não permite que seja movimentado, porém, ele é dependente do ponto A da Janela de Visualização. Responda as seguintes questões:

a) A função que é representada na Janela de Visualização 2 é diferenciável em x = 0,5?

(Resposta esperada: Não é diferenciável.)__________________________

b) E em x = 0,625?

(Resposta esperada: Não é diferenciável.)__________________________

c) E em x = 0,875?

(Resposta esperada: Não é diferenciável.)__________________________

4) Com todas as opções disponíveis selecionadas, observe todas as representações que aparecem nas duas Janelas.

a) Preencha a tabela de acordo com o que é observado.

Valor de "*n*"	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização 2
1	**(Resposta esperada – 1)**	**(Resposta esperada – 1)**
2	**(Resposta esperada – 3)**	**(Resposta esperada – 2)**
3	**(Resposta esperada – 7)**	**(Resposta esperada – 5)**
4	**(Resposta esperada – 15)**	**(Resposta esperada – 11)**

b) Se fizemos *n* tender a infinito, conjecture o que acontece com a quantidade de valores nos quais a função, representada na Janela de Visualização 2, não seja diferenciável?

<u>(Resposta esperada: A quantidade de valores nos quais a função não é diferenciável tende ao infinito.)</u>

5) Movimente controle deslizante para *n* = 30, espere um pouco, essa é a representação máxima que o *software* suporta da sequência de funções cujo limite é uma função contínua e não diferenciável. O *software* tem uma restrição, ou seja, fica muito instável para essa quantidade de termos e não conseguimos utilizar a ferramenta zoom para observar com detalhes essa representação gráfica da função.

Demonstrações que a função b é contínua e não diferenciável.

Seja a função manjar branco, denominada por *b*, é definida por

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

Sendo que f_n: [0, 1] → $\mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} \cdot x)$ e *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$. A função *b* é contínua.

Considere o fato que se uma função *h* satisfizer $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$, $\forall$ *x*, *y* ∈ $\mathbb{R}$ então a função *h* é contínua. Esse fato ocorre com a função *f*, pois sejam *x* e *y* ∈ $\mathbb{R}$ arbitrários, como $|f(x) - f(y)| = |d(x, \mathbb{Z}) - d(y, \mathbb{Z})| \leq |d(x, z) - d(y, z)|$ pela maneira como *f* é definida é possível afirmar isso para qualquer *z* real e como *d* é uma norma de $\mathbb{R}$, temos que é válida a seguinte propriedade $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) = |x - y|$. Logo, é possível concluir que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Logo *f* é contínua.

Então considere que $f_i = f \circ g_i$, sendo que g_i: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_i(x) = 2^{i-1} \cdot x$. Como g_i e *f* são funções contínuas então f_i é uma função contínua para $\forall i \in \mathbb{N}$.

Outro fato é que a série numérica $\left(\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{m \in N}$ é convergente. Como $|f_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ para $\forall i \in \mathbb{N}$, é possível concluir que a série de funções $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)_{n \in N}$ converge uniformemente para a função *b* e isso implica que a função *b* é contínua.

A função *b* não é diferenciável.

Para mostrar que a função *b* não é diferenciável, será considerado o seguinte resultado:

Seja *h*: [*a*, *b*] → $\mathbb{R}$, (u_n) e (v_n), com $u_n \in [a, b]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e $v_n \in [a, b]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, sequências tais que $u_n \leq x \leq v_n$ (com $u_n < v_n$). Se *h* é uma função contínua e *h*' existe, então

$$\frac{h(v_n) - h(u_n)}{v_n - u_n} \to h'(x)$$

Considerando esse resultado para mostrar que uma função não é diferenciável, é necessário construir duas sequências que contradizem esse resultado.

Seja x um número fixo, b: $[0,1] \to \mathbb{R}$ a função manjar branco e, por absurdo, suponhamos que $b'(x)$ existe.

Seja $D = \{ i \cdot 2^{-m} \mid i, m \text{ inteiros} \} \cap [0,1]$ e para cada número $i\ 2^{-m}$, para m e i inteiros, $2^k\ (i\ 2^{-m}) = i\ 2^{k-m}$ e $i\ 2^{k-m} \in \mathbb{Z}$ para todo $k \geq m$. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é definida por $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$ e p um inteiro então $f(p) = 0$.

Seja u_m, v_m em D, sendo que $u_m = (i-1)\ 2^{-m}$, , $v_m = i\ 2^{-m}$ e i é um inteiro que garanta a seguinte relação $u_m \leq x < v_m$. Nesse caso, $v_m - u_m = 2^{-m}$ e $v_m - u_m \to 0$.

É fato que a soma parcial da série é dada por

$$b_m(u_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot f_k(u_k)$$

Se $x \in [2^k u_m, 2^k v_m]$ então $x \in \left[\frac{i-1}{2^{k-m}}, \frac{i}{2^{k-m}} \right]$, para $0 \leq k < m$

$$\frac{f_m(v_m) - f_m(u_m)}{v_m - u_m} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{f(2^k \cdot v_m) - f(2^k \cdot u_m)}{v_m - u_m} = \frac{\pm 2^{k-m}}{2^{k-m}} = \pm 1$$

Por essa razão,

$$b'(x) = \frac{b(v_n) - b(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \pm 1$$

A série $\sum_{k=1}^{\infty} \pm 1$ é divergente. Esse fato contradiz a suposição que $b'(x)$ existe. Desde que $x \in [0,1]$ é arbitrário, é possível concluir que a função b não é diferenciável em nenhum ponto do domínio.