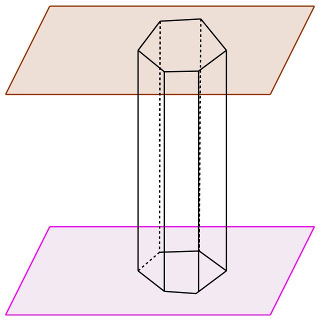

Figura 8.3: Prisma

Volumen de una pirámide

Teorema 8.2.5

El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del área de su base por la altura.

Demostración: Sean:

- $h =$ altura de la pirámide.
- $b =$ el área de la base.

Se divide h en n partes de igual longitud y se construyen prismas exteriores e interiores a la pirámide de la siguiente manera: se trazan paralelas a $\overline{VB}$ por los puntos A y C y se obtiene el primer prisma exterior de altura $\frac{h}{n}$ y aristas $\overline{AA'}$ $\overline{BE}$ $\overline{CC'}$. Sean D,E,F las intersecciones del primer prisma exterior con la pirámide. Por estos puntos se trazan paralelas a $\overline{VB}$ y se obtienne el primer prisma interior y segundo prisma exterior. Así, tenemos:

Prisma E_1 Tiene por base b_1 la base de la pirámide y altura $\frac{h}{n}$.

Prisma E_2 Tiene por base b_2 la intersección del prisma E_1 con la pirámide y altura $\frac{h}{n}$.

Prisma E_n Tiene por base b_n la intersección del prisma E_{n-1} con la pirámide y altura $\frac{h}{n}$.

Prisma I_1 Tiene por base b_2 la intersección del prisma E_1 con la pirámide y altura $\frac{h}{n}$.

Prisma I_{n-1} Tiene por base b_n la intersección del prisma E_1 con la pirámide y altura $\frac{h}{n}$.

Podemos observar que todos los prismas exteriores, excepto el último tienen un respectivo prisma interior de igual volumen. Usando que las áreas de las secciones planas parelelas a la base tienen áreas que son entre ellas como el cuadrado de sus distancias a la cúspide y comparando cada base con la base de la pirámide, tenemos:

$$\begin{aligned} b_1 &= b \\ b_2 &= (\frac{n-1}{n})^2 b \\ b_i &= (\frac{n-i+1}{n})^2 b \end{aligned}$$

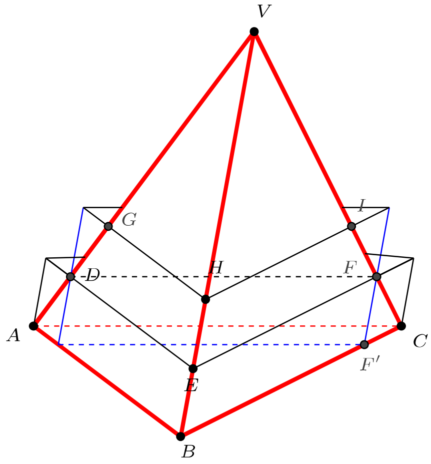

Figura 8.4: Acotamiento de una pirámide mediante prismas

Cada prisma tiene volumen igual al producto del área de la base por la altura.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \text{Volumen } I_i \ &\leq \text{Volumen pirámide } \leq \sum_{i=1}^{n} \text{Volumen } E_i \\
\sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot \frac{h}{n} \ &\leq \text{Volumen pirámide } \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{h}{n} \\
\frac{h}{n} \sum_{i=1}^{n-1} b_i \ &\leq \text{Volumen pirámide } \leq \frac{h}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i \\
\frac{hb}{n^3}(1+2^2+\ldots(n-1)^2) \ &\leq \text{Volumen pirámide } \leq \frac{hb}{n^3}(1+2^2+\ldots n^2) \\
\frac{hb}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \ &\leq \text{Volumen pirámide } \leq \frac{hb}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\frac{hb}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right) \ &\leq \text{Volumen pirámide } \leq \frac{hb}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).
\end{aligned}$$

Si $n \to +\infty$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{hb}{3} \ &\leq \text{Volumen pirámide } \leq \frac{hb}{3}. \\
\text{Volumen pirámide } &= \frac{hb}{3}.
\end{aligned}$$