Logarithmus und Logarithmieren

Aufgabe

Eine Bakterienkultur vermehrt sich so, dass sie alle drei Tage auf das 1.5-fache anwächst. Nach welcher Zeit sind aus 10 Bakterien 45 geworden?

Aufgabe

Eine Bakterienkultur vermehrt sich so, dass sie alle drei Tage auf das 1.5-fache anwächst. Nach welcher Zeit sind aus 10 Bakterien 45 geworden?

Gegeben:

Natürliche Zahl $\boldsymbol{n}$ mit:

Wenn $n = 0$, dann $\Delta t = 0\ d$.

Wenn $n = 1$, dann $\Delta t = 3\ d$.

Wenn $n = 2$, dann $\Delta t = 6\ d$.

…

Entwicklung der Anzahl $\boldsymbol{B(n)}$ von Bakterien:

Zahlenfolge von reellen Zahlen:

$B_n = (10; 10 \cdot 1.5;\ 10 \cdot 1.5 \cdot 1.5;\ 10 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5; \dots; 10 \cdot 1.5^k, \dots)$ mit $k \in \mathbb{N}^*$.

Gesucht: Zeit Δt für 45 Bakterien

Lösung:

Exponentialgleichung: $45 = 1.5^n \cdot 10$

Wie groß ist n – der Exponent?

Erste Lösungsmöglichkeit – mit Tabelle:

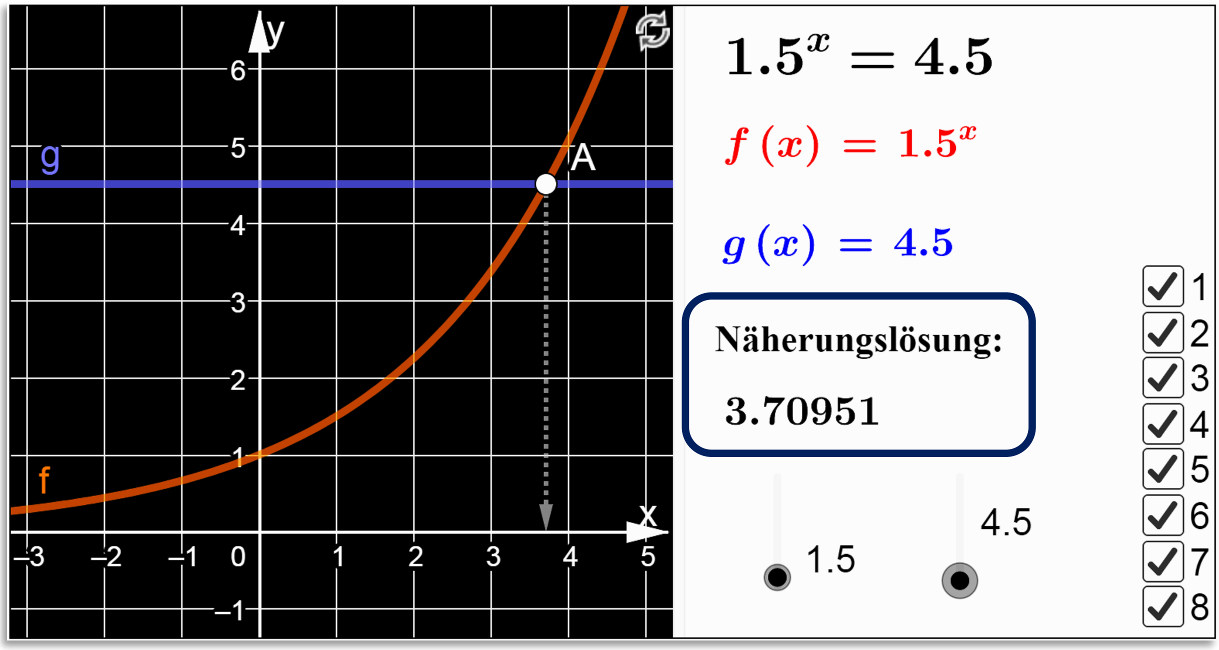
n	B(n)
0	10
1	15
2	22.5
3	33.75
4	50.63
5	75.94

n	B(n)
0	10
1	15
2	22.5
3	33.75
4	50.63
5	75.94

Ergebnis 1: Zwischen $3 \cdot 3 = 9$ (Tagen) und $3 \cdot 4 = 12$ (Tagen) gilt $B(n) = 45$.

Zweite Lösungsmöglichkeit – graphisches Lösen mit Applet:

$$45 = 1.5^n \cdot 10 \quad | \div 10$$
$$4.5 = 1.5^n$$



Ergebnis: Nach $3 \cdot 24 \cdot 3.70951\ h \approx 267.08\ h \approx 11.13\ d$ ist die Bakterienkultur auf 45 Bakterien angewachsen.

Dritte Lösungsmöglichkeit – mit WTR:

$$45 = 1.5^n \cdot 10 \qquad | \div 10$$
$$4.5 = 1.5^n$$

Schreibweise für eine neue Rechenoperation: $\mathbf{\log_{1.5} 4.5}$

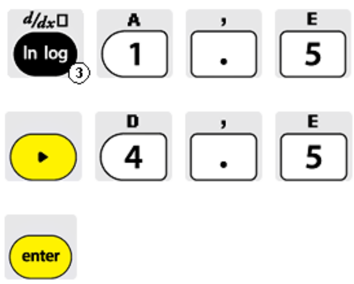
Sprechweise: „Logarithmus von 4.5 zur Basis 1.5“

Frage: Mit welcher Zahl x muss man die Basis 1.5 potenzieren, um die Zahl 4.5 zu erhalten.

$$\log_{1.5} 4.5 \;\Leftrightarrow\; 1.5^{\mathrm{x}} = 4.5$$

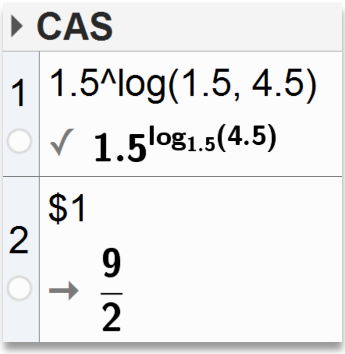
Wir wissen: $3 < x < 4$

WTR:

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
$\log_{1.5} 4.5$		3.709511291

Ergebnis: Nach $3 \cdot 24 \cdot 3.709511291\ h \approx\ 267.08\ h \approx 11.13\ d$ ist die Bakterienkultur auf 45 Bakterien angewachsen.

Probe mit GeoGebra:



Es gilt: $1.5^{\log_{1.5}(4.5)} = 4.5$.

Das **Logarithmieren** ist neben dem Radizieren *eine* weitere **Umkehroperation zum Potenzieren**.

Beispiel:

$$2^5 = 32$$

$$x^5 = 32 \qquad\qquad 2^y = 32$$

Radizieren | *Logarithmieren*

$$x = \sqrt[5]{32} \qquad\qquad y = \log_2 32$$

$$x = 2 \qquad\qquad y = 5$$

Definition

Es wird vereinbart:

z sei eine **positive** reelle Zahl.

b sei eine **positive** reelle Zahl mit **Ausnahme** von b = 1:

$\boldsymbol{\log_b z}$ ist diejenige reelle Zahl x, für die $b^x = z$ gilt. Man nennt x den Logarithmus $\boldsymbol{z}$ zur Basis b.

Weitere Beispiele:

$\log_5 125 = 3$, denn $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$

$\log_5 \frac{1}{125} = -3$, denn $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

$\log_2 64 = 6$, denn $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64.$

$\log_{10} 0.0001 = -4$, denn $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001.$

$\log_{7.2} 1 = 0$, denn $7.2^0 = 1$

(vergleiche mit Definition *Potenzen mit ganzzahligen Exponenten*).