

Determinantes y Desarrollo por Cofactores

Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

12 de enero de 2011

Índice

11.1. Introducción	1
11.2. El determinante de una matriz 2×2	1
11.3. Determinante 2×2 : Regla de memorización	2
11.4. Geometría del determinante 2×2	2
11.5. Determinante de una matriz 3×3	3
11.6. Regla de Sarrus para un determinante 3×3	3
11.7. El menor (i, j) de una matriz	4
11.8. El cofactor (i, j) de una matriz	4
11.9. Definición del determinante	5
11.10 Desarrollo de un determinante	5
11.11 Sugerencia para el cálculo de determinantes	6

11.1. Introducción

El **determinante** de una matriz cuadrada \mathbf{A} es un número real asignado a ella. En la notación matemática el determinante de \mathbf{A} se simboliza por $\det(\mathbf{A})$ o también por $|\mathbf{A}|$. El determinante de una matriz es un número que mide, entre otras cosas, si una matriz es invertible. Nuestro resultado más importante en este sentido es $|\mathbf{A}| \neq 0$ si y sólo si \mathbf{A} es una matriz invertible. En nuestro acercamiento, primero veremos cómo se calcula el determinante de matrices cuadradas 2×2 , y 3×3 y después pasaremos al caso general. Una disculpa por el abuso de las barras para simbolizar al determinante de una matriz que podría confundirse son las utilizadas para el valor absoluto de un número: haremos lo posible por evitar confusiones escribiendo las matrices en negritas y mayúsculas para diferenciarlas de los escalares que es a los que se aplica el valor absoluto:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \text{determinante de la matriz } \mathbf{A} \\ |c| &= \text{valor absoluto del escalar } c. \end{aligned}$$

11.2. El determinante de una matriz 2×2

Definición 11.1

Sea \mathbf{A} una matriz 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante \mathbf{A} se define como:

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

Ejemplo 11.1

Calcule el determinante de

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución

Directamente de la definición se tiene

$$\det(\mathbf{A}_1) = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = (-3)(8) - (2)(-1) = -24 + 2 = -22 \blacksquare$$

11.3. Determinante 2×2 : Regla de memorización

Una forma de memorizar el cálculo del determinante de una matriz 2×2 es la siguiente: escribir los elementos de la matriz y hacer los productos en diagonal de manera que los que van de izquierda-arriba a derecha-abajo irán multiplicados por $+1$ mientras que los productos de izquierda-abajo a derecha-arriba irán multipliados por -1 :

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

11.4. Geometría del determinante 2×2

Sea

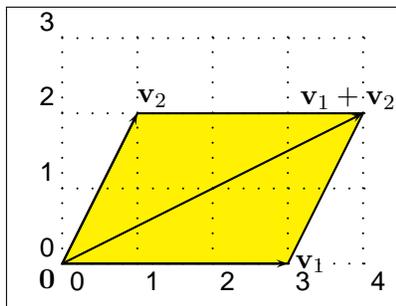
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

El área del paralelogramo con esquinas $P(0,0)$, $Q(a_{11}, a_{21})$, $R(a_{12}, a_{22})$, y $S(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$ es el valor absoluto de $|\mathbf{A}|$.

Veamos algunos ejemplos donde se utiliza este hecho.

Ejemplo 11.2

Calcule el área del paralelogramo con lados $\mathbf{v}_1 = \langle 3, 0 \rangle$ y $\mathbf{v}_2 = \langle 1, 2 \rangle$



Solución

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (0)(1) = 6$$

Lo cual coincide con el resultado de base por altura: $3 \times 2 = 6$ ■

Ejemplo 11.3

Determine el área del paralelogramo formado por los puntos $P(1, 2)$, $Q(2, 3)$, $R(5, 5)$ y $S(6, 6)$.

Solución

Traslademos el paralelogramo de manera que uno de sus vértices sea $O(0, 0)$. Para ello elegimos cualquiera de sus vértices y se lo restamos a sus cuatro esquinas. Digamos que se elije $P(1, 2)$. Así el paralelogramo trasladado tendrá como esquinas a:

$$\begin{aligned} P'(0, 0) &= P(1, 2) - P(1, 2) \\ Q'(1, 1) &= Q(2, 3) - P(1, 2) \\ R'(4, 3) &= R(5, 5) - P(1, 2) \\ S'(5, 4) &= S(6, 6) - P(1, 2) \end{aligned}$$

Observamos que efectivamente es un paralelogramo al cumplirse $S'(5, 4) = Q'(1, 1) + R'(4, 3)$. Por tanto, el área de paralelogramo original es:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = |3 - 4| = |-1| = 1 \blacksquare$$

11.5. Determinante de una matriz 3×3

Definición 11.2

El determinante de una matriz \mathbf{A} 3×3 se calcula mediante la fórmula:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

11.6. Regla de Sarrus para un determinante 3×3

La *regla de Sarrus* para el cálculo del determinante de una matriz 3×3 consiste en copiar la primera y la segunda columna de la matriz y colocarlas inmediatamente a la derecha de la matriz. Posteriormente, calcular los productos en diagonal de tres elementos como se indica en la figura:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Los productos de izquierda-arriba con los elementos derecha-abajo (en azul) se multiplican por $+1$ mientras que los de izquierda abajo con los elementos derecha-arriba (en rojo) se multiplican por -1 ; todos los resultados se suman.

Ejemplo 11.4

Calcule el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución

Utilizamos directamente la regla de Sarrus:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= + (1)(4)(-4) + (2)(0)(0) + (-1)(3)(1) \\ &\quad - (0)(4)(-1) - (1)(0)(1) - (-4)(3)(2) \\ &= -16 - 3 + 24 = 5 \blacksquare \end{aligned}$$

11.7. El menor (i, j) de una matriz

Definición 11.3

Suponga una matriz \mathbf{A} $n \times n$, el *menor* (i, j) de la matriz \mathbf{A} , representado por \mathbf{M}_{ij} , es el determinante de la matriz que se obtiene de \mathbf{A} eliminando el renglón i y la columna j .

Ejemplo 11.5

Determine \mathbf{M}_{32} de la matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución

De \mathbf{A} no consideramos el **renglón 3** ni la **columna 2** y calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right], \mathbf{M}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (3)(-1) = 3$$

11.8. El cofactor (i, j) de una matriz

Definición 11.4

Suponga una matriz \mathbf{A} $n \times n$, el *cofactor* (i, j) de la matriz \mathbf{A} se define como:

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij} \quad (2)$$

Ejemplo 11.6

Determine \mathbf{C}_{32} de la matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Calculamos primero \mathbf{M}_{32} :

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right], \mathbf{M}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (3)(-1) = 3$$

Por tanto, $\mathbf{C}_{32} = (-1)^{3+2} \mathbf{M}_{32} = (-1)^5(3) = -3$.

11.9. Definición del determinante

La definición formal del determinante de una matriz es el siguiente:

Definición

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada $n \times n$. El *determinante de \mathbf{A}* simbolizado por $|\mathbf{A}|$ se define como: **la suma de los productos de los elementos del primer renglón de \mathbf{A} por sus cofactores correspondientes**

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot \mathbf{C}_{1i} \quad (3)$$

11.10. Desarrollo de un determinante

A pesar de que en la definición formal del determinante se hace referencia al renglón 1, el resultado fundamental es que puede calcularse sobre cualquier renglón o columna:

Teorema

Suponga que \mathbf{A} es una matriz $n \times n$, $|\mathbf{A}|$ puede ser calculado *desarrollando* sobre cualquier columna o renglón: Suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Desarrollo sobre el renglón i :

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}\mathbf{C}_{i1} + a_{i2}\mathbf{C}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathbf{C}_{in}$$

Desarrollo sobre la columna j :

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}\mathbf{C}_{1j} + a_{2j}\mathbf{C}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathbf{C}_{nj}$$

Ejemplo 11.7

Determine, mediante el desarrollo sobre el **renglón 2**, $|\mathbf{A}|$ para:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Calculamos los menores sobre el renglón **2**:

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7, \mathbf{M}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4, \mathbf{M}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto

$$|\mathbf{A}| = (3)(-1)^{2+1}(-7) + (4)(-1)^{2+2}(-4) + (0)(-1)^{2+3}(1) = 5$$

Ejemplo 11.8

Determine, mediante el desarrollo sobre la **columna 1**, $|\mathbf{A}|$ para:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Calculando los menores sobre la **columna 1**:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -16, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7, M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Por tanto

$$|\mathbf{A}| = (1)(-1)^{1+1}(-16) + (3)(-1)^{2+1}(-7) + (0)(-1)^{3+1}(4) = 5$$

11.11. Sugerencia para el cálculo de determinantes

Cuando se usa el método de cofactores para el cálculo de un determinante es importante escoger un renglón o una columna con el mayor número de ceros posible. Esto se debe que los cofactores correspondientes a tales elementos cero no hace falta calcularlos.

Ejemplo 11.9

Determine el(los) valor(es) de λ que hacen cero el determinante de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Solución

Calculemos primero el determinante de la matriz. Debido a que la última columna tiene muchos cero, entonces desarrollemos sobre ella:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= C_{13} \cdot a_{13} + C_{23} \cdot a_{23} + C_{33} \cdot a_{33} = C_{33} \cdot a_{33} \\ &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} (1 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Por tanto, los únicos valores para λ que hacen $|\mathbf{A}| = 0$ son: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 1$ ■