Aufgaben zum Begründen

In einem Mathematiklehrbuch finden wir folgende

Aufgabe

Begründe die Aussage.

a) Bei einem Zinssatz von 6% verdoppelt sich jedes Anfangskapital innerhalb von 12 Jahren.

b) Bei einem Zinssatz von 4.3% steigt jedes Anfangskapital innerhalb von 10 Jahren auf das Anderthalbfache.

c) Bei einer jährlichen Abnahme von 2.5% dauert es mehr als 27 Jahre, bis sich ein Bestand halbiert hat.

[1]

[1] Baum, M. (2007). Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien Baden-Württemberg Band 5, Deutschland: Ernst Klett Verlag GmbH Stuttgart, Seite 98.

Lösung zu a)

Behauptung 1: Bei einem Zinssatz von 6% verdoppelt sich jedes Anfangskapital innerhalb von 12 Jahren.

Erläuterung: Zunächst wollen wir den Text der Aufgabe an vier Tabellen für exponentielles Wachstum illustrieren.

Das Anfangskapital $B(0)$ ist nicht bekannt. Es ist veränderlich.

Tabelle 1 (Startwert $B(0) = \mathbf{16}$, Wachstumsfaktor $q = 1.06$):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	16.96	17.98	19.06	20.2	21.41	22.7	24.06	25.5	27.03	28.65	30.37	32.2	34.13	36.17

Verdoppeln des Anfangskapitals: $2 \cdot 16 = 32 \leq 32.2$

Tabelle 2 (Startwert $B(0) = \mathbf{17}$, Wachstumsfaktor $q = 1.06$):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
17	18.02	19.1	20.25	21.46	22.75	24.11	25.56	27.1	28.72	30.44	32.27	34.21	36.26	38.44

Verdoppeln des Anfangskapitals: $2 \cdot 17 = 34 \leq 34.21$

Tabelle 3 (Startwert $B(0) = \mathbf{45}$, Wachstumsfaktor $q = 1.06$):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
45	47.7	50.56	53.6	56.81	60.22	63.83	67.66	71.72	76.03	80.59	85.42	90.55	95.98	101.74

Verdoppeln des Anfangskapitals: $2 \cdot 45 = 90 \leq 90.55$

Tabelle 4 (Startwert $B(0) = \mathbf{50}$, Wachstumsfaktor $q = 1.06$):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
50	53	56.18	59.55	63.12	66.91	70.93	75.18	79.69	84.47	89.54	94.91	100.61	106.65	113.05

Verdoppeln des Anfangskapitals: $2 \cdot 50 = 100 \leq 100.61$

Begründung: Es gilt die Gleichung für exponentielles Wachstum

$$B(n) = B(0) \cdot (1 + p)^n.$$

Für das Anfangskapital (Startwert) $B(0)$ führen wir eine Variable x ein. Wir vereinbaren:

$$x = B(0).$$

Dabei sei x eine positive reelle Zahl.

Für das Kapital $B(n)$ nach n Zeitschritten (Jahren) gilt dann:

$$B(n) = x \cdot (1 + p)^n$$

Wir setzen entsprechend des Aufgabentextes:

$$p = 0.06; n = 12$$

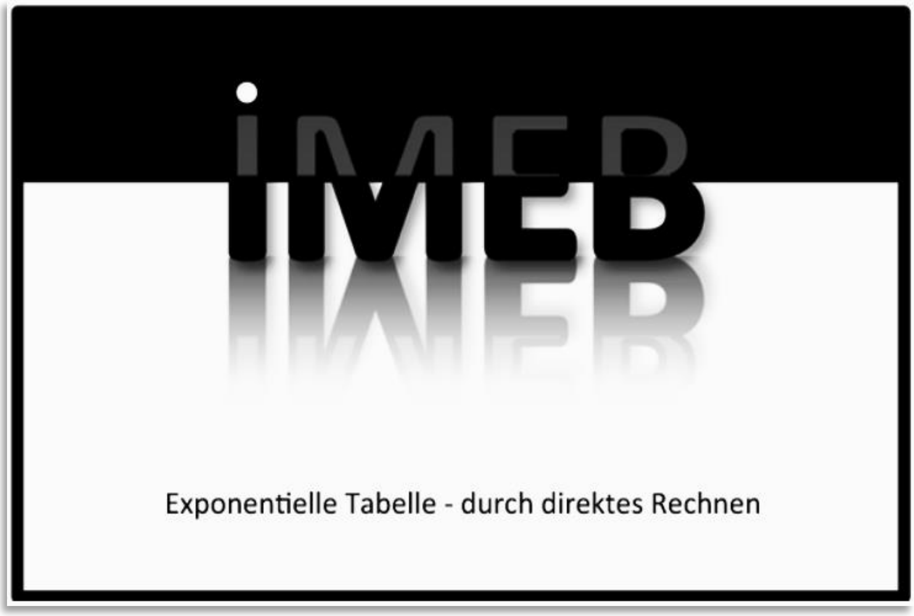
Es wird dann behauptet: $2 \cdot x \approx x \cdot (1 + 0.06)^{12}$

Aus $(1 + 0.06)^{12} \approx 2.0122$ (mit WTR) folgt für alle positiven reellen Zahlen x:

$$2 \cdot x \approx x \cdot (1 + 0.06)^{12}$$

w.z.b.w.

Illustrationen am Applet



Lösung zu b)

Behauptung 2: Bei einem Zinssatz von 4.3 % steigt jedes Anfangskapital innerhalb von 10 Jahren auf das Anderthalbfache.

Begründung: Es gilt die Gleichung für exponentielles Wachstum

$$B(n) = B(0) \cdot (1 + p)^n.$$

Für das Anfangskapital (Startwert) $B(0)$ führen wir eine Variable x ein. Wir vereinbaren:

$$x = B(0).$$

Dabei sei x eine positive reelle Zahl.

Wir setzen entsprechend des Aufgabentextes:

$$p = 0.043; n = 10$$

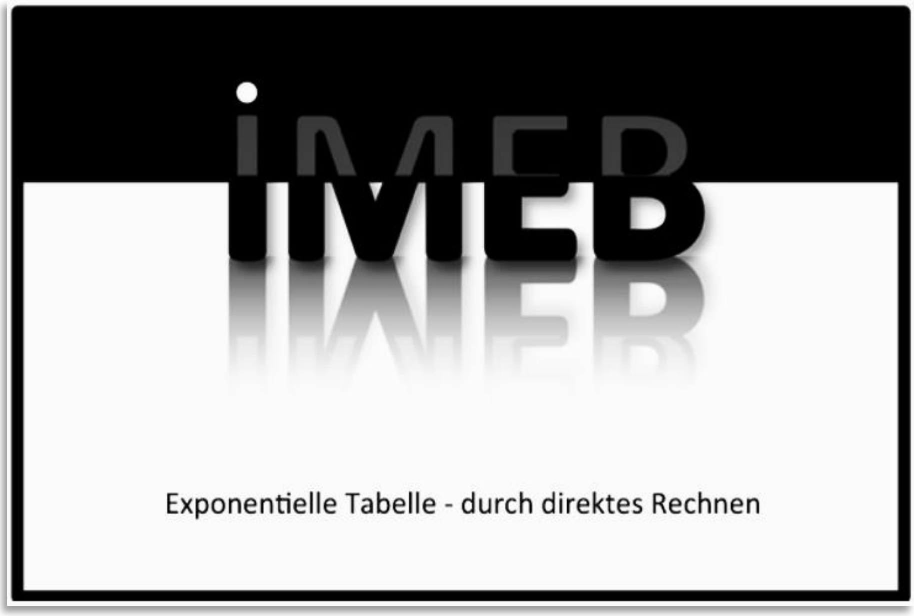
Es wird dann behauptet: $\frac{3}{2} \cdot x \approx x \cdot (1 + 0.043)^{10}$

Aus $(1 + 0.043)^{10} \approx 1.5235$ (mit WTR) folgt für alle positiven reellen Zahlen x:

$$\frac{3}{2} \cdot x \approx x \cdot (1 + 0.043)^{10}$$

w.z.b.w.

Illustrationen am Applet



Lösung zu c)

Behauptung 3: Bei einer jährlichen Abnahme von 2.5% dauert es mehr als 27 Jahre, bis sich ein *(beliebiger)* Bestand halbiert hat.

Begründung: Es gilt die Gleichung für exponentielles Wachstum

$$B(n) = B(0) \cdot (1+p)^n.$$

Für das Anfangskapital (Startwert) $B(0)$ führen wir eine Variable x ein. Wir vereinbaren:

$$x = B(0).$$

Dabei sei x eine positive reelle Zahl.

Wir setzen entsprechend des Aufgabentextes:

$$p = -0.025; n = 27$$

Es wird dann behauptet: $\frac{1}{2} \cdot x \approx x \cdot (1-0.025)^{27}$

Aus $(1-0.025)^{27} \approx 0.5048$ (mit WTR) folgt für alle positiven reellen Zahlen x:

$$\frac{1}{2} \cdot x \approx x \cdot (1-0.025)^{27}$$

w.z.b.w.

Illustrationen am Applet