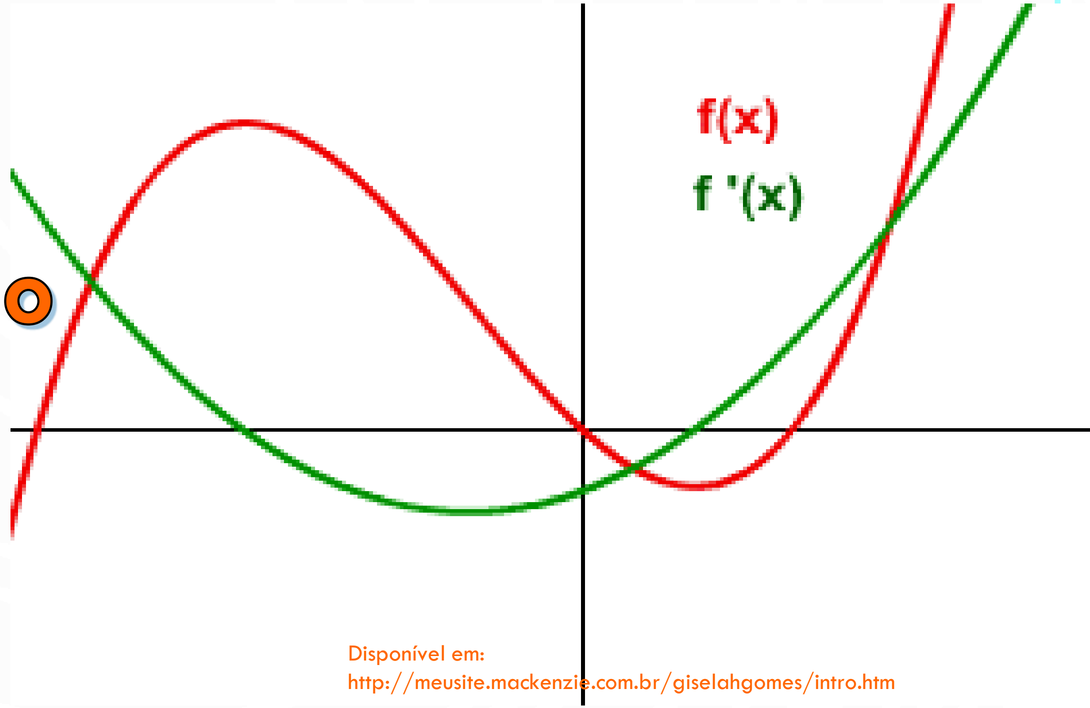
Derivadas e o estudo de Máximos e mínimos



Disponível em:
http://meusite.mackenzie.com.br/giselahgomes/intro.htm

Vanessa Lopes
Suely Scherer

1. Otimização

Agora vamos estudar o uso de Derivada em problemas de otimização.

Você sabe o que são problemas de otimização?

Os problemas de otimização são aqueles nos quais devemos encontrar uma maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa.

Em outras palavras resolver problemas de otimização, consiste em encontrar valores máximos e mínimos de uma função. Por exemplo:

•Podemos calcular as dimensões de um terreno que deva ser construído com objetivo de se obter maior área.

•Encontrar a melhor forma de uma empresa obter maior lucro na produção de um determinado produto.

Então, vamos conhecer uma estratégia para calcular valores de máximos e mínimos de funções? Primeiramente vamos entender ao que nos referimos quando falamos em pontos de máximos e de mínimos, e valores de máximos e mínimos tanto locais quanto globais de uma função.

Definição 1 (STEWART, 2004):

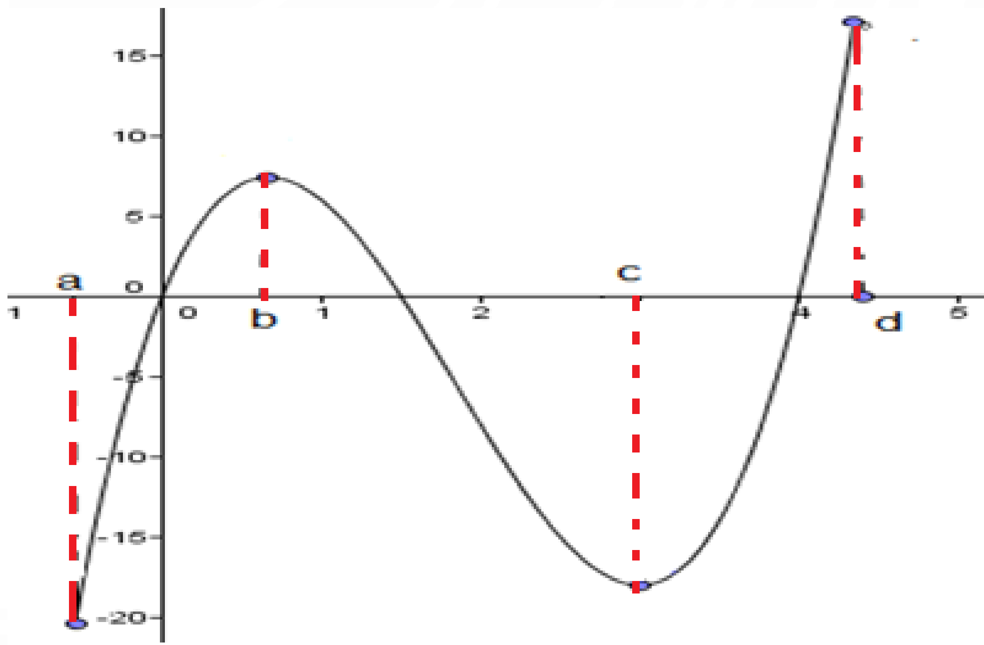
Uma função tem um mínimo absoluto (ou mínimo global) em c se f(c) $\leq$ f(x), para todo x em D, onde D é o domínio da f. E neste caso, f(c) é um valor de mínimo absoluto (ou mínimo global) de f.

De forma análoga diremos que uma função tem um máximo absoluto (ou máximo global) em c se f(c) $\geq$ f(x), para todo x em D, sendo D o domínio da f. E neste caso f(c) é o valor de máximo absoluto (ou máximo global)de f.

Os valores de máximo e mínimo de f são chamados de valores extremos de f.

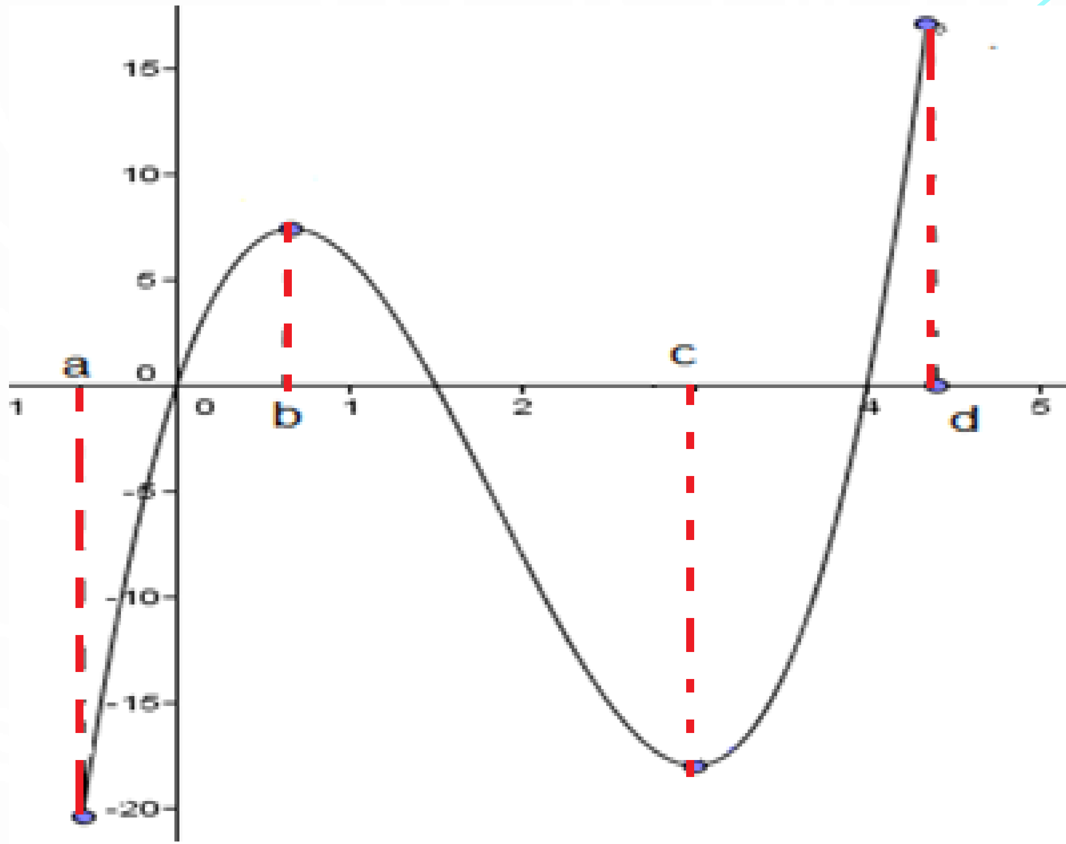
Na $Figura$ 1 temos o esboço de um gráfico de uma função definida em um intervalo fechado $[a, d]$ com máximo global em $x = d$, e f(d) é o valor máximo global de f. O mínimo global está em $x = a$, dessa forma tem-se o valor do mínimo global sendo f(a). Sendo assim o ponto de máximo global da f é $(d, f(d))$, e ponto de mínimo global é $(a, f(a))$.

Figura 1: Representação gráfica de Máximo e Mínimo



Agora consideramos na $Figura$ 3, apenas os valores de x entre $(0,4)$, ou seja, em um intervalo aberto que contém b e c. Dessa forma $f(b)$ é o maior valor que a função assume nesse intervalo. De forma análoga $f(c)$ é o menor valor que a função assume nesse intervalo. Dizemos então em $x = b$ a função tem um máximo local e $f(b)$ é um valor de máximo local de f, analogamente em $x = c$, tem-se um mínimo local e o valor de mínimo local de f é $f(c)$. Dessa forma o ponto $(b, f(b))$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo), e o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo).

Figura 2: Representação gráfica de Máximo e Mínimo



Fonte: elaborado pelas autoras

Definição 2:
Diremos que uma função tem um mínimo local (ou mínimo relativo) em c se $f(c) \leq f(x)$, para todo $x\ em\ I$, sendo I um intervalo aberto que contém c. E neste caso, $f(c)$ é um valor mínimo local (ou relativo) de f.
De forma análoga diremos que uma função tem um máximo local (ou máximo relativo) em c se $f(c) \geq f(x)$, para todo $x\ em\ I$, sendo I um intervalo um aberto que contém c. E neste caso, $f(c)$ é um valor de máximo local (ou relativo) de f.

Agora que já vimos as definições de máximos e mínimos locais e globais, você deve estar se perguntando o que isso tem a ver com nosso estudo sobre derivadas. Tem muito a ver! Pois derivadas nos diz muito sobre pontos de máximos e mínimos e também nos dá informações importantes sobre o gráfico da função f(x). Vamos então continuar? Então veremos um teorema que nos ajudará a calcular valores de Máximos e Mínimos de funções, o teorema de Fermat.

Teorema de Fermat: Se f tiver um máximo ou um mínimo local em c, e suponha que $f'(c)$ exista, então $f'(c) = 0$.

Figura 3: Representação gráfica entre a *f* e *f'*.

Para compreendermos melhor como o teorema de Fermat pode nos auxiliar a determinar pontos de máximos e mínimos, vejamos uma exemplo!

Considerando a função $f(x)=x^3 -7x+6$, determine os intervalos de crescimento e decrescimento da f e seus o(s) ponto(s) de máximo(s) e de mínimo(s).

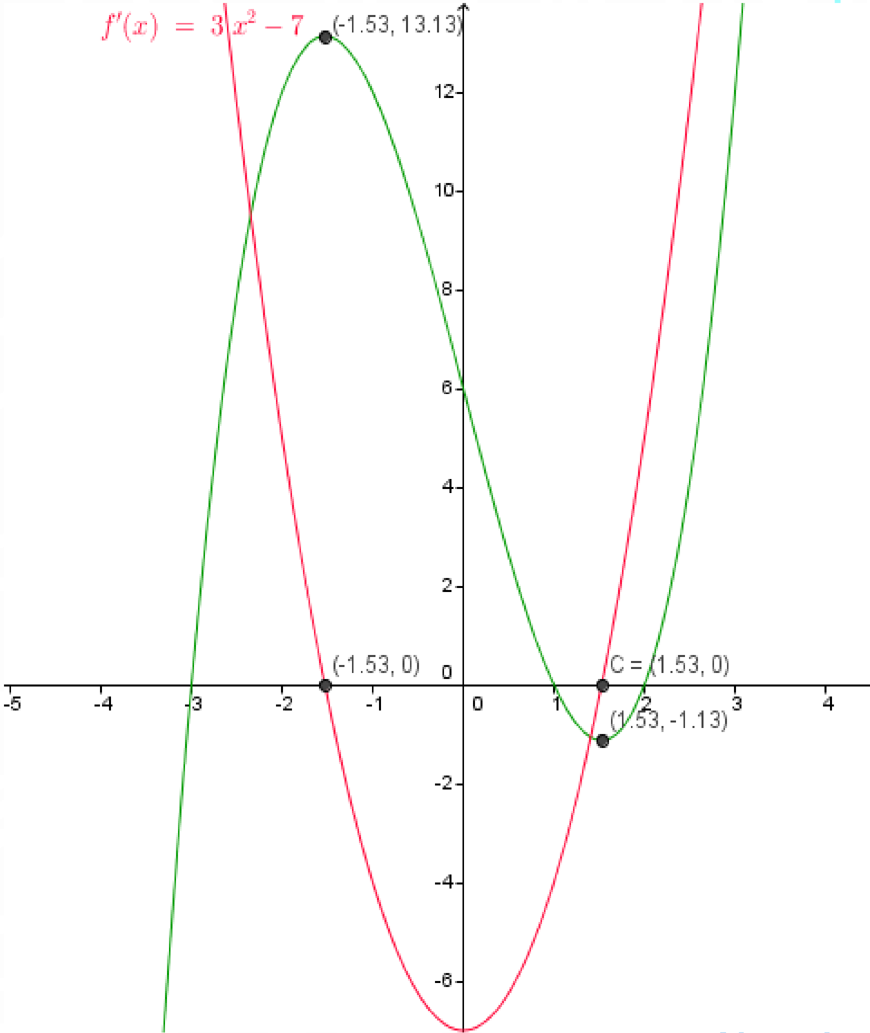
Usando o Teorema de Fermat, temos:

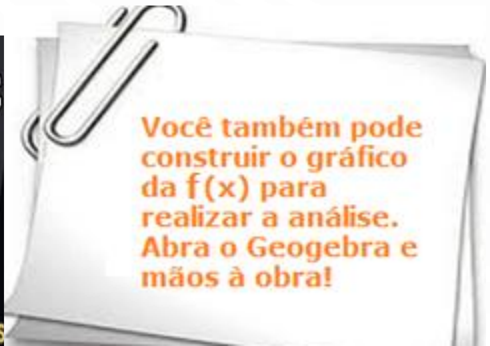
$f'(x)=3x^2-7 \quad f'(x)=0$

Usando a Fórmula de Baskara, temos

$3x^2-7=0,$

$x_1=7/3 \cong 1.53$ e $x_2=-7/3 \cong -1.53$ Agora vamos às representações gráficas de *f* e *f'* para observar os pontos em x_1 e x_2





Observando a representação gráfica das funções na Figura 2, podemos retirar os seguintes dados...

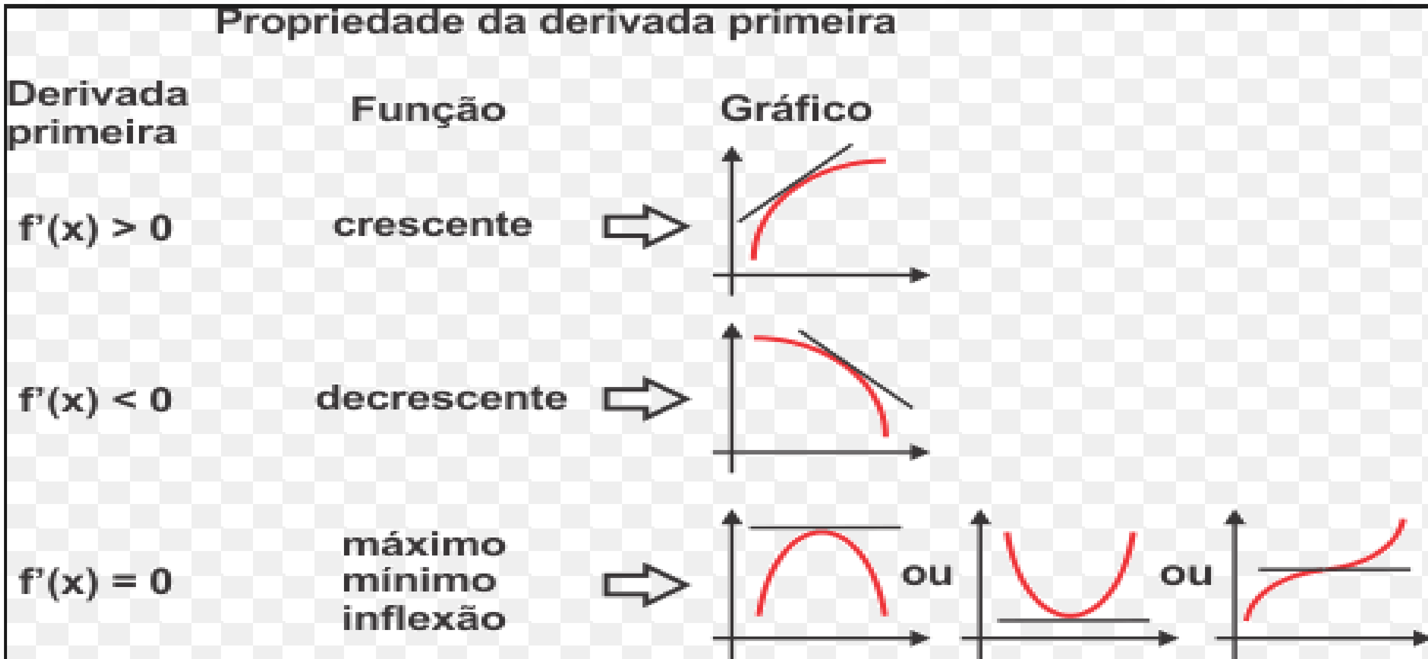
Intervalos	Sinal da $f'(x)$	$f(x)$ (crescente ou decrescente)
x$< -1{,}53$	$f'(x) > 0$	$f(x)$ é crescente
x =$-1{,}53$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 13{,}13$ (valor de Máximo)
$-1{,}53 < \mathbf{x} < 1{,}53$	$f'(x) < 0$	$f(x)$ é decrescente
x =1,53	$f'(x) = 0$	$f(x) = -1.13$ (valor de Mínimo)
x $> 1{,}53$	$f'(x) > 0$	$f(x)$ é crescente

Você também observou isso? Reflita uma pouco sobre os dados da tabela.

Observando a tabela podemos concluir que quando a $f'(x) > 0$ a $f(x)$ é crescente e quando $f'(x) < 0$ a $f(x)$ é decrescente.

Vejamos três casos que representam a função $f(x)$ e suas respectivas derivadas.

Figura 4 representação de $f(x)$ *e de* $f'(x)$



Fonte: Disponível em: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/10/o-teste-da-primeira-derivada.html>.

Analisando a figura anterior podemos dizer que a derivada nos diz muito sobre o gráfico da f(x) e assim temos a definição seguinte:

Definição 3: A. Se $f'(x) > 0$ sobre um intervalo, então f é crescente nele.
B. Se $f'(x) < 0$ sobre um intervalo, então f é decrescente nele.

Retornando ao exemplo anterior, note que à esquerda do número crítico x = $-1{,}53$ o sinal da derivada é positivo, e a sua direita é negativo, dessa forma, o ponto (-1.53, 13.13) é ponto de Máximo. À esquerda do número crítico x =1,53 o sinal da derivada é negativo, e sua direita é positivo, dessa forma, o ponto (1.53, -1.13) é ponto de Mínimo.

Sendo assim, temos uma consequência da observação realizada acima, que chamamos de teste da primeira derivada.

Teste da Derivada primeira:

Seja c um número crítico de uma função f continua.

● Se o sinal da derivada for positivo à esquerda do número crítico c e negativo à direita dele, o ponto A =(c, f(c)) é um máximo local.

● Se o sinal da derivada for negativo à esquerda do número crítico c e positivo à direita dele, o ponto A =(c, f(c)) é um mínimo local.

● Se o sinal da derivada for o mesmo em ambos os lados do ponto crítico, o ponto não é máximo nem mínimo local.