

L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

CAPITOLO 3. IL PIANO CARTESIANO E LA RETTA

1. LE EQUAZIONI LINEARI DI DUE VARIABILI

Un'equazione lineare in due variabili x e y è un'equazione di primo grado per entrambe le incognite. Può essere scritta nella forma:
 $\mathbf{a x + b y + c = 0}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ (a e b non entrambi nulli).

Una soluzione dell'equazione è una coppia $(x_0; y_0)$ di numeri reali che la soddisfa.

ESEMPIO

$$3x + 2y - 6 = 0$$

con $x = 1$
 $3 \cdot 1 + 2y - 6 = 0 \rightarrow 2y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}$
 cioè $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ è una soluzione.

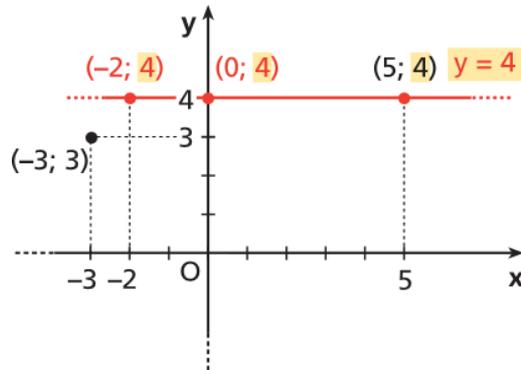
E nello stesso tempo rappresenta **un punto nel piano cartesiano.**

| | | |
|--------------------------|-------------------------------|--|
| Inoltre | x | y |
| | 0 | $3 \cdot 0 + 2y - 6 = 0 \rightarrow y = 3$ |
| | 2 | $3 \cdot 2 + 2y - 6 = 0 \rightarrow y = 0$ |
| $3x + 2 \cdot 1 - 6 = 0$ | $\frac{4}{3}$ | 1 |
| | $\rightarrow x = \frac{4}{3}$ | |

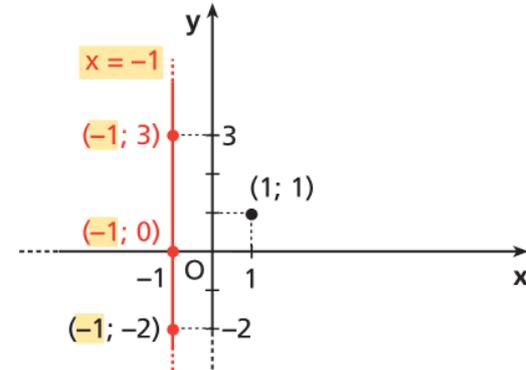
2. LE RETTE E LE EQUAZIONI LINEARI

ESEMPIO

Retta parallela all'asse x



Retta parallela all'asse y

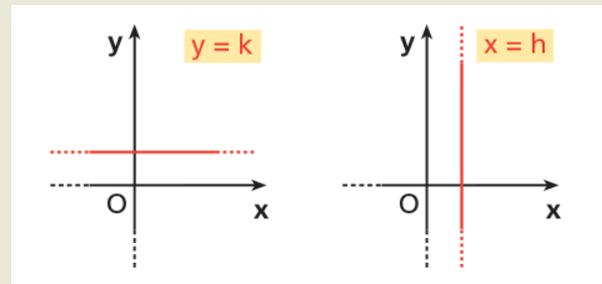


PROPRIETÀ

Equazione di una retta parallela a un asse

L'equazione di una retta parallela all'asse x è $y = k$.

L'equazione di una retta parallela all'asse y è $x = h$.



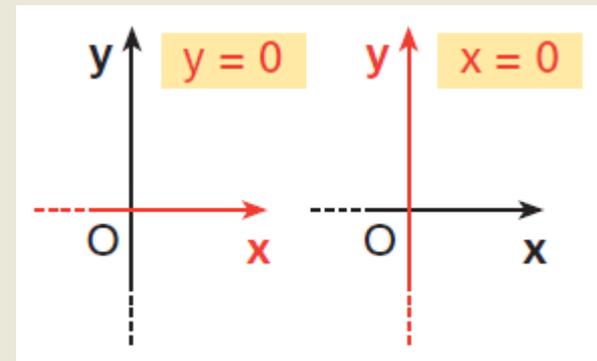
2. LE RETTE E LE EQUAZIONI LINEARI

PROPRIETÀ

Le equazioni degli assi

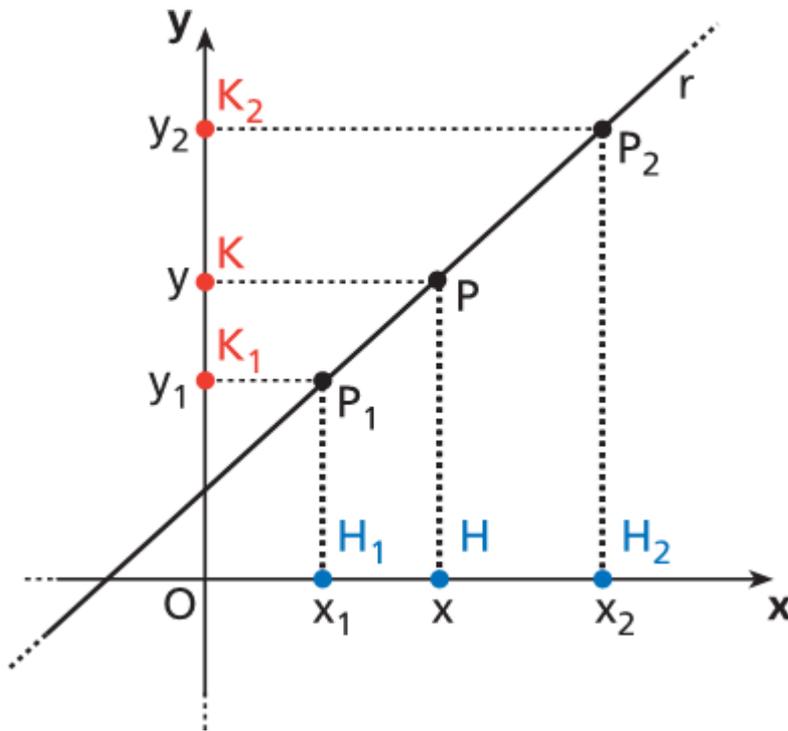
L'equazione dell'asse x è $y = 0$.

L'equazione dell'asse y è $x = 0$.



2. LE RETTE E LE EQUAZIONI LINEARI

Retta non parallela agli assi



Condizione di allineamento

Consideriamo tre punti P , P_1 e P_2 e le loro proiezioni sugli assi.

La condizione perché $P(x; y)$ appartenga alla retta passante per

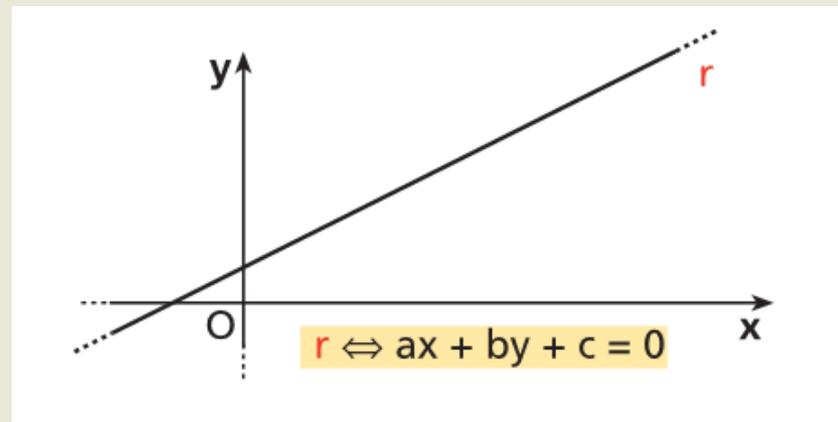
$P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ è:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

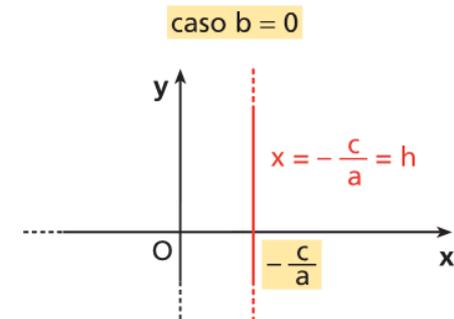
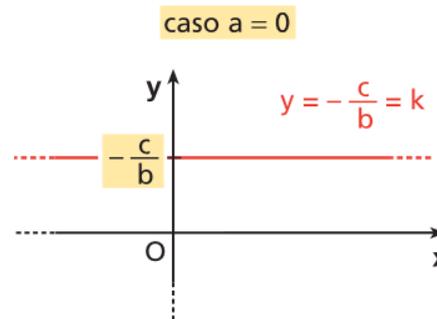
2. LE RETTE E LE EQUAZIONI LINEARI

TEOREMA

A ogni retta del piano cartesiano corrisponde un'equazione lineare in due variabili e, viceversa, a ogni equazione lineare in due variabili corrisponde una retta del piano cartesiano.



Due casi particolari dell'equazione di una retta



3. LA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

Equazione della retta passante per due punti

La condizione di allineamento fornisce l'equazione della retta passante per i punti $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della retta r passante per i punti $A(-2;5)$ e $B(1;-4)$ e stabiliamo se i punti $C(-1;2)$ e $D(1;3)$ appartengono alla retta.

$$\frac{y-5}{-4-5} = \frac{x+2}{1+2} \longrightarrow y - 5 = -3x - 6 \longrightarrow y + 3x + 1 = 0$$

$$C(-1;2), y + 3x + 1 = 0 \longrightarrow 2 + 3 \cdot (-1) + 1 = \underline{0} \longrightarrow C \in r$$

$$D(1;3), y + 3x + 1 = 0 \longrightarrow 3 + 3 \cdot 1 + 1 = \underline{\neq 0} \longrightarrow D \notin r$$

4. DALLA FORMA IMPLICITA ALLA FORMA ESPLICITA

Equazione della retta in forma implicita

$$a x + b y + c = 0$$

Equazione della retta in forma esplicita

$$y = m x + q$$

coefficiente angolare
ordinata all'origine



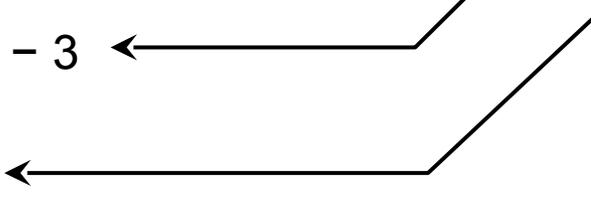
ESEMPIO

Scriviamo in forma esplicita l'equazione $9x + 3y - 2 = 0$.

$$3y = -9x + 2 \longrightarrow y = -\frac{9}{3}x + \frac{2}{3} \longrightarrow y = \underline{-3}x + \underline{\frac{2}{3}}$$

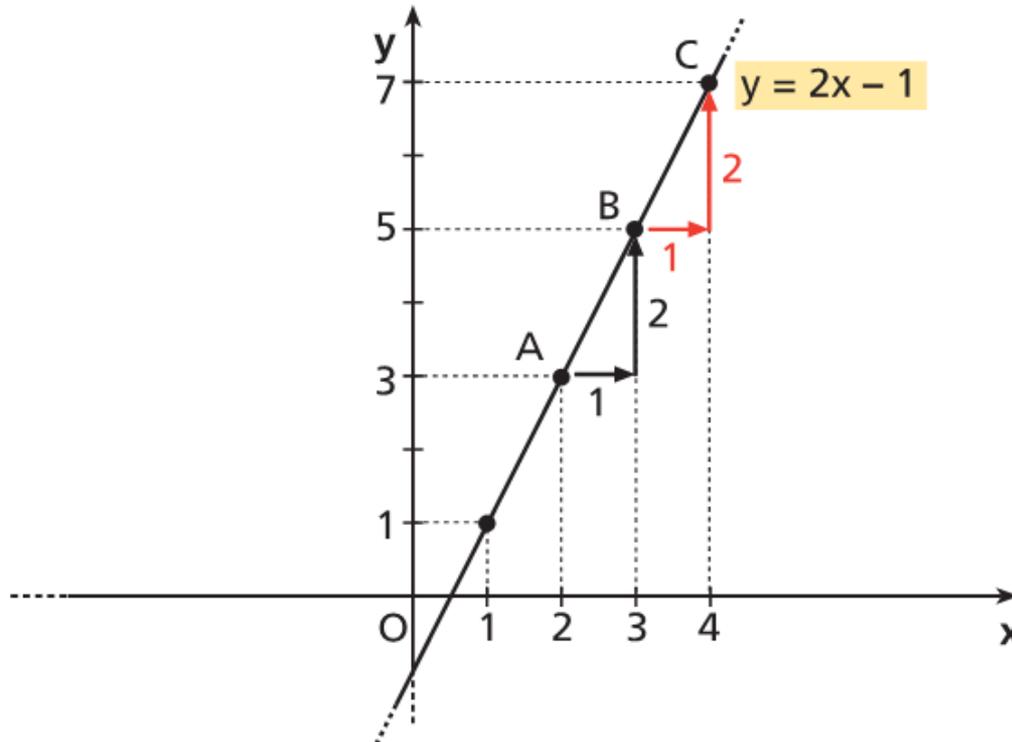
Il coefficiente angolare è -3

L'ordinata all'origine è $\frac{2}{3}$

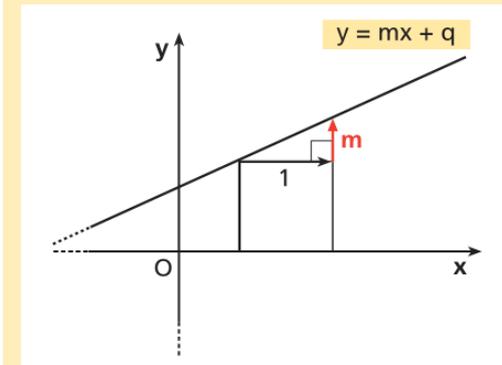


5. IL COEFFICIENTE ANGOLARE NOTE LE COORDINATE DI DUE PUNTI

Se l'ascissa aumenta di una certa quantità fissa, l'ordinata cresce anch'essa di una quantità fissa.



Quando l'ascissa aumenta di 1 unità, l'ordinata aumenta di m .



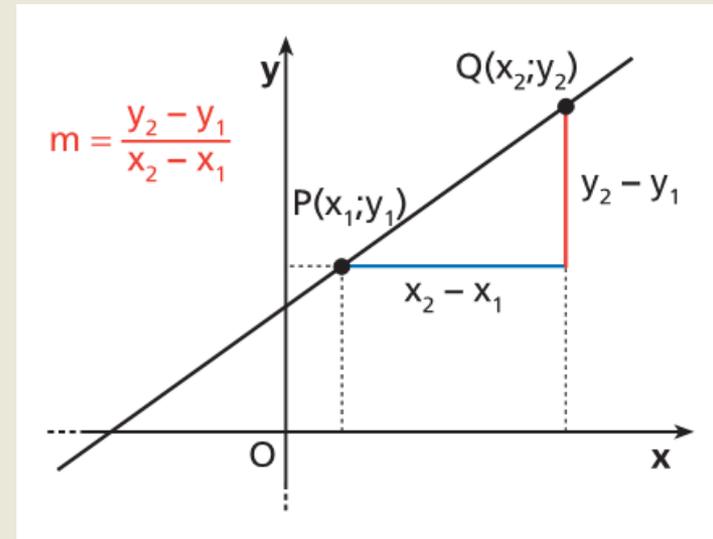
5. IL COEFFICIENTE ANGOLARE NOTE LE COORDINATE DI DUE PUNTI

PROPRIETÀ

Coefficiente angolare e coordinate di due punti

Il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse y è il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti distinti della retta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



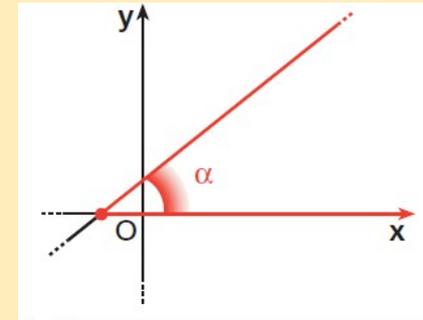
ESEMPIO

Il coefficiente angolare della retta passante per $A(\underline{1}; \underline{\frac{8}{3}})$ e $B(\underline{3}; \underline{4})$ è: $m = \frac{4 - \frac{8}{3}}{3 - 1}$

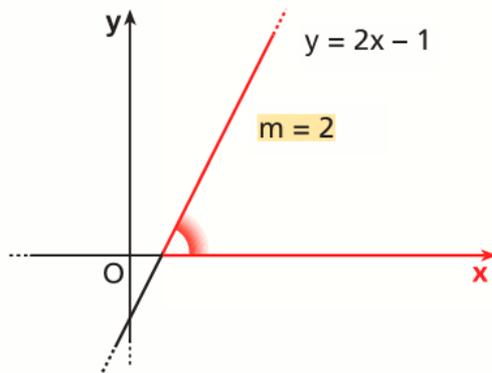
5. IL COEFFICIENTE ANGOLARE NOTE LE COORDINATE DI DUE PUNTI

Il coefficiente angolare fornisce informazioni sull'**angolo tra la retta e l'asse x** *, ossia sulla pendenza della retta.

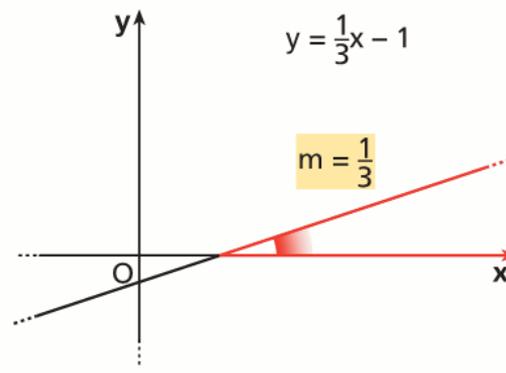
* Angolo α tra la semiretta i cui punti hanno ordinata positiva e il semiasse x di verso positivo.



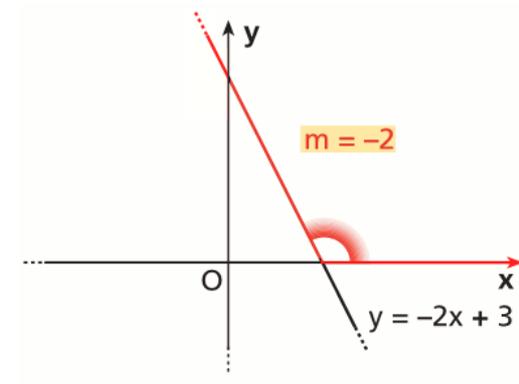
Pendenza positiva
 $m = 2$



Pendenza positiva
 $m = 1/3$



Pendenza negativa
 $m = -2$



6. L'EQUAZIONE DI UNA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO

Equazione della retta di coefficiente angolare m passante per $P(x_1; y_1)$:

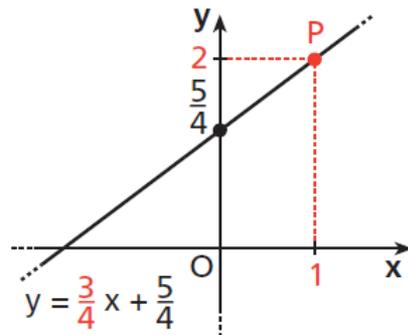
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

ESEMPIO

Troviamo la retta di coefficiente angolare $m = \frac{3}{4}$, passante per $P(1; 2)$.

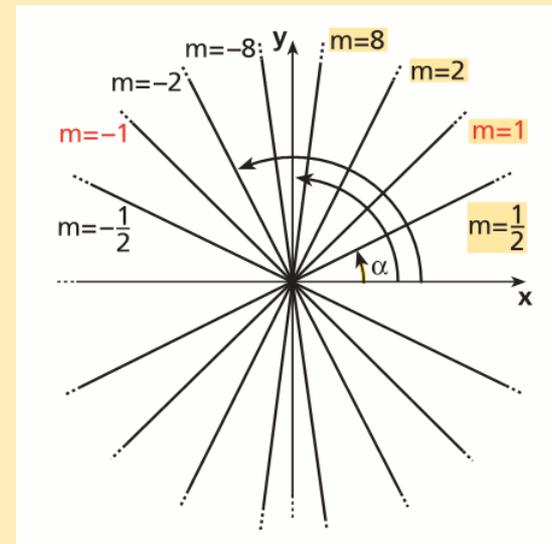
$$y - 2 = \frac{3}{4} \cdot (x - 1)$$

$$\rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$



Equazione di una retta passante per l'origine:

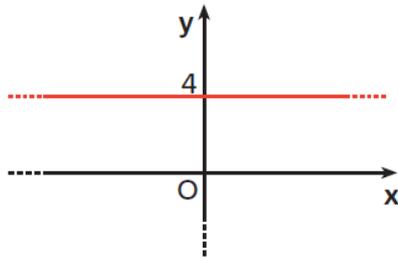
$$y = mx$$



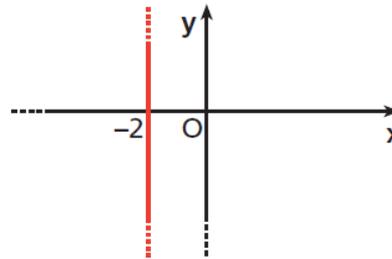
7. ESERCIZI: DAL GRAFICO ALL'EQUAZIONE

Per ogni grafico scrivi l'equazione della retta relativa.

196



198



201

Disegna la retta che passa per il punto $P(1; -5)$ parallela all'asse x e trova la sua equazione.

202

Traccia la retta parallela all'asse y passante per il punto $A(-2; 1)$ e scrivi la sua equazione.

7. ESERCIZI: DAL GRAFICO ALL'EQUAZIONE

205 ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti $A(1; 4)$ e $B(-1; 3)$ e verifichiamo che il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B .

Applichiamo la formula generale di una retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

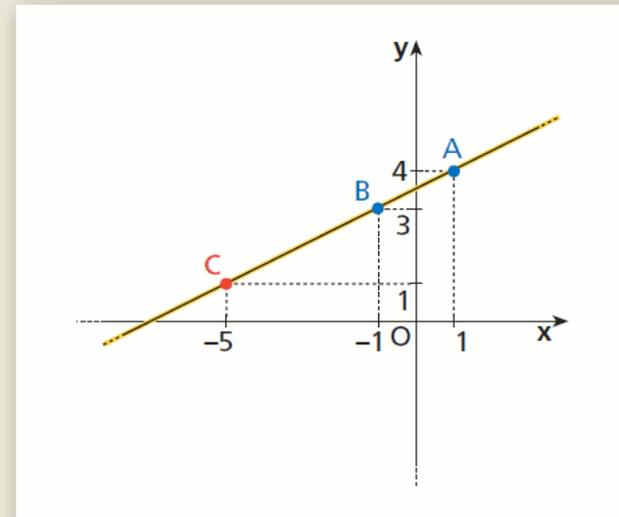
Sostituiamo a $(x_1; y_1)$ le coordinate di A e a $(x_2; y_2)$ le coordinate di B :

$$\begin{aligned} \frac{y - 4}{3 - 4} &= \frac{x - 1}{-1 - 1} \rightarrow -(y - 4) = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow \\ \rightarrow y &= \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

L'equazione richiesta è $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

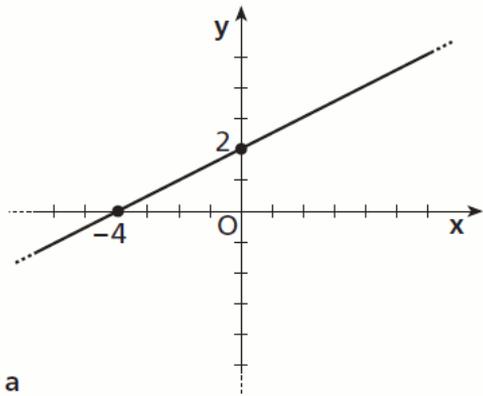
Il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B perché appartiene alla retta passante per A e B , infatti le coordinate di C verificano l'equazione di tale retta:

$$y = \frac{1}{2}(-5) + \frac{7}{2} = 1.$$

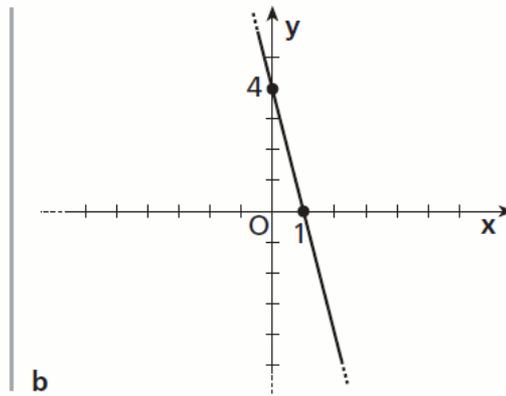


7. ESERCIZI: DAL GRAFICO ALL'EQUAZIONE

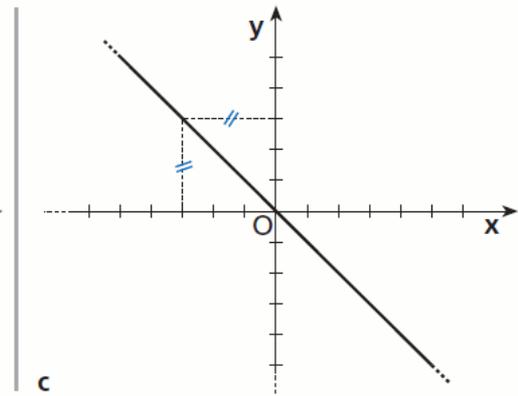
Scrivi le equazioni delle rette rappresentate, utilizzando le informazioni fornite dal grafico.

206

a



b



c

Scrivi l'equazione della retta passante per la coppia di punti indicata.

209

A(3; 0), B(0; 5).

212

A(7; 0), B(0; -4).

215

A(-3; 7), B(6; 2).

Stabilisci se le seguenti terne di punti sono costituite da punti allineati e, nel caso lo siano, scrivi l'equazione della retta su cui giacciono.

218

A(1; -1), B(5; -7), C(-1; 2).

[$3x + 2y - 1 = 0$]**219**

A(-1; -1), B(-6; -3), C(1; 1).

[non allineati]

8. ESERCIZI: DALL'EQUAZIONE AL GRAFICO / L'APPARTENENZA DI UN PUNTO A UNA RETTA

Rappresenta in un grafico cartesiano le rette che hanno le seguenti equazioni.

226 $x = -3;$ $y = 2.$

228 $2x - y = 0;$ $4y + 1 = 0.$

227 $2x - 1 = 0;$ $y - 5 = 0.$

229 $y = 2x - 2;$ $y = -4.$

238 VERO O FALSO?

- a) L'equazione $ax + 1 = 0$ rappresenta, per $a \neq 0$, l'equazione di una retta parallela all'asse x . V F
- b) L'equazione $ax + by + c = 0$ rappresenta sempre, al variare di a, b, c , una retta del piano cartesiano. V F
- c) $x = 2$ nel piano cartesiano rappresenta il punto $(2; 0)$ dell'asse x . V F
- d) La retta $2x - ky + 3 = 0$ passa per il punto $P(-3; 6)$ solo se $k = -\frac{1}{2}$. V F

Per ogni retta assegnata stabilisci se i punti A e B le appartengono.

240 $2x - 6y - 1 = 0,$ $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right),$ $B\left(1; \frac{1}{6}\right).$ [A no; B sì]

241 $y = \frac{1}{5}x + 2,$ $A(-5; 3),$ $B(10; 4).$ [A no; B sì]

9. ESERCIZI: DALLA FORMA IMPLICITA ALLA FORMA ESPLICITA E VICEVERSA

Scrivi in forma esplicita le seguenti equazioni, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto.

264 $-2x + 5y - 1 = 0;$ $-y + 2 = 0;$ $-x + 3y = 0.$

265 $3x - 3y = 0;$ $2y - 3 = 0;$ $2x + 2y + 5 = 0.$

Scrivi in forma implicita le seguenti equazioni.

267 $y = x - \frac{1}{2};$ $y = -\frac{4}{5}x + 3;$ $y = \frac{1}{4} - 2x.$

268 $y = 3x + 2;$ $y = 3 - 4x;$ $y = -3x + 1.$

10. ESERCIZI: IL COEFFICIENTE ANGOLARE

270 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo, quando è possibile, il coefficiente angolare delle rette AB , CD , EF , conoscendo le coordinate dei punti $A(-1; 3)$, $B(3; 5)$, $C(4; 3)$, $D(2; 3)$, $E(-3; -2)$, $F(-3; -1)$.

Calcoliamo $m(AB)$, applicando la formula $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$m(AB) = \frac{5 - 3}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo $m(CD)$, sempre con la stessa formula:

$$m(CD) = \frac{3 - 3}{2 - 4} = \frac{0}{-2} = 0; \text{ la retta è parallela all'asse } x \text{ e la sua equazione è } y = 3.$$

Cerchiamo di calcolare $m(EF)$ allo stesso modo:

$$m(EF) = \frac{-1 - (-2)}{-3 - (-3)} = \frac{+1}{0}; \text{ la frazione non esiste, quindi per la retta non ha significato parlare di coefficiente angolare; la retta è parallela all'asse } y \text{ e la sua equazione è } x = -3.$$

Determina, quando è possibile, il coefficiente angolare della retta passante per ogni coppia di punti.

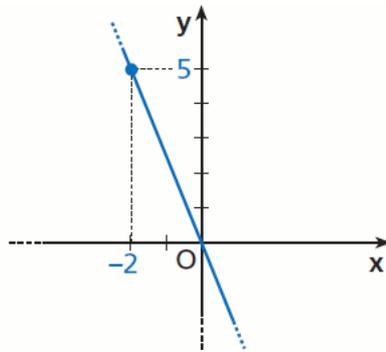
271 $A(0; 3)$, $B(2; 4)$.

274 $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

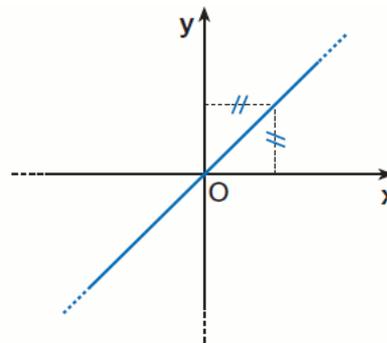
11. ESERCIZI: L'EQUAZIONE DELLA RETTA IN FORMA ESPLICITA

In base alle indicazioni date in ogni figura, ricava m e q e scrivi l'equazione della retta rappresentata.

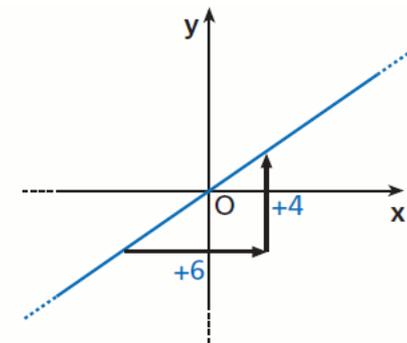
290



291



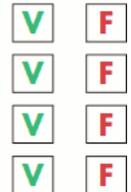
292



302

VERO O FALSO?

- L'equazione $y = mx + q$ rappresenta tutte le rette del piano al variare di m e q .
- L'equazione $y = mx + q$ è una funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} solo se $m \neq 0$.
- L'asse x non ha coefficiente angolare.
- L'ordinata all'origine della retta $y - 5 = \frac{1}{2}(x + 1)$ è $\frac{11}{2}$.



11. ESERCIZI: LA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO E DI COEFFICIENTE ANGOLARE NOTO

304 ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della retta passante per il punto $P(2; -5)$ e di coefficiente angolare $m = -3$.

Utilizziamo la formula

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Sostituendo, si ha

$$y + 5 = -3(x - 2),$$

da cui:

$$y = -3x + 1.$$

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto indicato e di coefficiente angolare assegnato e rappresentala.

305

$$A(-1; 2),$$

$$m = -1.$$

306

$$A\left(3; -\frac{1}{2}\right),$$

$$m = 3.$$