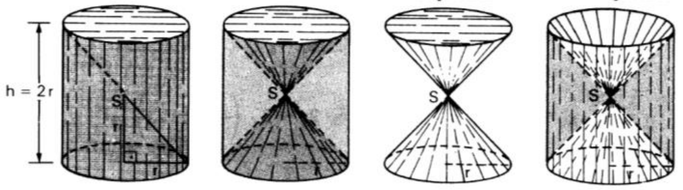
Demonstração do volume de uma esfera apresentada no volume 10 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, cujos autores são Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo.

224. *Volume da esfera*

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r (a altura é $2r$) e seja S o ponto médio do eixo do cilindro.

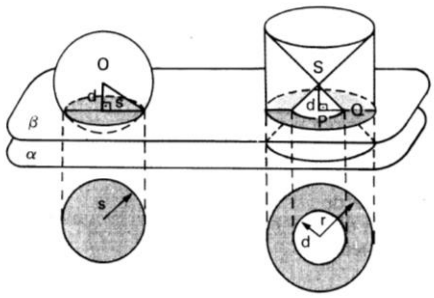
Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *clépsidra*).

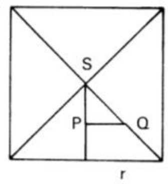
Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido X é chamado *anticlépsidra*).



Cilindro equilátero | Cilindro equilátero e os dois cones | Reunião dos dois cones | Sólido X, cilindro menos os dois cones

Consideremos agora uma esfera de raio r e o sólido X descrito acima.





$\triangle SPQ$ é isósceles:
$SP = d \Rightarrow PQ = d$.

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α, que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X, estejam num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

Qualquer plano secante β, paralelo a α, distando d do centro da esfera (e do vértice do sólido X), também secciona o sólido X. Temos:

Área da secção na esfera $= \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$
(círculo)

Área da secção no sólido X $= \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$
(coroa circular)

As áreas das secções na esfera e no sólido X são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais.

$V_{\text{esfera}} = V_{\text{sólido X}}$

Mas:

$$V_{\text{sólido X}} = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) =$$

$$= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ou seja: $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Conclusão: O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$