CHAPTER 6

# Criterios de congruencia para triángulos.

### 39. Preliminares.

Como sabemos, dos figuras geométricas se llaman congruentes si se pueden identificar una con otra al superponerlas. Por supuesto, en los triángulos identificados, todos sus elementos correspondientes, como sus lados, ángulos, alturas, medianas y bisectrices, son congruentes. Sin embargo, para determinar que dos triángulos son congruentes, no se necesita establecer la congruencia de todos sus elementos correspondientes. Basta verificar sólo la congruencia de algunos de ellos.

### 40. `Teoremas.`

(1) **Criterio LAL[1]: Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.**

(2) **Criterio ALA: Si un lado y sus dos ángulos adyacentes en un triángulo son congruentes, respectivamente, a un lado y sus ángulos adyacentes en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.**

(3) **Criterio LLL: Si tres lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, a tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.**

(1) **(LAL)** Sean $ABC$ y $A'B'C'$ dos triángulos (Figura 45) tales que

$$AC = A'C', \qquad AB = A'B', \qquad \angle A = \angle A'.$$

Se tiene que probar que estos triángulos son congruentes.

Superponemos el $\triangle ABC$ sobre el $\triangle A'B'C'$ de tal manera que $A$ coincide con $A'$, el lado $AC$ queda a lo largo de $A'C'$ y el lado $AB$ queda del mismo lado de $A'C'$ que $A'B'$.[2] Entonces: como $AC$ es congruente con $A'C'$, el punto $C$ queda encima de $C'$; por la congruencia de $\angle A$ con $\angle A'$, el lado $AB$ queda a lo largo de $A'B'$ y, por la congruencia de estos lados, el punto $B$ queda encima de $B'$. Por lo

[1] LAL quiere decir “lado-ángulo-lado”, ALA es “ángulo-lado-ángulo” y LLL es “lado-lado-lado”.

[2] Para esta y otras operaciones en esta sección, puede ser necesario voltear el triángulo sobre sí mismo.

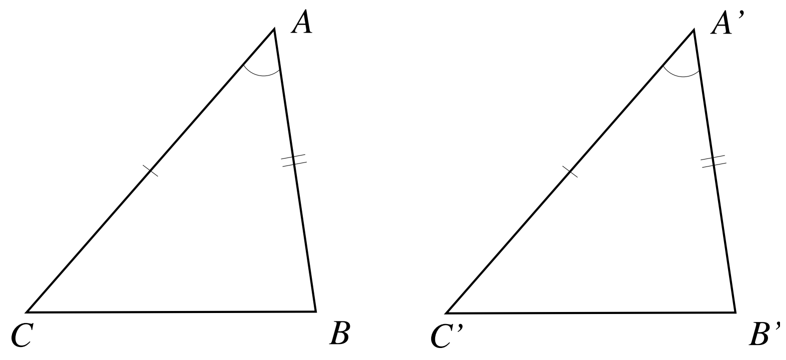


FIGURA 45

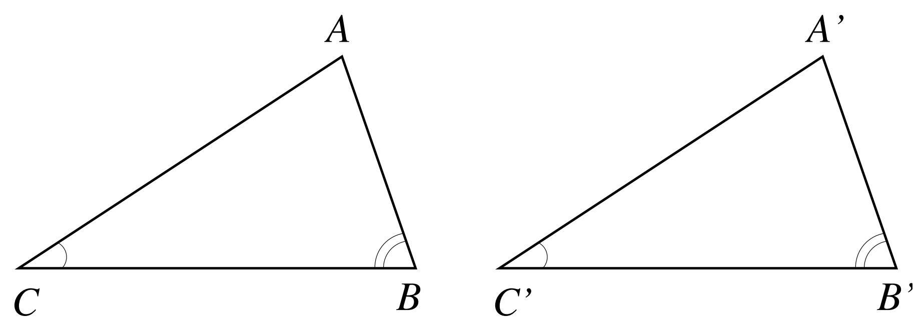


FIGURA 46

tanto el lado $BC$ coincide con el lado $B'C'$ ya que dos puntos pueden conectarse con una única recta. Y así los triángulos completos se identifican uno sobre el otro. Luego son congruentes.

(2) **(ALA)** Sean $ABC$ y $A'B'C'$ (Figura 46) dos triángulos tales que

$$\angle C = \angle C', \qquad \angle B = \angle B', \qquad CB = C'B'.$$

Se debe probar que los triángulos son congruentes. Superponemos el $\triangle ABC$ sobre el $\triangle A'B'C'$ de tal manera que el punto $C$ coincide con $C'$, el lado $CB$ va a lo largo de $C'B'$ y el vértice $A$ queda del mismo lado de $C'B'$ que $A'$. Entonces: como $CB$ es congruente con $C'B'$, el punto $B$ queda encimado en el punto $B'$ y por la congruencia de los ángulos $B$ con $B'$ y $C$ con $C'$, el lado $BA$ queda a lo largo de $B'A'$ y el lado $CA$ queda a lo largo de $C'A'$. Como dos rectas se cortan en sólo un punto, el vértice $A$ tiene que estar encimado en $A'$. Luego los triángulos se identifican y por lo tanto son congruentes.

(3) **(LLL)** Sean $ABC$ y $A'B'C'$ dos triángulos tales que

$$AB = A'B', \qquad BC = B'C', \qquad CA = C'A'.$$

Se debe probar que estos triángulos son congruentes. Demostrar que este criterio es válido mediante superposiciones, igual que como probamos la validez de los primeros dos criterios, resulta complicado, ya que al no saber nada de las

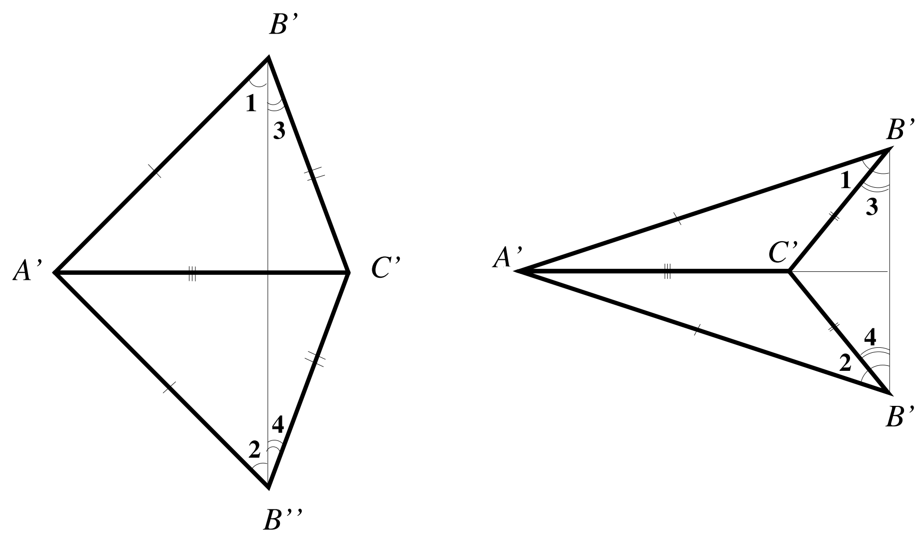


FIGURA 47

medidas de los ángulos, no seríamos capaces de concluir a partir de la coincidencia de dos lados correspondientes que los otros lados coinciden también. En lugar de una superposición, apliquemos una *yuxtaposición.*

Yuxtapongamos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ de tal manera que sus lados congruentes $AC$ y $A'C'$ coinciden (i.e., $A$ se encima en $A'$ y $C$ en $C'$) y los vértices $B$ y $B'$ quedan en lados opuestos de $A'C'$. Entonces $\triangle ABC$ ocupa la posición $\triangle A'B''C'$ (Figura 47). Al unir los vértices $B'$ y $B''$ obtenemos dos triángulos isóceles $B'A'B''$ y $B'C'B''$ con base común $B'B''$. Pero en un triángulo isóceles los ángulos en la base son congruentes (Apartado 35). Por lo tanto $\angle 1 = \angle 2$ y $\angle 3 = \angle 4$ y así $\angle A'B'C' = \angle A'B''C' = \angle B$. Entonces los triángulos dados deben ser congruentes ya que dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en el otro triángulo.

`Nota`. En triángulos congruentes, los ángulos congruentes son opuestos a los lados congruentes y, conversamente, los lados congruentes son opuestos a los ángulos congruentes.

Los criterios de congruencia que acabamos de demostrar y la habilidad de reconocer triángulos congruentes con los criterios anteriores facilitan la solución de muchos problemas de geometría y son necesarios en las demostraciones de muchos teoremas. Estos criterios de congruencia son las herramientas principales en el descubrimiento de propiedades de figuras geométricas complicadas. El lector tendrá muchas oportunidades de ver esto.

## Ejercicios.

(1) Prueba que un triángulo que tiene dos ángulos congruentes es isóceles.

(2) En un triángulo dado, una altura es una bisectriz. Prueba que el triángulo es isóceles.
(3) En un triángulo dado, una altura es una mediana. Prueba que el triángulo es isóceles.
(4) Sobre cada lado de un triángulo equilátero $ABC$ se marcan segmentos congruentes $AB'$, $BC'$ y $CA'$ y los puntos $A'$, $B'$ y $C'$ estan conectados con líneas rectas. Prueba que el triángulo $A'B'C'$ es equilátero.
(5) Supongamos que un ángulo, su bisectriz y un lado de este ángulo en un triángulo son congruentes, respectivamente, a un ángulo, su bisectriz y un lado de este ángulo en otro triángulo. Prueba que los triángulos son congruentes.
(6) Prueba que si dos lados y la mediana trazada al primero de ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y la mediana trazada al primero de ellos en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
(7) Da un ejemplo de dos triángulos incongruentes tales que dos lados y un ángulo de un triángulo son congruentes respectivamente a dos lados y un ángulo del otro triángulo.
(8) Sobre un lado de un ángulo $A$ están marcados los segmentos $AB$ y $AC$ y en el otro lado están marcados los segmentos $AB' = AB$ y $AC' = AC$. Prueba que las rectas $BC'$ y $B'C$ se cortan en la bisectriz del ángulo $A$.
(9) Del problema anterior deriva una receta para construir la bisectriz de un ángulo usando sólo regla y compás.
(10) Demuestra que en un pentágono convexo: (a) si todos los lados son congruentes y todas las diagonales son congruentes, entonces todos los ángulos interiores son congruentes y (b) si todos los lados son congruentes y todos los ángulos interiores son congruentes, entonces todas las diagonales son congruentes.
(11) ¿Será cierto que si en un polígono convexo todas las diagonales son congruentes y todos los ángulos interiores son congruentes, entonces todos los lados son congruentes?