

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳團隊合作獎

080417

來玩九九乘法表

學校名稱： 高雄市前金區前金國民小學

作者：	指導老師：
小五 巫光裕	黃千芬
小六 李宜霖	徐靜音
小六 許雅雯	
小六 莊棋	
小五 黃韻哲	

關鍵詞：乘法表、因數、對稱

壹、摘要

一開始我們想解出九九乘法表中，放置一個正方形，使這個正方形四個頂點位置的數加起來，和會是 140 的框框。解題的過程中，我們嘗試了許多方法，利用學校的數學課程所學習到對稱、因數分解的基本觀念，除了找出規律外，更發現九九乘法表的奧妙與許多有趣的玩法。

貳、研究動機

老師曾經要我們討論，「九九乘法表中，放置一個正方形，使這個正方形四個頂點位置的數加起來，和會是 140，請在表中劃出這個正方形的框框」？我們做了很多嘗試，提出許多猜測與想法，過程中常常有神奇的發現。在解開這一題的答案後，覺得應該把我們所有試過的方法，一一記錄下來；也想再看看九九乘法表有沒有更新鮮有趣的玩法，於是決定展開一段九九乘法表的探險。

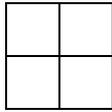
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

參、研究目的

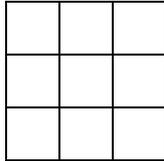
- 一、當九九乘法表中用 2×2 、 3×3 、 4×4 …… 9×9 等不同大小正方形框起來時
 - (一) 正方形兩對角數之和，相加有什麼規律？
 - (二) 正方形兩對角數之和，相減有什麼規律？
 - (三) 正方形兩對角數之乘積，相加有什麼規律？
 - (四) 正方形兩對角數之乘積，相減有什麼規律？
 - (五) 任一正方形內對角線數字相乘，除了加、減之外，還有什麼有趣的關係呢？
- 二、透過中間數的使用，九九乘法表中有哪些有趣的規律？

肆、名詞定義

一、 2×2 ：邊長 2 格的正方形。

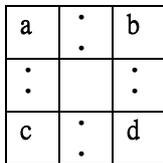


二、 3×3 ：邊長 3 格的正方形。



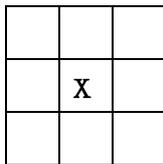
以此類推 4×4 、 5×5 、 6×6 、 7×7 、 8×8 、 9×9 。

三、正方形的對角數：左上為 a 、右上為 b 、左下為 c 、右下為 d 。

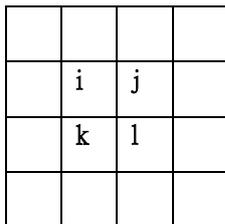


四、中間數：

1. 以奇數格而言：以 3×3 為例，中間數為 x 。



2. 以偶數格而言：以 4×4 為例，中間數為 $(i+j+k+1)$ 。



伍、研究工具

紙、筆、色筆、電腦以及相關應用軟體（Word、Excel）。

陸、研究結果與分析

一、當九九乘法表中用 2×2 、 3×3 、 4×4 …… 9×9 等不同大小正方形框起來時，

(一) 正方形兩對角數之和 ($a+d$ 與 $b+c$)，相加 ($a+d+b+c$) 有什麼規律？

我們首先嘗試逐一列出乘法表中 3x3 格框起來時， $a+d$ 、 $b+c$ 以及 $a+d+b+c$ 的結果（如表 1），同時我們也發現若將 $a+d+b+c$ 的結果分解成兩個數相乘（如表 1 中分解一欄所示），例如第一列分解成 4×4 、 4×6 、 4×8 、 4×10 、 4×12 、 4×14 、 4×16 ，第二列分解成 6×4 、 6×6 、 6×8 、 6×10 、 6×12 、 6×14 、 6×16 ，…以此類推，我們找出 4、6、8、10、12、14、16 反覆出現的規律。

表 1 3x3 格框中兩對角數之和（ $a+d$ 與 $b+c$ ）及其相加之和（ $a+d+b+c$ ）

第一列四個頂點					第二列四個頂點				
a+d	b+c	和	分解一	分解二	a+d	b+c	和	分解一	分解二
10	6	16	4x4	8x2	14	10	24	6x4	12x2
14	10	24	4x6	8x3	20	16	36	6x6	12x3
18	14	32	4x8	8x4	26	22	48	6x8	12x4
22	18	40	4x10	8x5	32	28	60	6x10	12x5
26	22	48	4x12	8x6	38	34	72	6x12	12x6
30	26	56	4x14	8x7	44	40	84	6x14	12x7
34	30	64	4x16	8x8	50	46	96	6x16	12x8
第三列四個頂點					第四列四個頂點				
a+d	b+c	和	分解一	分解二	a+d	b+c	和	分解一	分解二
18	14	32	8x4	16x2	22	18	40	10x4	20x2
26	22	48	8x6	16x3	32	28	60	10x6	20x3
34	30	64	8x8	16x4	42	38	80	10x8	20x4
42	38	80	8x10	16x5	52	48	100	10x10	20x5
50	46	96	8x12	16x6	62	58	120	10x12	20x6
58	54	112	8x14	16x7	72	68	140	10x14	20x7
66	62	128	8x16	16x8	82	78	160	10x16	20x8
第五列四個頂點					第六列四個頂點				
a+d	b+c	和	分解一	分解二	a+d	b+c	和	分解一	分解二
26	22	48	12x4	24x2	30	26	56	14x4	28x2
38	34	72	12x6	24x3	44	40	84	14x6	28x3
50	46	96	12x8	24x4	58	54	112	14x8	28x4
62	58	120	12x10	24x5	72	68	140	14x10	28x5
74	70	144	12x12	24x6	86	82	168	14x12	28x6
86	82	168	12x14	24x7	100	96	196	14x14	28x7
98	94	192	12x16	24x8	114	110	224	14x16	28x8
第七列四個頂點									
a+d	b+c	和	分解一	分解二					
34	30	64	16x4	32x2					
50	46	96	16x6	32x3					
66	62	128	16x8	32x4					
82	78	160	16x10	32x5					
98	94	192	16x12	32x6					
114	110	224	16x14	32x7					
130	126	256	16x16	32x8					

3x3 格的四個對角數相加結果（如表 2），會得到一個具有對稱關係的表格。爲了瞭解這種關係是否也存在於不同邊長正方形的對角數相加，因此我們決定試試看 5x5 格、7x7 格及 9x9 格的情況。

5x5 格時，四個對角數的和分解成兩個數相乘後發現：當被乘數都是 6 時，乘數有一定

的出現規律：乘數即 6、8、10、12、14。我們把五列全部分解後得到如下的結果：

第一列是 6 乘以 6、8、10、12、14，

第二列是 8 乘以 6、8、10、12、14，

第三列是 10 乘以 6、8、10、12、14，

第四列是 12 乘以 6、8、10、12、14，

第五列是 14 乘以 6、8、10、12、14，

因此，5x5 格的四個對角數相加，會得到表 3 的結果，存在對稱的關係。

7x7 格時，四個對角數的和分解成兩個數相乘後，發現當被乘數都是 8 時，乘數即 8、10、12。7x7 格的四個對角數相加，會得到表 4 之結果，存在對稱的關係。

9x9 格時，因為四個對角數的和只有 1 組，分解成兩個數相乘後為 10x10，因此可以得到表 5 結果，也仍存在對稱的關係。

表 2 3x3 格的四個對角數相加結果

	4	6	8	10	12	14	16
4	16	24	32	40	48	56	64
6	24	36	48	60	72	84	96
8	32	48	64	80	96	112	128
10	40	60	80	100	120	140	160
12	48	72	96	120	144	168	192
14	56	84	112	140	168	196	224
16	64	96	128	160	192	224	256

表 3 5x5 格的四個對角數相加結果

	6	8	10	12	14
6	36	48	60	72	84
8	48	64	80	96	112
10	60	80	100	120	140
12	72	96	120	144	168
14	84	112	140	168	196

表 4 7x7 格的四個對角數相加結果

	8	10	12
8	64	80	96
10	80	100	120
12	96	120	144

表 5 9x9 格的四個對角數相加結果

	10
10	100

最後，我們將表 2~表 5 進行比對發現，其實我們可以用表 2 涵蓋所有的結果，若將它們以不同顏色來畫記，將如表 6 所示。同時，我們也發現在表 6 中對角線 16、36、64、100、144、196、256 均為完全平方數，由對角線劃開之右上和左下兩部分形成對稱。

表 6 邊長奇數格對角數和之關係一覽表

	4	6	8	10	12	14	16
4	16	24	32	40	48	56	64
6	24	36	48	60	72	84	96
8	32	48	64	80	96	112	128
10	40	60	80	100	120	140	160
12	48	72	96	120	144	168	192
14	56	84	112	140	168	196	224
16	64	96	128	160	192	224	256

而從表 1 的分解二，我們發現乘法表裏有神奇的「T 型軸」（表 7），也就是不論 3x3、5x5、7x7、9x9 中，四個對角和有一個速算法：框出任一個奇數格正方形，找出中間數，往上對到粉紅色 T 型中橫軸的數字，以及中間數往左或往右對到的粉紅色 T 型中直軸的數字，將兩個數字相乘的積，也就是四個對角和。舉例來說：用黑筆框住一個 3x3，如表 7 所示，中間數為 49，往上對到粉紅色 T 型中橫軸的數字為 7，以及往左對到粉紅色 T 型中直軸的數字為 28，將 $7 \times 28 = 196$ ，即為四個對角和 $36 + 64 + 48 + 48 = 196$ 。

表 7 四角和 T 型軸速算法示意圖

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

試完邊長奇數格後，接著我們來試偶數格，我們想再了解 2x2、4x4、6x6、8x8 格框起來時，四個對角數的和會不會出現像奇數格產生的一些規律。因此，我們從 2x2 開始（表 8 所示），結果在分解其和的時候我們找出 3、5、7、9、11、13、15、17 反覆出現的規律。

表 8 2x2 格框兩對角數之和 (a+d 與 b+c) , 相加 (a+d+b+c)

第一列四個對角數				第二列四個對角數				第三列四個對角數			
a+d	b+c	和	分解	a+d	b+c	和	分解	a+d	b+c	和	分解
5	4	9	3x3	8	7	15	5x3	11	10	21	7x3
8	7	15	3x5	13	12	25	5x5	18	17	35	7x5
11	10	21	3x7	18	17	35	5x7	25	24	49	7x7
14	13	27	3x9	23	22	45	5x9	32	31	63	7x9
17	16	33	3x11	28	27	55	5x11	39	38	77	7x11
20	19	39	3x13	33	32	65	5x13	46	45	91	7x13
23	22	45	3x15	38	37	75	5x15	53	52	105	7x15
26	25	51	3x17	43	42	85	5x17	60	59	119	7x17

第四列四個對角數				第五列四個對角數				第六列四個對角數			
a+d	b+c	和	分解	a+d	b+c	和	分解	a+d	b+c	和	分解
14	13	27	9x3	17	16	33	11x3	20	19	39	13x3
23	22	45	9x5	28	27	55	11x5	33	32	65	13x5
32	31	63	9x7	39	38	77	11x7	49	48	91	13x7
41	40	81	9x9	50	49	99	11x9	62	61	117	13x9
50	49	99	9x11	61	60	121	11x11	75	74	143	13x11
59	58	117	9x13	72	71	143	11x13	88	87	169	13x13
68	67	135	9x15	83	82	165	11x15	101	100	195	13x15
77	76	153	9x17	94	93	187	11x17	114	113	221	13x17

第七列四個對角數				第八列四個對角數			
a+d	b+c	和	分解	a+d	b+c	和	分解
23	22	45	15x3	26	25	51	17x3
38	37	75	15x5	43	42	85	17x5
53	52	105	15x7	60	59	119	17x7
68	67	135	15x9	77	76	153	17x9
83	82	165	15x11	94	93	187	17x11
98	97	195	15x13	111	110	221	17x13
113	112	225	15x15	128	127	255	17x15
128	127	255	15x17	145	144	289	17x17

我們利用邊長奇數格分析的經驗預測：4x4、6x6、8x8 格的四個對角數相加結果分析將會是 3、5、7、9、11、13、15、17 所形成類似表 2 的表格（如表 9），後來經我們逐一列出 4x4、6x6、8x8 格的四個對角數相加結果，果真符合表 2 中的關係。而表 9 中對角線 9、25、49、81、121、169、225、289 均為完全平方數，由對角線劃開之右上和左下兩部分形成對稱。

表 9 邊長偶數格對角數和之關係一覽表

	3	5	7	9	11	13	15	17
3	9	15	21	27	33	39	45	51
5	15	25	35	45	55	65	75	85
7	21	35	49	63	77	91	105	119
9	27	45	63	81	99	117	135	153
11	33	55	77	99	121	143	165	187
13	39	65	91	117	143	169	195	221
15	45	75	105	135	165	195	225	255
17	51	85	119	153	187	221	255	289

(二) 正方形兩對角數之和 (a+d 與 b+c)，及其差 (a+d) - (b+c) 有什麼規律？

我們仿照前一部分的作法，將 2x2、3x3、4x4……到 9x9 正方形格中，兩對角數之和 a+d 與 b+c 分別列出，並計算出其兩者之差 (如表 10)。從分解的角度來看可知，(a+d) - (b+c) 的結果恰等於正方形格數減去 1，再取其數的平方即可。

表 10 2x2 ~ 9x9 正方形兩對角數之和 (a+d 與 b+c)，及其差一覽表

2x2				3x3				4x4			
a+d	b+c	差	分解	a+d	b+c	差	分解	a+d	b+c	差	分解
5	4	1	1x1	10	6	4	2x2	17	8	9	3x3
8	7	1	1x1	14	10	4	2x2	22	13	9	3x3
11	10	1	1x1	18	14	4	2x2	27	18	9	3x3
14	13	1	1x1	22	18	4	2x2	37	28	9	3x3
共 64 組				共 49 組				共 36 組			
5x5				6x6				7x7			
a+d	b+c	差	分解	a+d	b+c	差	分解	a+d	b+c	差	分解
26	10	16	4x4	37	12	25	5x5	50	14	36	6x6
32	16	16	4x4	44	19	25	5x5	58	22	36	6x6
38	22	16	4x4	51	26	25	5x5	66	30	36	6x6
44	28	16	4x4	58	33	25	5x5	68	32	36	6x6
共 25 組				共 16 組				共 9 組			
8x8				9x9							
a+d	b+c	差	分解	a+d	b+c	差	分解				
65	16	49	7x7	82	18	64	8x8				
74	25	49	7x7	共 1 組							
74	25	49	7x7								
85	36	49	7x7								
共 4 組											

(三) 正方形對角數乘積 (axd 與 bxc) 之和有什麼規律？

依照前面的作法，將 2x2、3x3、4x4……到 9x9 正方形格中，對角數乘積 (axd 與 bxc) 分別列出，並計算出其兩者之和 (如表 11)。從表 11 中我們得知，不論在邊長幾格的正方形中，其 axd 與 bxc 恆相等。

表 11 2x2 ~ 9x9 正方形對角數乘積 (axd 與 bxc)，及其和 (axd+bxc) 一覽表

2x2			3x3			4x4			5x5		
ad	bc	ad+bc									
4	4	8	9	9	18	16	16	32	25	25	50
12	12	24	24	24	48	40	40	80	60	60	120
24	24	48	45	45	90	48	48	96	105	105	210
40	40	80	72	72	144	112	112	224	160	160	320
5184	5184	10368	3969	3969	7938	2916	2916	5832	2025	2025	4050
共 64 組			共 49 組			共 36 組			共 25 組		

6x6			7x7			8x8			9x9		
ad	bc	ad+bc	ad	bc	ad+bc	ad	bc	ad+bc	ad	bc	ad+bc
36	36	72	49	49	98	64	64	128	81	81	162
84	84	168	112	112	224	144	144	288	共 1 組		
144	144	288	189	189	378	144	144	288			
216	216	432	112	112	224	324	324	648			
						共 4 組					
1296	1296	2592	2229	2229	4458						
共 16 組			共 9 組								

接著，我們嘗試將 2x2 對角數乘積之和 (axd+bxc) 的結果由小到大，分別作為新表格的列與行，並根據其倍數關係，填入表格中其餘的空格 (如表 12)，我們發現這個表將以對角線為對稱軸，形成一個對稱表格，進一步我們將對稱軸上的八個數 8、72、288、800、1800、3528、6272、10368 除以 2 以後，變成 4、36、144、400、900、1764、3136、5484，這些數恰好是 2、6、12、20、30、42、56、72 的平方數。

表 12 2x2 正方形對角數乘積之和所建構出之對稱表

8	24	48	80	120	168	224	288
24	72	144	240	360	504	672	864
48	144	288	480	720	1008	1344	1728
80	240	480	800	1200	1680	2240	2880
120	360	720	1200	1800	2520	3360	4320
168	504	1008	1680	2520	3528	4704	6048
224	672	1344	2240	3360	4704	6272	8064
288	864	1728	2880	4320	6048	8064	10368

我們依序根據 3x3、4x4、5x5、6x6、7x7 以及 8x8 格對角數乘積之和，分別完成表 13~表 18，並且發現下列的關係：

1. 表 13 中，對稱軸的七個數 18、128、450、1152、2450、4608、7938 除以 2 以後，變成 9、64、225、576、1225、2304、3969，恰好是 3、8、15、24、35、48、36 的平方數。

表 13 3x3 正方形對角數乘積之和所建構出之對稱表

18	48	90	144	210	288	378
48	128	240	384	560	768	1008
90	240	450	720	1050	1440	1890
144	384	720	1152	1680	2304	3024
210	560	1050	1680	2450	3360	4410
288	768	1440	2304	3360	4608	6048
378	1008	1890	3024	4410	6048	7938

2. 表 14 中，對稱軸的七個數 32、200、648、1568、3200、5832 除以 2 以後，變成 16、100、324、784、1600、2916，這些數恰好是 4、10、18、28、40、54 的平方數。

表 14 4x4 正方形對角數乘積之和所建構出之對稱表

32	80	144	224	320	432
80	200	360	560	800	1080
144	350	648	1008	1440	1944
224	560	1008	1568	2240	3024
320	800	1440	2240	3200	4320
432	1080	1944	3024	4320	5832

3. 表 15 中，對稱軸的五個數 50、288、882、2048、4050，除以 2 以後，變成 25、144、441、1024、2025，恰好是 5、12、21、32、45 的平方數。

表 15 5x5 正方形對角數乘積之和所建構出之對稱表

50	120	210	320	450
120	288	504	768	1080
210	504	882	1344	1890
320	768	1344	2048	2880
450	1080	1890	2880	4050

4. 表 16 中，對稱軸的四個數 72、392、1152、2592，除以 2 以後，變成 36、196、576、1296，這些數恰好是 6、14、24、36 的平方數。

表 16 6x6 正方形對角數乘積之和所建構出之對稱表

72	168	288	432
168	392	672	1008
288	672	1152	1728
432	1008	1728	2592

5. 表 17 中，對稱軸的三個數 98、512、1458，除以 2 以後，變成 49、256、729，這些數恰好是 7、16、27 的平方數。

表 17 7x7 正方形對角數乘積之和所建構出之對稱表

98	224	378
224	512	864
378	864	1458

6. 表 18 中，對稱軸的兩個數 128、648 除以 2 以後，變成 64、324，這些數恰好是 8、18 的平方數。

表 18 8x8 正方形對角數乘積之和所建構出之對稱表

128	288
288	648

7. 9x9 格中，對稱軸只有一個數 162，除以 2 後等於 81，亦是平方數，就是 9x9。

當逐一找出上述關係後，我們接著又覺得它們之間是不是還有其他的關係存在？於是我們將 2x2、3x3、4x4、5x5、6x6、7x7、8x8、9x9 所形成的對稱軸上的數，再整理成表 19 的形式。從表 19 中，我們找了許多有趣的現象，我們發現，每一種格數所找到的平方關係，都與本身的格數有關，譬如 2x2 格時，第一個 $(ad+bc) \div 2$ 的結果就是 2x2；3x3 格時，第一個 $(ad+bc) \div 2$ 的結果就是 3x3，以此類推……。

此外，每一種格數的平方數出現順序也有一定的規律，我們將所有平方數依序從表 19 抄下來，發現：

1. 以直行來說，第一行每一個數都差 1、第二行每一個數都差 2、第三行每一個數都差 3、第四行每一個數都差 4……（如圖 1）。

2. 斜線間也可以看出規律，由左上方起：

(1) 第一條斜線 $3+3$ 或 3×2 都等於 6。

(2) 第二條斜線 $4\times 2=8$ ， $4\times 3=12$ 。

(3) 第三條斜線 $5\times 2=10$ ， $5\times 3=15$ ， $5\times 4=20$ 。

(4) 第四條斜線 $6\times 2=12$ ， $6\times 3=18$ ， $6\times 4=24$ ， $6\times 5=30$ 。

(5) 第五條斜線 $7\times 2=14$ ， $7\times 3=21$ ， $7\times 4=28$ ， $7\times 5=35$ ， $7\times 6=42$ 。

(6) 第六條斜線 $8\times 2=16$ ， $8\times 3=24$ ， $8\times 4=32$ ， $8\times 5=40$ ， $8\times 6=48$ ， $8\times 7=56$ 。

(7) 第七條斜線 $9\times 2=18$ ， $9\times 3=27$ ， $9\times 4=36$ ， $9\times 5=45$ ， $9\times 6=54$ ， $9\times 7=63$ ，
 $9\times 8=72$ 。

3. 橫列的規律則可以分爲偶數格和奇數格兩類（如圖 2）：

(1) 偶數格時

2×2 格時，平方數以 4、6、8、10、12、14、16 遞增。

4×4 格時，平方數以 6、8、10、12、14 遞增。

6×6 格時，平方數以 8、10、12 遞增。

8×8 格時，兩平方數剛好相差 10。

(2) 奇數格時

3×3 格時，平方數以 5、7、9、11、13、15 遞增。

5×5 格時，平方數以 7、9、11、13 遞增。

7×7 格時，平方數以 9、11 遞增。

表 19 不同格數對稱軸上的數及其關係統整圖

格數	對稱軸上的數	8	72	288	800	1800	3528	6272	10368
2x2	除以 2 後	4	36	144	400	900	1764	3136	5184
	平方關係	2x2	6x6	12x12	20x20	30x30	42x42	56x56	72x72
3x3	對稱軸上的數	18	128	450	1152	2450	4608	7938	
	除以 2 後	9	64	225	576	1225	2304	3969	
	平方關係	3x3	8x8	15x15	24x24	35x35	48x48	63x63	
4x4	對稱軸上的數	32	200	648	1568	3200	5832		
	除以 2 後	16	100	324	784	1600	2916		
	平方關係	4x4	10x10	18x18	28x28	40x40	54x54		
5x5	對稱軸上的數	50	288	882	2048	4050			
	除以 2 後	25	144	441	1024	2025			
	平方關係	5x5	12x12	21x21	32x32	45x45			
6x6	對稱軸上的數	72	392	1152	2592				
	除以 2 後	36	196	576	1296				
	平方關係	6x6	14x14	24x24	36x36				
7x7	對稱軸上的數	98	512	1458					
	除以 2 後	49	256	729					
	平方關係	7x7	16x16	27x27					
8x8	對稱軸上的數	128	648						
	除以 2 後	64	324						
	平方關係	8x8	18x18						
9x9	對稱軸上的數	162							
	除以 2 後	81							
	平方關係	9x9							

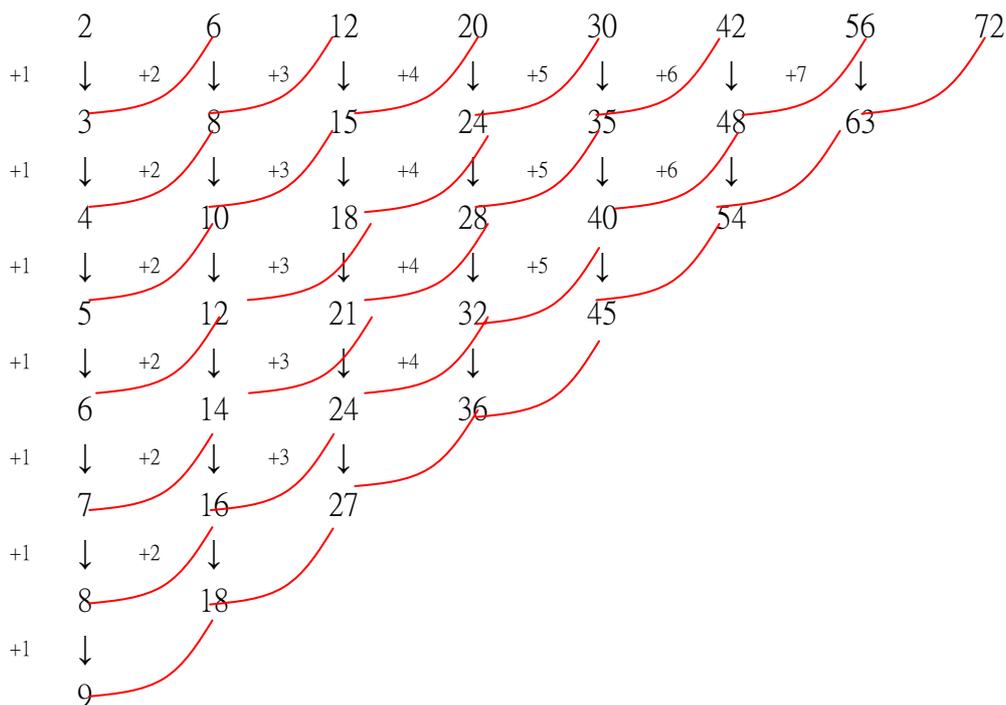


圖 1 不同格數平方數關係出現斜線間規律圖

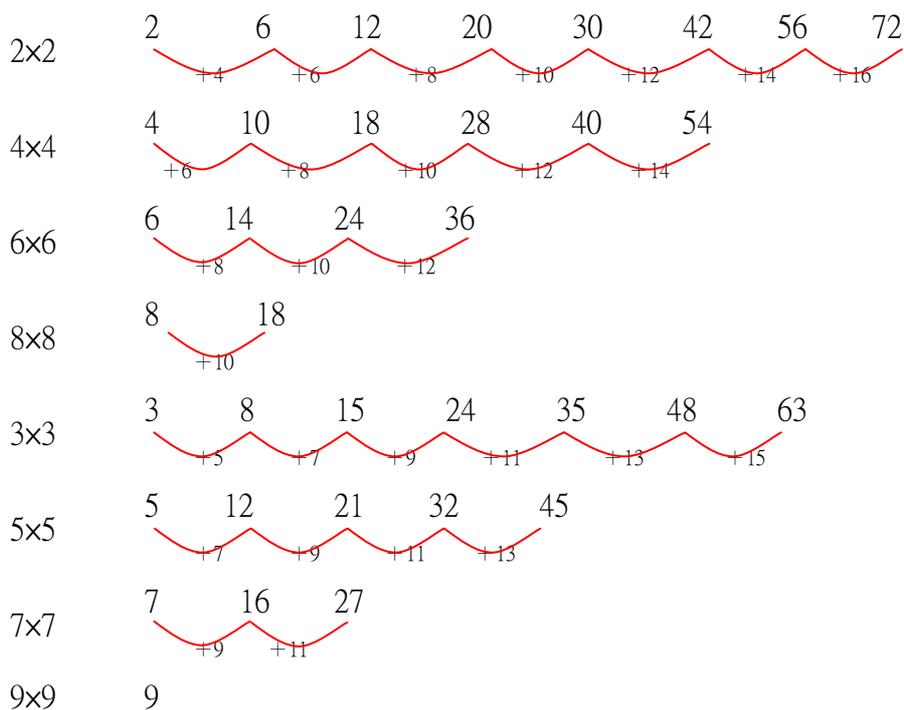


圖 2 不同格數平方數關係出現橫列間規律圖

(四) 正方形兩對角數之乘積 (axd 與 bxc)，相減有什麼規律？

當我們將不同格數每一個 axd 與 bxc 相減後 (如表 20)，赫然發現：不論是多大的正方形，axd - bxc 之值永遠都等於零。

表 20 正方形兩對角數之乘積，相減後關係一覽表

2×2			3×3			4×4			5×5		
ad	bc	ad-bc									
4	4	0	9	9	0	16	16	0	25	25	0
12	12	0	24	24	0	40	40	0	60	60	0
24	24	0	45	45	0	48	48	0	105	105	0
40	40	0	72	72	0	112	112	0	160	160	0
5184	5184	0	3969	3969	0	2916	2916	0	2025	2025	0
共 64 組			共 49 組			共 36 組			共 25 組		

6×6			7×7			8×8			9×9		
ad	bc	ad-bc	ad	bc	ad-bc	ad	bc	ad-bc	ad	bc	ad-bc
36	36	0	49	49	0	64	64	0	81	81	0
84	84	0	112	112	0	144	144	0	共 1 組		
144	144	0	189	189	0	144	144	0			
216	216	0	112	112	0	324	324	0			
1296	1296	0	729	729	0	共 4 組					
共 16 組			共 9 組								

(五) 任一正方形內對角線數字相乘，除了加、減之外，還有什麼有趣的關係呢？
以下列 3×3、4×4、5×5 圖形為例：

1	2	3
2	4	6
3	6	9

$1 \times 6 \times 6 = 36$

黃色部分

$2 \times 2 \times 9 = 36$

綠色部分

$3 \times 4 \times 3 = 36$

粉紅色部分

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

$1 \times 8 \times 9 \times 8 = 576$

黃色部分

$2 \times 2 \times 12 \times 12 = 576$

藍色部分

$3 \times 4 \times 3 \times 16 = 576$

綠色部份

$4 \times 6 \times 6 \times 4 = 576$

粉紅色部分

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

$1 \times 10 \times 12 \times 12 \times 10 = 14400$

黃色部分

$2 \times 2 \times 15 \times 16 \times 15 = 14400$

藍色部分

$3 \times 4 \times 3 \times 20 \times 20 = 14400$

橘色部分

$4 \times 6 \times 6 \times 4 \times 25 = 14400$

綠色部分

$5 \times 8 \times 9 \times 8 \times 5 = 14400$

粉紅色部分

以此類推，任一正方形內，對稱軸數字相乘，和顏色相同的數字相乘積一定會相等。

二、透過中間數的使用，九九乘法表中有哪些有趣的規律？

(一) 用正方形框框放在乘法表上，四個頂點上的數與其中間數有什麼關係？

1. 我們先用框出一個 3x3 正方形，把四個頂點上的數之和除以中間數後發現其值為 4。

1	2	3
2	4	6
3	6	9

$$(1+3+3+9) \div 4 = 4$$

爲了瞭解這個關係是否存在不同奇格數的正方形，於是我們繼續完成 5x5、7x7、9x9 格的計算，四個頂點上的數之和除以中間數（如表 21）都會等於 4。

表 21 不同奇格數正方形四個頂點上的數之和除以中間數運算結果一覽表

3x3			5x5			7x7			9x9		
對角和	中間數	和/中	對角和	中間數	和/中	對角和	中間數	和/中	對角和	中間數	和/中
16	4	4	36	9	4	64	16	4	100	25	4
24	6	4	48	12	4	80	20	4	共 1 組		
32	8	4	60	15	4	96	24	4			
40	10	4	72	18	4	80	20	4			
256	64	4	196	49	4	144	36	4			
共 49 組			共 25 組			共 9 組					

2. 用正方形框放在乘法表上，在正方形四邊中點（可形成菱形），與中間數有什麼關係？

1	2	3
2	4	6
3	6	9

$$\text{菱形數之和} : 2+6+6+2=16$$

$$\text{中間數} : 4$$

$$\text{和} \div \text{中間數} : 16 \div 4 = 4$$

同樣地，我們逐一嘗試 5x5、7x7、9x9 的情況，並將其結果整理如表 22，從表 22 中我們明顯發現邊上中點之和與中間數之商恆等於 4。

表 22 3×3、5×5、7×7、9×9 正方格邊上中點之和、中間數以及兩者商之關係

	四邊的中點數字				和	中間數	和除以中間數
3×3	2	6	6	2	16	4	4
	3	8	9	4	24	6	4
	56	72	72	56	256	64	4
5×5	3	15	15	3	36	9	4
	4	18	20	6	48	12	4
	35	63	63	35	196	49	4
7×7	4	28	28	4	64	16	4
	5	32	35	8	80	20	4
	18	54	54	18	144	36	4
9×9	5	45	45	5	100	25	4

3. 以任何一數作中間數，改變正方形的角度與大小，四角和與中間數有何規律？

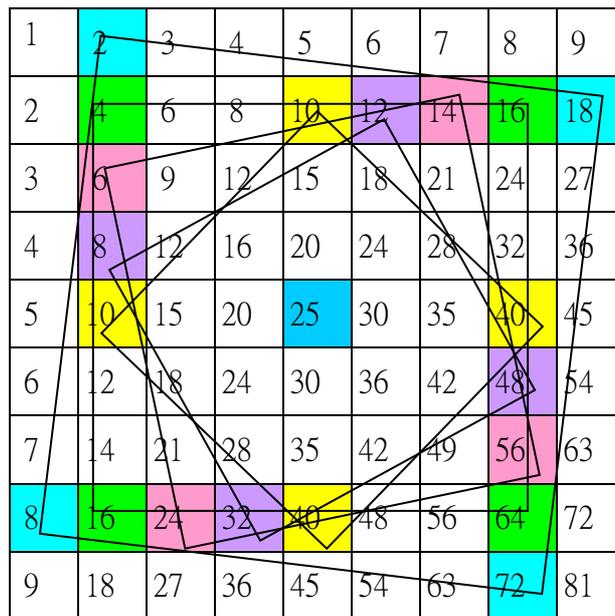


圖 3 不同角度、大小之正方形對應四角圖

以中間數 25 為例，如圖 3 所示：

黃色正方形四角和 $10+10+40+40=100$

紫色正方形四角和 $8+12+48+32=100$

橘色正方形四角和 $6+14+56+24=100$

綠色正方形四角和 $4+16+64+16=100$

藍色正方形四角和 $2+18+8+72=100$

$$100 \div 25 = 4$$

不管正方形是大或小，只要四個角加起來除以中間數，也都會是 4。

4..任選一個縱向和橫向都有對稱軸的對稱圖形，其對稱圖形和中間數有什麼關係？

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 4 縱軸和橫軸對稱圖

利用圖 4 的對稱圖形，可以拆成五個正方形或長方形，如圖 5：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 5 不同大小矩形四角對應圖

利用各種奇數x奇數的正方形和長方形的四角和都會是中間數的四倍。圖 5 中，以 25 為中間數的正方形和長方形有 5 個，因此圖 5 中的所有數字的和會是中間數的 20 倍。

5.奇數格存在上述規律，那偶數格呢？由於偶數格正方形的中間數會有四個（除了 2x2 沒有中間數），因此我們將中間的四數相加，再探討它們與四個頂點數之和的關係。

(1)、4x4 時，中間數為第二、三行和第二、三列四個數

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

四個頂點上的數之和： $1+4+4+16=25$
 中間四數之和： $4+6+6+9=25$
 兩者相除： $25\div 25=1$

(2)、6x6 時，中間數為第三、四行和第三、四列四個數

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

四個頂點上的數之和： $1+6+6+36=49$
 中間四數之和： $9+12+12+16=49$
 兩者相除： $49\div 49=1$

(3)、8x8 時，中間數為第四、五行和第四、五列四個數

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	10	12	14	16
3	6	9	12	15	18	21	24
4	8	12	16	20	24	28	32
5	10	15	20	25	30	35	40
6	12	18	24	30	36	42	48
7	14	21	28	35	42	49	56
8	16	24	32	40	48	56	64

四個頂點上的數之和： $1+8+8+64=81$
 中間四數之和： $16+20+20+25=81$
 兩者相除： $81\div 81=1$

我們把 4x4、6x6、8x8 所有的結果算出來後，整理得到表 23，從表 23 我們發現，只要 4x4、6x6……等的偶數格（不包含 2x2 因為無中間數），四個角相加一定會等於四個中間數的和。因此把四個頂點上的數之和除以四個中間數相加，其商永遠等於 1。

表 23 不同偶格數正方形四個頂點上的數之和除以中間數運算結果一覽表

4×4			6×6			8×8		
對角和	中間數和	和/中	對角和	中間數和	和/中	對角和	中間數和	和/中
25	25	1	49	49	1	81	81	1
35	35	1	63	63	1	99	99	1
45	45	1	77	77	1	99	99	1
55	55	1	91	91	1	121	121	1
						共 4 組		
225	225	1	169	169	1			
共 36 組			共 16 組					

(二) 用正方形框框放在乘法表上，在正方形邊上的數（狀似 O 型），其和與中間數是否有什麼關係？

1	2	3
2	4	6
3	6	9

O 形數之和： $1+2+3+6+9+6+3+2=32$

中間數：4

和 \div 中間數： $32\div 4=8$

因為所有 3×3 結果都是 4，我們逐一嘗試 5×5、7×7、9×9 的情況，並將結果整理如表 24：

表 24 3×3、5×5、7×7、9×9 正方格邊上數之和、中間數以及兩者商之關係

	四邊的數字和	中間數	和除以中間數
3×3	32	4	8
	48	6	8
5×5	512	64	8
	144	9	16
	192	12	16
7×7	784	49	16
	384	16	24
	480	20	24
9×9	864	36	24
	800	25	32

綜合上面的結果，我們得到下列的討論：

- (1) 在 3×3 中，四個邊上所有數字的和除以中間數等於 8。
- (2) 在 5×5 中，四個邊上數字的和除以中間數恆等於 16，剛好是 8×2 。
- (3) 在 7×7 中，四個邊上數字的和除以中間數恆等於 24，剛好是 8×3 。
- (4) 在 9×9 中，四個邊上數字的和除以中間數恆等於 32，剛好是 8×4 。

(三) 兩兩頂點交叉形成 X 型的數字和，跟中間數有什麼關係？

1	2	3
2	4	6
3	6	9

X 形數之和： $1+4+9+3+3=20$

中間數：4

和 \div 中間數： $20\div 4=5$

結果：(1) 在 3×3 中，我們發現兩兩頂點交叉形成 X 型的數字和除以中間數恆等於 5。

(2) 在 5×5 中，我們發現兩兩頂點交叉形成 X 型的數字和除以中間數恆等於 9，也就是 $5+4$ 。

(3) 在 7×7 中，我們發現兩兩頂點交叉形成 X 型的數字和除以中間數恆等於 13，也就是 $9+4$ 。

(4) 在 9×9 中，我們發現兩兩頂點交叉形成 X 型的數字和除以中間數恆等於 17，也就是 $13+4$ 。

表 25 X 型的數字和跟中間數關係一覽表

	X 型的數字和	中間數	和除以中間數
3x3	20	4	5
	30	6	5
	320	64	5
5x5	81	9	9
	108	12	9
	441	49	9
7x7	208	16	13
	260	20	13
	468	36	13
9x9	425	25	17

(四) 寫成字型 H、I 的數字和，跟中間數有什麼關係？

1	2	3
2	4	6
3	6	9

$$(1+2+3+4+3+6+9) \div 4=7$$

1	2	3
2	4	6
3	6	9

$$(1+2+3+4+3+6+9) \div 4=7$$

表 26 H、I 數字和與中間數關係

	H 型的數字和	中間數	和除以中間數		I 型的數字和	中間數	和除以中間數
3x3	28	4	7	3x3	28	4	7
	42	6	7		42	6	7
	448	64	7		448	64	7
5x5	117	9	13	5x5	117	9	13
	156	12	13		156	12	13
	637	49	13		637	49	13
7x7	304	16	19	7x7	304	16	19
	380	20	19		380	20	19
	684	36	19		684	36	19
9x9	625	25	25	9x9	625	25	25

- 結果：(1) 在 3x3 中，發現 H、I 的數字和除以中間數恆等於 7。
 (2) 在 5x5 中，發現 H、I 的數字和除以中間數恆等於 13，就是 7+6。
 (3) 在 7x7 中，發現 H、I 的數字和除以中間數恆等於 19，就是 13+6。
 (4) 在 9x9 中，發現 H、I 的數字和除以中間數恆等於 25，就是 19+6。

(五) 如果把字型限制拿掉，以對稱圖形來看，會發現哪些有趣的規律？

1. 在對稱軸上，以乘法表中間數 25 為例，找出線對稱兩個數：

(1) 當對稱兩數在對角時

A、3x3 時

16	20	24
20	25	30
24	30	36

綠色： $|36 + 16 - 25 \times 2| = 2 = 2 \times 1$

黃色： $|24 + 24 - 25 \times 2| = 2 = 2 \times 1$

B、5x5 時

9	12	15	18	21
12	16	20	24	28
15	20	25	30	35
18	24	30	36	42
21	28	35	42	49

綠色： $|9 + 49 - 25 \times 2| = 8 = 2 \times 4$

黃色： $|21 + 21 - 25 \times 2| = 8 = 2 \times 4$

C、7×7 時

4	6	8	10	12	14	16
6	9	12	15	18	21	24
8	12	16	20	24	28	32
10	15	20	25	30	35	40
12	18	24	30	36	42	48
14	21	28	35	42	49	56
16	24	32	40	48	56	64

綠色： $|4 + 64 - 25 \times 2| = 18 = 2 \times 9$

黃色： $|16 + 16 - 25 \times 2| = 18 = 2 \times 9$

D、9×9 時

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

綠色： $|1 + 81 - 25 \times 2| = 32 = 2 \times 16$

黃色： $|9 + 9 - 25 \times 2| = 32 = 2 \times 16$

從上圖我們發現以 25 為中間數找出兩對稱點時，3×3、5×5、7×7 和 9×9 都有一定的規律：

3×3 時，對稱兩數相加，減去中間數的兩倍，結果為 2×1。

5×5 時，對稱兩數相加，減去中間數的兩倍，結果為 2×4。

7×7 時，對稱兩數相加，減去中間數的兩倍，結果為 2×9。

9×9 時，對稱兩數相加，減去中間數的兩倍，結果為 2×16。

乘數都是完全平方數。

(2) 對稱兩數呈垂直線或水平線：

A、3×3 時

16	20	24
20	25	30
24	30	36

綠色： $|20 + 30 - 25 \times 2| = 0$

黃色： $|20+30-25\times 2|=0$

B、5×5 時

9	12	15	18	21
12	16	20	24	28
15	20	25	30	35
18	24	30	36	42
21	28	35	42	49

綠色： $|15+35-25\times 2|=0$

黃色： $|15+35-25\times 2|=0$

以此類推，7×7、9×9 相減後都會等於 0。

(3) 對稱兩數同在一直線上，但排除 (1)、(2) 的位置：

A、5×5 時

9	12	15	18	21
12	16	20	24	28
15	20	25	30	35
18	24	30	36	42
21	28	35	42	49

綠色： $|18+28-25\times 2|=4$ ，即 4×1

黃色： $|42+12-25\times 2|=4$ ，即 4×1

B、7×7 時

4	6	8	10	12	14	16
6	9	12	15	18	21	24
8	12	16	20	24	28	32
10	15	20	25	30	35	40
12	18	24	30	36	42	48
14	21	28	35	42	49	56
16	24	32	40	48	56	64

淺藍色： $|8+48-25\times 2|=6$ ，即 6×1

紫色： $|12+32-25\times 2|=6$ ，即 6×1

綠色： $|14+24-25\times 2|=12$ ，即 6×2

黃色： $|6+56-25\times 2|=12$ ，即 6×2

C、9x9 時

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

橘色： $|4 + 54 - 25 \times 2| = 8$ ，即 8×1

藍色： $|6 + 36 - 25 \times 2| = 8$ ，即 8×1

淺藍色： $|3 + 63 - 25 \times 2| = 16$ ，即 8×2

紫色： $|7 + 27 - 25 \times 2| = 16$ ，即 8×2

綠色： $|8 + 18 - 25 \times 2| = 24$ ，即 8×3

黃色： $|2 + 72 - 25 \times 2| = 24$ ，即 8×3

由上圖可知：對稱兩數相加，減去中間數的兩倍，在 5×5 結果為 4×1 ，在 7×7 結果為 6×1 、 6×2 ，在 9×9 結果為 8×1 、 8×2 、 8×3 。

(六) 任選一條直線，將它當作對稱軸，產生的任意對稱圖形與對稱軸之間，會產生什麼有趣的規律呢？

1. 在對稱軸的兩邊畫上線對稱圖形數字和，可以被對稱軸的第一個數整除。

(1) 以奇數格來說

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 6 各種不同大小 M 圖形

紅色 M 型： $(20+16+25+24+30) \div 5 = 23$

橘色 M 型： $(15+12+9+16+25+24+21+28+35) \div 5 = 37$

黃色 M 型： $(10+8+6+4+9+16+25+24+21+16+24+32+40) \div 5 = 47$

綠色 M 型： $(5+4+3+2+1+4+9+16+25+24+21+16+9+18+27+36+45) \div 5 = 53$

從圖 6 發現：當把不同的 M 型數字相加後，除以對稱軸的第一個數，都可被整除。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 7 奇數格任意製作之線對稱圖形

以藍色為對稱軸，第一個數是 6

黃色的和 336 $336 \div 6 = 56$

紫色的和 264 $264 \div 6 = 44$

從圖 7 發現，任意線對稱圖形的數字和，除以對稱軸的第一個數，都可被整除。

(2) 以偶數格來說

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 8 偶數格任意製作之線對稱圖形

因為偶數格無法選定一對稱軸，所以以兩藍色軸為對稱軸，兩軸的第一個數是 5、6， $5+6=11$ ，因為 5 和 6 的一半是 5.5，只要能被 5.5 整除就一定可以被 11 整除。

黃色的和 286 $286 \div 11 = 26$

紫色的和 220 $220 \div 11 = 20$

從圖 8 發現，偶數格任意線對稱圖形的數字和，除以對稱軸起始的兩個數，都會整除。

2..任選一個點對稱圖形，對稱圖形和對稱點有什麼關係？

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 9 奇數格點對稱之風車圖形

$$\text{黃色} : (12+15+20) + (18+15+20) + (42+35+30) + (28+35+30) = 300$$

$$300 \div 25 = 12 \text{ 即 } 3 \times 4$$

$$\text{黃色+綠色} : 300 + (8+10) + (12+10) + (48+40) + (32+40) = 500$$

$$500 \div 25 = 20 \text{ 即 } 5 \times 4$$

$$\text{黃色+綠色+藍色} : 500 + (4+5) + (6+5) + (54+45) + (36+45) = 700$$

$$700 \div 25 = 28 \text{ 即 } 7 \times 4$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 10 偶數格點對稱之風車圖形

$$\text{黃色} : (9+12+15+20) + (21+18+15+20) + (49+42+35+30) + (21+28+35+30) = 400$$

$$400 \div 25 = 16 \text{ 即 } 4 \times 4$$

$$\text{黃色+綠色} : 400 + (4+6) + (14+16) + (56+64) + (16+24) = 600$$

$$600 \div 25 = 24 \text{ 即 } 6 \times 4$$

$$\text{黃色+綠色+藍色} : 600 + (1+2) + (8+9) + (72+81) + (9+18) = 800$$

$$800 \div 25 = 32 \text{ 即 } 8 \times 4$$

結果：只要是點對稱圖形的數字和，除以對稱點，都能整除；我們還發現，如風車圖形所示，其整除結果都會是風車圖形中一個葉片格數的 4 倍。

柒、結論

一、九九乘法表用 2×2 、 3×3 、 4×4 …… 9×9 等不同大小正方形框起來會出現：

(一) 正方形兩對角數之和：

1. 中間數乘以 4。

2. 以中間數找出神秘 T 型軸，對應的兩數相乘。

(二) 正方形兩對角和相減，只要把格數減去 1，再將得到的數平方，就是 $(a+d) - (b+c)$ 的結果。

(三) 正方形兩對角乘積相加會產生：

1. 可以找到對稱軸除以 2，即是平方數。

2. 從平方數找出：直行皆為等差數列，斜線呈倍數遞增，橫列為有規律的遞增。

(四) 正方形兩對角乘積相減恆等於 0。

(五) 任一正方形內，對稱軸數字相乘，和顏色相同的數字相乘積一定會相等。

二、透過中間數的使用，九九乘法表有趣的玩法：

(一) 方形四角和與中間數：

1. 奇數格四個頂點相加的和除以中間數，永遠會等於 4。

2. 邊上中點之和（狀似菱形）與中間數之商恆等於 4。

3. 不管正方形是大或小，只要四個角加起來除以中間數，也都會是 4。

4. 利用各種奇數 \times 奇數的正方形和長方形的四角和都會是中間數的 4 倍。

5. 偶數格四個頂點相加的和除以四個中間數和，永遠等於 1。

(二) O 型與中間數

1. 在 3×3 中，因為四個頂點的和除以中間數等於 4，四個邊的中間數的和除以中間數也等於 4，所以繞成一個 O 型的數字和除以中間數恆等於 8。

2. 在 5×5 中，數字和除以中間數恆等於 16。

3. 在 7×7 中，數字和除以中間數恆等於 24。

4. 在 9×9 中，數字和除以中間數恆等於 32。

(三) X 型與中間數

1. 在 3×3 中，X 型的數字和除以中間數恆等於 5。

2. 在 5×5 中，X 型的數字和除以中間數恆等於 9，也就是 $5+4$ 。

3. 在 7×7 中，X 型的數字和除以中間數恆等於 13，也就是 $9+4$ 。

4. 在 9×9 中，X 型的數字和除以中間數恆等於 17，也就是 $13+4$ 。

(四) H、I 型與中間數

1. 在 3×3 中，H、I 的數字和除以中間數恆等於 7。

- 2.在 5×5 中，H、I 的數字和除以中間數恆等於 13，也就是 $7+6$ 。
- 3.在 7×7 中，H、I 的數字和除以中間數恆等於 19，也就是 $13+6$ 。
- 4.在 9×9 中，H、I 的數字和除以中間數恆等於 25，也就是 $19+6$ 。

(五) 線對稱時

1.當中間數在對稱軸時，

3×3 時，對稱兩數相加減去中間數的 2 倍，結果為 2×1 。

5×5 時，對稱兩數相加減去中間數的 2 倍，結果為 2×4 。

7×7 時，對稱兩數相加減去中間數的 2 倍，結果為 2×9 。

9×9 時，對稱兩數相加減去中間數的 2 倍，結果為 2×16 。

而乘數都是完全平方數。

2.對稱兩數呈垂直線或水平線，只要將兩數相加，減去中間數的兩倍，都等於 0。

3.通過對稱點的直線

在 5×5 有兩組，乘積減去中間數的兩倍結果均為 4，即 4×1 。

在 7×7 有四組，乘積減去中間數的兩倍是 6、12，即 6×1 、 6×2 。

在 9×9 有六組，乘積減去中間數的兩倍是 8、16、24，即 8×1 、 8×2 、 8×3 。

(六) 任選一條直線，將它當作對稱軸，任意畫一對稱圖形

1.線對稱

(1) 奇數格時，任意線對稱圖形數字和，除以對稱軸的第一個數，都會整除。

(2) 偶數格時，任意線對稱圖形數字和，除以對稱軸起始的兩個數，都會整除。

2.點對稱圖形的數字和，除以對稱點，都可整除，其結果會是風車圖形中一個葉片格數的 4 倍。

捌、心得

沒想到由一個小問題出發，可以發現多種不同的規律，有的有一定的順序性，有的則是倍數變化，有的能創造出一張有規律的新表格，這都是出乎我們意料之外的。

一直以爲九九乘法表是制式的、無趣的，沒想到試著去研究之後，每發現一則新的規則，就會迫不及待與同學們分享，其中的樂趣真令人大呼過癮啊！九九乘法表中竟然蘊藏了許多神秘有趣的數字組合、對稱關係，每抽絲剝繭打開一層面紗，讓我們獲得了無比的成就感。

我們還發明「九九神功」的紙牌遊戲，讓整個研究過程充滿樂趣！

玖、參考資料

國民小學數學課本第八冊第七單元「四則運算」（康軒版）。

國民小學數學課本第九冊第六單元「因數與倍數」（康軒版）。

國民小學數學課本第九冊第七單元「線對稱」（康軒版）。

王登傳（民 92），規律性在解題中的應用，高雄市：前程。

評 語

080417 來玩九九乘法表

由九九乘法表出發，藉由團隊之合作共同找出了許多有趣的規律。例如任意正方形四對角數字和與中間數的關係，及和、差、積等之關係。本作品之深度雖然與其它得獎作品相較稍嫌不足。但是在與評審之應對中，其表現團隊精神值得嘉評。