De la boleta que cau en un got d'aigua al moviment d'un cos en un fluid viscós[1,2].

Un experiment habitual que podem reproduir en qualsevol nivell educatiu és el de la boleta o qualsevol altre cos que cau en un got d'aigua o en un recipient de forma variable com, per exemple, cònic o cilíndric. Podem modificar també el material de la boleta o la densitat del líquid i fins i tot afegir complexitat com la viscositat. Estem doncs davant d'un problema de llarg abast que GeoGebra ens permet visualitzar de diferents maneres segons l'edat de l'alumnat a qui va adreçat utilitzant les eines i les finestres que convinguin en cada cas. Cal tenir en compte, a més, que es tracta d'un experiment pluridisciplinari donat que la base teòrica és el principi d'Arquímedes[3] segons el qual un objecte que cau en un líquid experimenta una força que s'hi oposa, anomenada empenyiment, que és igual al pes del volum de líquid que l'objecte desallotja.

Utilitzarem les unitats del S.I. però haurem de tenir en compte que les dimensions dels objectes són en cm i cal convertir-les a m.

Començarem per la part més tècnica estudiant les forces que intervenen en el problema que són:

- El pes de la boleta suspesa en l'aire, P:
  densitat · volum · acceleració de la gravetat (g)
- La força d'empenyiment, E:
  densitat del líquid · volum desallotjat · acceleració de la gravetat (g)

La força total que actua sobre la boleta serà doncs:

$$\mathbf{F = P - E = \rho\, V\, g - d\, V_e\, g} \quad (1)$$

Aquí és on podríem introduir la resistència del líquid al moviment deguda a la seva viscositat. Aquest efecte és el que fa que la velocitat d'un paracaigudista no augmenti indefinidament sinó que tendeix a un valor constant relacionat amb la viscositat de l'aire[4].

La força s'anul·la si:

$$V_e = \frac{r\,V}{d}$$

Per simplificar el problema farem servir una boleta (forma esfèrica) que cau en un got d'aigua (forma cilíndrica). La boleta serà de vidre, de densitat 2.500 kg/m^3, i la densitat de l'aigua que ja sabem que és de 1.000 kg/m^3. Tot això implica que la boleta s'enfonsarà en el aigua però, com ja hem dit, tots aquests paràmetres que hem esmentat els podem canviar i GeoGebra ens ho permet fer de moltes maneres.

Com que la boleta es va enfonsant, ens cal saber el volum d'un casquet esfèric[5]. Per això haurem de tenir en compte la variable x' que mesura la distància entre l'extrem inferior de la boleta i la superfície de l'aigua:

---

[1] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/dinamica/fluidos/stokes/stokes.html
[2] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/stokes1/stokes1.htm
[3] https://ca.wikipedia.org/wiki/Principi_d%27Arquimedes
[4] https://ca.wikipedia.org/wiki/Resist%C3%A8ncia_aerodin%C3%A0mica
[5] https://ca.wikipedia.org/wiki/Casquet_esf%C3%A8ric

$$V_d = \frac{\pi \cdot x'^2}{3}\left(3R - x'\right)$$

Considerem ara l'altura inicial de l'aigua h_0 en el got, que suposarem que és un cilindre de radi r, l'altura al llarg de la caiguda h i la distància x del punt inferior de l'esfera a la base del got d'aigua. Tenim que:

$$h = x + x'$$

i la relació entre les variables que és la que hi ha entre els volums:

$$\pi \cdot r^2 \cdot h_0 + \frac{\pi \cdot x'^2}{3}\left(3R - x'\right) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot (x + x')$$

Aquestes expressions ens permeten trobar x en funció de x'. A la inversa ens donaria una equació cúbica amb una expressió molt carregosa com a solució. Això implica que, per reproduir el procés amb GeoGebra haurem de crear un punt lliscant amb la variable x' de manera a poder determinar les variables x i h amb l'expressió:

$$x = -\frac{x'^3}{3 \cdot r^2} + \frac{R \cdot x'^2}{r^2} - x' + h_0$$

i fer la construcció de la figura.

El que costarà més de reproduir és l'evolució temporal del procés donat que cal resoldre una equació diferencial, donada per la segona llei de Newton:

$$F = m \cdot \frac{d^2y}{dt} = m \cdot \ddot{y}$$

on m és la massa de la boleta i y la posició del centre de la boleta que n'és també el centre de gravetat. La força F ve donada per l'expressió que hem vist anteriorment. L'equació seria del tipus:

$$y'' = P(y)$$

on P és un polinomi de tercer grau en y.

El problema seria més assequible si féssim servir un cub o un cilindre en lloc de la boleta. En aquests casos, pel volum de líquid desallotjat, tindríem les expressions:

$$V_{cub} = a^2 \cdot x'$$

$$V_{cil} = \pi \cdot R^2 \cdot x'$$

on a seria l'aresta del cub, R el radi del cilindre i x' la part de l'aresta del cub o de l'altura del cilindre que s'ha enfonsat. Ara bé, la superfície de contacte amb l'aigua en ambdós casos faria que els resultats no s'ajustessin massa a la realitat.

En el cas del cub, tindríem:

$$\pi \cdot r^2 \cdot h_0 + a^2 \cdot x' = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot (x + x') \quad (2)$$

A més, si y és la distància del centre de gravetat del cub a la base del got d'aigua, és clar que:

$$y = \frac{a}{2} + x$$

donat que x és la distància de la base inferior del cub a la base del got d'aigua.

Si aïllem x' de l'expressió (2) per expressar-ho en funció de x, ens queda (és el que era difícil de fer amb la boleta de forma esfèrica):

$$x' = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \left(h_0 - x\right)}{\left(\pi \cdot r^2 - a^2\right)} = c_1 + c_2 \cdot x$$

on c_1 i c_2 són constants del problema:

$$c_1 = \frac{p \cdot r^2 \cdot h_0}{\left(p \cdot r^2 - a^2\right)}$$

$$c_2 = \frac{-p \cdot r^2}{\left(p \cdot r^2 - a^2\right)}$$

on c_1 té dimensió L i c_2 no té dimensió.

L'equació diferencial queda així:

$$y'' = \frac{r \cdot a^3 \cdot g - d \cdot a^2 \cdot x \cdot g}{m} = \frac{r \cdot a^3 \cdot g - d \cdot a^2 \cdot g \cdot \left(c_1 + c_2 \cdot x\right)}{m} =$$

$$= \frac{r \cdot a^3 \cdot g - d \cdot a^2 \cdot g \cdot \left(c_1 + c_2 \cdot \left(y - \frac{a}{2}\right)\right)}{m}$$

$$= \frac{r \cdot a^3 \cdot g - d \cdot a^2 \cdot g \cdot \left(c_2 \cdot y - c_2 \cdot \frac{a}{2} + c_1\right)}{m} = C_1 + C_2 \cdot y$$

on, de nou, C_1 i C_2 són constants del problema que podem introduir en el programa fent servir les expressions corresponents:

$$C_1 = \frac{r \cdot a^3 - d \cdot a^2 \cdot c_1 + \frac{1}{2} d \cdot a^3 \cdot c_2}{m} \cdot g$$

$$C_2 = \frac{-d \cdot a^2 \cdot c_2}{m} \cdot g$$

de dimensions respectives LT^{-2} i T^{-2} i on $m = \rho a^3$. El seu quocient té doncs dimensió L.
La solució de l'equació ve donada per l'expressió obtinguda amb Wolfram Alpha:

$$y(t) = A \cdot e^{\sqrt{C_2} \cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{C_2} \cdot t} - \frac{C_1}{C_2}$$

on els exponents no tenen dimensió i els coeficients i el terme independent té dimensió L.
Si prenem com a posició inicial:

$$y(0) = h_0 + \frac{a}{2}$$

i $y'(0) = v_0$, que ve donada pel temps que ha estat caient el cub, resulta que:

$$\begin{cases} A + B = h_0 + \frac{a}{2} + \frac{C_1}{C_2} \\ A \cdot \sqrt{C_2} - B \cdot \sqrt{C_2} = v_0 \end{cases}$$

i, per tant:

$$A = \frac{1}{2}\left(h_0 + \frac{a}{2} + \frac{C_1}{C_2} + \frac{v_0}{\sqrt{C_2}}\right)$$

$$B = \frac{1}{2}\left(h_0 + \frac{a}{2} + \frac{C_1}{C_2} - \frac{v_0}{\sqrt{C_2}}\right)$$

Cal tenir en compte que no hem fet cap consideració sobre la hidrodinàmica de manera que és una visió molt simplificada del problema.
A més, per trobar l'instant de temps en el que s'anul·la l'acceleració, tenim que:

$$C_1 + C_2 y = 0 \rightarrow y = -\frac{C_1}{C_2}$$

$$-\frac{C_1}{C_2} = A \cdot e^{\sqrt{C_2}\cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{C_2}\cdot t} - \frac{C_1}{C_2} \rightarrow A \cdot e^{\sqrt{C_2}\cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{C_2}\cdot t} = 0 \rightarrow$$

$$A \cdot e^{2\sqrt{C_2}t} = -B \rightarrow t = \frac{\ln\left(-\frac{B}{A}\right)}{2\sqrt{C_2}}$$

Malgrat la complexitat, les expressions són fàcils d'introduir en el programa i el temps serà un punt lliscant que ens controlarà la posició del centre del cub.
Si fem caure un cilindre de radi R i altura h, les expressions serien idèntiques canviant a^3 per $\pi \cdot R^2 \cdot h$ i a^2 per $\pi \cdot R^2$.
Cal tenir en compte, però, que les dades de longitud són en cm donades les dimensions del got i del cub. Això planteja alguns problemes a l'hora de fer els càlculs i escriure les expressions perquè les forces es donen en Newtons i les longituds en cm. A més no hem d'oblidar el temps inicial, des de que comença a caure, ni la direcció del moviment donada per l'acceleració de la gravetat per introduir les expressions en l'aplicació.