Ευθεία Euler

Το περίκεντρο O, το κέντρο βάρους G και το ορθόκεντρο H τριγώνου είναι συνευθειακά σημεία και ορίζουν την ευθεία Euler

Για τα τρία αυτά σημεία ισχύει HG = 2GO

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Περιγράφουμε τον κύκλο O στο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το αντιδιαμετρικό του Γ.

Φέρνουμε την Διάμεσο AA_1 και το ύψος AA_2

Επειδή η ΓΔ είναι διάμετρος θα είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ άρα $\Delta B // AA_2$

Για τον ίδιο λόγο θα είναι $\Delta A // BB_2$.

Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Φέρνουμε την OA_1

Στο τρίγωνο ΓΔΒ τα A_1,O είναι μέσα των ΓΒ, ΓΔ αντίστοιχα άρα

$OA_1 = \frac{1}{2}B\Delta = \frac{1}{2}AH$ οπότε

$$\frac{OA_1}{AH} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Το G είναι Βαρύκεντρο άρα $\frac{GA_1}{GA} = \frac{1}{2}$ (2)

$OA_1 // AA_2$ ως κοινές κάθετες στην ευθεία ΒΓ άρα $O\hat{A_1}G = H\hat{A}G$ (3) ως εντός εναλλάξ

Από τις σχέσεις (1) (2) (3) προκύπτει ότι τα τρίγωνα GAH και GOA_1 έχουν δυο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες .

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια επομένως θα έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες μία προς μία .

Έτσι θα έχουμε $A_1\hat{G}O = A\hat{G}H$ ΄

Όμως η AGA_1 είναι ευθεία άρα οι GO, GH θα είναι αντικείμενες , δηλαδή τα O,G, H είναι συνευθειακά και μάλιστα GH=2GO.