

Beispiele: Ein Kreis durch p^2 und $\frac{1}{p}$ wird unter der Wurzelabbildung $z \mapsto \sqrt{z^2 + 1}$ zur Cassini-Lemniskate. Die Kreise durch $p, -p, z$ bzw. durch $\frac{1}{p}, \frac{1}{-p}, z$ schneiden sich unter konstantem Winkel. Liegt der Mittelpunkt des Kreises auf der p -Achse, so berühren sich die Kreise, liegt er auf der z -Achse, so sind sie orthogonal. Liegt der Mittelpunkt in der Mitte dazwischen, erhält man die Bernoulli-Lemniskate. Allgemein gilt: ist $\varphi = \arg(p^2) = 2 \cdot \arg(p)$ und ist ψ der Fasskreiswinkel des Kreises durch p^2 und $\frac{1}{p}$, so schneiden sich die Kreise durch $p, -p$ bzw. $\frac{1}{p}, \frac{1}{-p}$ auf der Cassinikurve unter dem Winkel $\varphi - \psi$. Die Pole der "Geraden" $\lambda g_1 + \mu g_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liegen auf der Cassini-Lemniskate $g_1 \wedge g_2(h, h) = 0$, woraus sich das Symbol $\wedge_h$ erklärt.

Sonderlagen:

1. Sind g_1 und g_2 zwei hyperbolische Kreisbündel mit 4 verschiedenen konzyklischen Polen, bzw. ein hyperbolisches und ein elliptisches Kreisbündel, deren Pole spiegelbildlich auf zwei orthogonalen Kreise liegen, so erhält man zwei orthogonale Kreise als Berührt.
2. Fallen Pole zusammen, bzw. ist eines der Kreisbündel parabolisch, so zerfällt die Quartik ebenfalls in zwei Kreise oder einen Punkt und einen Kreis.

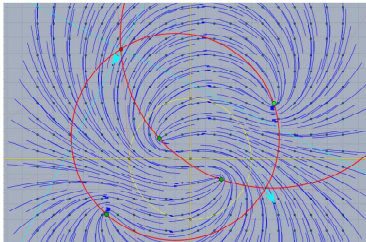
Bemerkungen: Die Namensgebung für die Formen $g_1 \wedge g_2$ ist schwierig: *Cassiniquartik* oder *-Form* trifft nicht zu, weil auch bizirkulare Quartiken dazugehören, die in Kreise zerfallen.

Die Formen repräsentieren die reell-2-dimensionalen Unterräume des Geradenraums $\mathcal{G}$. Die Quartiken $g_1 \wedge g_2(h, h) = 0$ sind die möbiusgeometrische Verallgemeinerung der Peripheriewinkelkreise in der euklidischen Ebene. Für zwei "Geraden"-Bündel in der elliptischen, bzw. in der hyperbolischen Ebene sind die Orte, in denen sich die Geraden unter einem konstanten Winkel schneiden, keine Kreise, sondern eben Quartiken des genannten Typs.

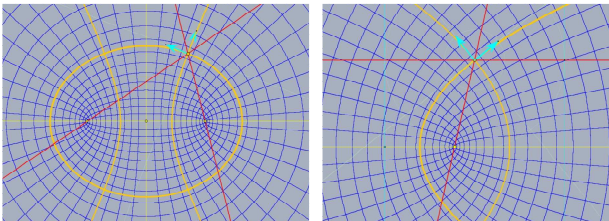
6 Lineare Vektorfelder

Wie in Abschnitt 1 erwähnt, können in $\mathcal{G}$ auf einfache Weise Vektorfelder erklärt werden: ist in einem euklidischen KOS eine analytische Funktion $f(z)$ gegeben, so wird durch $z \mapsto h_f(z) := \frac{1}{f(z)} h(f(z))$ ein analytisches Vektorfeld erklärt, wegen $h_f'(z)^2 < 0$ für alle z mit $f'(z) \neq 0$ sind die Berührgeradenvektoren $h_f(z)$ tangential an die durch f gegebene Funktion.

Zu $g \in \mathcal{G}$ sei das *lineare* Vektorfeld $\{h \in \mathcal{G} \mid h^2 = 0, g \cdot h = 1\}$ erklärt. Beispiel 1: Wir wählen in einem euklidischen KOS $g = g_0$. Eine analytische Funktion $f(z)$ ist ein Integral des Vektorfeldes $g_0 \cdot h = 1$, wenn $g_0 \cdot \frac{1}{f(z)} h(f(z)) = 1$ gilt, d.h. wenn f die DGL $f' = f$ erfüllt. Zur Lösung $f(z) = \exp(z)$ gehört das aus den Ursprungsgeraden und den dazu orthogonalen konzentrischen Kreise gebildete Kurvennetz. Zu dem durch $w \cdot g_0$ erklärten linearen Vektorfeld gehören als Lösung die durch $\exp(w \cdot z)$ gegebenen Loxodrome.



Die Nullstellen eines quadratischen Vektorfeldes nennen wir *Brennpunkte*. Dies erklärt sich aus der bekannten Situation konfokaler Kegelschnitte: Die Funktion $f(z) = \sin(z)$ genügt der DGL $(f'(z))^2 = (1 - \sin^2(z)) \cdot (1 + \sin^2(z))$. Die *Brennpunkte* sind $\pm i$ und (doppelt zählend) ∞ . Bekanntlich sind die Tangenten die Winkelhalbierenden der Brennstreahlen! Konfokale Parabeln ergeben sich mit $f(z) = z^2$ und den *Brennpunkten* 0 und ∞ (dreifach zählend).

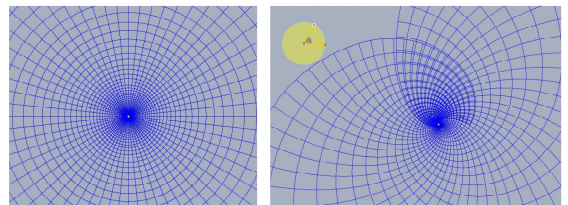


Von welchem Typ sind die Integralkurven im Falle von vier verschiedenen Brennpunkten? Bei geeigneter Normierung von S sollte es sich um geschlossene Kurven handeln: elliptische Funktionen sind doppelt periodisch. Wir haben auf dem umfangreichen Feld *Spezieller Kurven* keine Kandidaten gefunden! Ist die Lage der Brennpunkte jedoch von dem in Abschnitt 4 beschriebenen besonderen Typ, so findet sich folgende möbiusgeometrische Verallgemeinerung der obigen Beispiele:

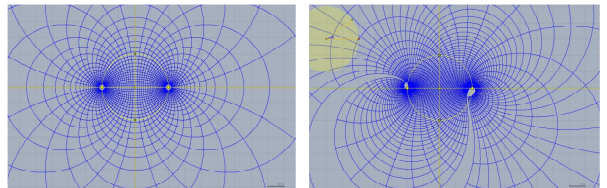
Wenn die absolute Invariante $J = J(e_1, e_2, e_3, e_4)$ der vier Brennpunkte reell ist, so sind bei geeigneter Normierung der selbstadjungierten Abbildung S die Integralkurven des quadratischen Vektorfeldes *konfokale bizirkulare Quartiken*.

Durch jeden von den Brennpunkten verschiedenen Punkt gehen zwei orthogonale Quartiken. Sind die vier Brennpunkte verschieden, so erhält man für $J \geq 0$ zweiteilige, für $J \leq 0$ einteilige Quartiken; der Sonderfall $J = 0$ ergibt 2-teilige und diagonal dazu (45°) einteilige Quartiken.

Der Tetraederfall $J = -1$ erweist sich als ein Netz von ziemlich symmetrischen einteiligen Quartiken, die sich unter Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$ und orthogonal dazu schneiden.



Allgemein: sind in einem euklidischen KOS a und b die Pole des zu $g \in \mathcal{G}$ gehörenden linearen Vektorfeldes, so ist ein Integral vom Typ $f(z) = \frac{a \cdot S + b \cdot id}{\exp(w \cdot z)}$. Die Bilder zeigen dies für die Pole ± 1 . Wir erinnern daran, dass die Integralkurven linearer Vektorfelder die Bahnkurven von Einparameteruntergruppen sind.

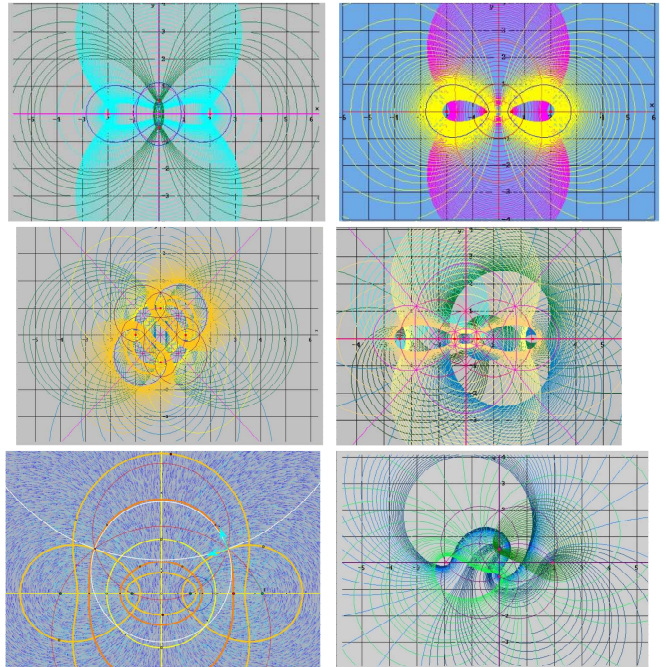


7 Quadratische Vektorfelder

Eine selbstadjungierte Abbildung $S : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, für die demnach $Sg \cdot \tilde{g} = g \cdot S\tilde{g}$ gilt, erzeugt ein quadratisches Vektorfeld $Sg \cdot h = 1$ in der Möbiusebene. Für ein analytisches Integral $f(z)$ in einem euklidischen Koordinatensystem führt das mit $z \mapsto h_f(z) := \frac{1}{f(z)} h(f(z))$ auf eine elliptische DGL:

$$(f'(z))^2 = (f(z) - e_1) \cdot (f(z) - e_2) \cdot (f(z) - e_3) \cdot (f(z) - e_4)$$

Sind die 4 Nullstellen verschieden, ist die Lösung f eine elliptische Funktion. $\mathcal{G}$ ist komplex 3-dimensional, daher kann man mit geeigneten Faktoren $a, b \in \mathbb{C}$ erreichen: $a \cdot S + b \cdot id = g_1 \vee g_2$ mit dem symmetrischen Produkt $g_1 \vee g_2(\tilde{g}, \tilde{g}) = \frac{1}{2} \left((g_1 \cdot \tilde{g})(g_2 \cdot \tilde{g}) + (g_2 \cdot \tilde{g})(g_1 \cdot \tilde{g}) \right)$. Die beiden Infinitesimalen besitzen dann die oben genannten Nullstellen als Pole, bei geeigneter Paarbildung. Dies ist i.d.R. auf 3 Weisen möglich. Die Faktoren können so gewählt werden, dass g_1 und g_2 Kreisbündel sind. Für das Vektorfeld $g_1 \vee g_2(h, h) = 1$ hat das die einfache geometrische Folge: die Tangentialvektoren sind Winkelhalbierende der beiden linearen Vektorfelder $g_1 \cdot h = 1$ und $g_2 \cdot h = 1$, die Integralkurven durch einen Punkt p halbieren einen der beiden Winkel, die von den beiden Bündelkreisen durch p gebildet werden.



Sind die Brennpunkte konzyklisch, so besitzt das Netz der konfokalen zweiteiligen Quartiken 4 Symmetriekreise. Zu den beiden orthogonalen Scharen von Quartiken gehört je eine Cassini-Lemniskate (hell-orange). Die Kurven werden eingehüllt von *doppelt-berührenden* Kreisen, im Folgenden kurz *DB-Kreise* genannt. Die zweiteiligen Quartiken besitzen 4 solcher Scharen von DB-Kreisen, diese sind jeweils orthogonal zu einem der Symmetriekreise. Die Cassini-Quartiken sind mit Hilfe der Wurzelabbildung "konstruiert", die etwas dunklere Quartik mit Hilfe eines *Leitkreises* (blau). Auch diese Leitkreis-konstruktion ist eine möbiusgeometrische Verallgemeinerung der Kegelschnittkonstruktion mittels Leitgerade oder Leitkreis. Spiegelt man einen der Brennpunkte an den DB-Kreisen, so liegen die Spiegelpunkte auf den Leitkreisen, im zweiteiligen Falle gibt es also 4 Leitkreise zu einem ausgewählten Brennpunkt. Die Eigenschaften einzelner bizirkularer Quartiken werden im Abschnitt 9 behandelt.

8 Bizirkulare Quartiken und quadratische Vektorfelder

Ein durch eine selbstadjungierte Abbildung S bestimmtes quadratisches Vektorfeld besitzt bei geeigneter Normierung genau dann hermitesche Wurzeln H mit $H^2 = S$, wenn die absolute Invariante $J = J(e_1, e_2, e_3, e_4)$ der 4 Brennpunkte reell ist. Die Integralkurven bestehen dann aus der Schar konfokaler bizirkularer Quartiken, welche $Hh \cdot h = 0$, $h \in \mathcal{G}$, $h^2 = 0$ enthält. In Gausschen Koordinaten ist eine bizirkulare Quartik von der Form:

$$q(z) = \alpha_1(z\bar{z})^2 + (\alpha_2x + \alpha_3y) \cdot z\bar{z} + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x + \alpha_8y + \alpha_9 = 0$$

mit reellen Koeffizienten. Der Raum $\mathcal{H}$ der Hermiteschen Formen ist 9-dimensional.

Im reellen projektiven Modell sind diese Quartiken $C^{(4)}$ -Kurven (Raumkurven 4. Ordnung 1. Art): das sind Schnitte der Möbiusquadrik vom Typ der Kugel mit einer 2. Quadrik. Der Zusammenhang ergibt sich wie folgt:

Ist $J \in \mathcal{C}_0$ eine bez. der Möbiusform selbstadjungierte Abbildung des V_4 mit $\text{Spur}(J) = 0$, so ist die durch $\partial J(a \wedge b) = J a \wedge b + a \wedge J b$ erklärte *derivierte Abbildung* ∂J auf $\mathcal{G}$ eine hermitesche Abbildung. Die *Derivation* $\partial J : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ ist bijektiv.

Das Bündel von Quadriken, die die Möbiusquadrik in derselben $C^{(4)}$ schneiden, enthält mindestens einen Kegel. Der zur Kegelspitze gehörende Kreis ist ein Symmetriekreis der Quartik.

Das Bündel konfokaler Quartiken eines quadratischen Vektorfeldes läßt sich, falls vorhanden, auf zwei Weisen berechnen:

8.1 Hermitesche Wurzeln eines quadratischen Vektorfeldes mit $J \in \mathcal{R}$

Das charakteristische Polynom einer selbstadjungierten Abbildung $S : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\text{Spur}(S) = 0$ ist von der Form: $p_S(z) = z^3 + g_2 \cdot z + g_3$. Die absolute Invariante $J(S) := \frac{g_2^3 + 27g_3^2}{108}$ stimmt im wesentlichen mit der absoluten Invariante der Nullstellen des quadratischen Vektorfeldes überein: $J(e_1, e_2, e_3, e_4) = J(S) - 1$ und es besteht ein enger Zusammenhang zur absoluten Invariante j elliptischer Funktionen. Die selbstadjungierten Abbildungen des Bündels

$$S_\lambda = S^2 + \lambda S + \frac{g_2 - \lambda^2}{2} \cdot \text{id}, \lambda \in \mathbb{R}$$

sind "Wurzeln" von S : es gilt $S_\lambda^2 = -p_S(\lambda) \cdot S + q(\lambda) \cdot \text{id}$ mit $q(\lambda) = 2\lambda g_3 + \left(\frac{g_2 - \lambda^2}{2}\right)^2$.

Besitzt das quadratische Vektorfeld einen Symmetriekreis und damit eine mit S vertauschbare Kreisspiegelung K , so ist $H_\lambda = S_\lambda \circ K = K \circ S_\lambda$ das gesuchte Bündel von hermiteschen Wurzeln. In einem euklidischen KOS erhält man die Schar konfokaler bizirkularer Quartiken

$$\{S_\lambda K h(z) \cdot h(z) = 0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

mit den sich aus der Gleichung $S h(z) \cdot h(z) = 0$ ergebenden 4 Brennpunkten.

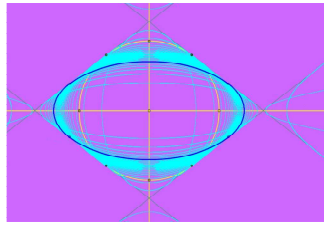
8.2 Konfokale bizirkulare Quartiken als Schnitt mit einer Schar von Kegeln

Ein Kegel hat mit der Möbiusquadrik im Prinzip 4 gemeinsame Tangentialebenen. Projiziert man den Schnitt auf die Polarebene des zur Kegelspitze gehörenden Kreispunktes, so erhält man neben dem Kreis einen 2ten Kegelschnitt, der mit dem Kreis 4 Tangenten gemeinsam hat. Die Kegelschnittschar mit diesen 4 gemeinsamen Tangenten und die dazugehörigen Kegel erzeugen die konfokalen bizirkularen Quartiken. Die Brennpunkte sind die Berührungspunkte der Tangenten mit der Möbiusquadrik. Für die selbstadjungierte Abbildung S mit $\text{Spur}(S) = 0$ aus 8.1 erhält man die Kegelschar mit den 4 gemeinsamen Tangenten durch die Schar selbstadjungierter Abbildungen $T_\lambda = (S - \lambda \text{id})^{-1}$. Die Geraden durch die Kegelspitze, welche die Möbiusquadrik schneiden, sind $g = [K h, h]$ mit Berührgeradenvektoren h , deren Berührungspunkt nicht auf dem zu K gehörenden Kreis liegt. Die Kurven

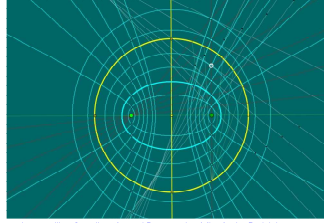
$$(T_\lambda [K h, h]) \cdot [K h, h] = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

sind eigentlich von 8. Ordnung, sie zerfallen jedoch in die Quartik $H_\lambda h \cdot h = 0$ aus 8.1 und den Symmetriekreis $K h \cdot h = 0$, man erhält also im Wesentlichen dieselben Quartiken. In der Projektion auf die zu K gehörende Ebene handelt es sich um einen 2. Kegelschnitt neben dem Kreis K .

9



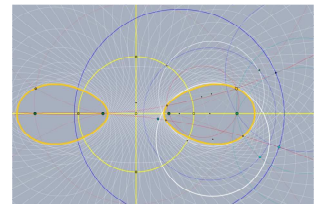
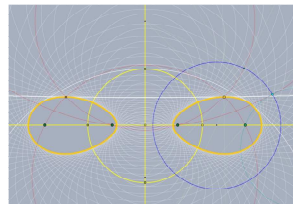
l.o.: 2-teilige Quartiken, 4 konzyklische Brennpunkte, r.o.: 1-teilige Quartiken, 2 Brennpunkte auf dem Kreis, die anderen fallen in der Projektion zusammen.



l.u.: 2-teilige Quartiken, je zwei Brennpunkte fallen in der Projektion zusammen, r.u.: konfokale Kegelschnitte in der Projektion auf die x-Achse als Kreis

9 Eigenschaften der bizirkularen Quartiken

Wir zeigen die Eigenschaften exemplarisch für die 2-teiligen Quartiken auf, Entsprechendes gilt für die übrigen Quartiktypen mit naheliegenden Einschränkungen. Die 2-teiligen besitzen 4 konzyklische Brennpunkte und 4 paarweise orthogonale Symmetriekreise. Für jede Symmetrie treten die Brennpunkte paarweise auf. In den symmetrischen Punktpaaren der Quartik berührt ein DB -Kreis die Quartik. Dieser halbiert den Winkel, der von den Brennkreisen durch die zusammengehörenden Brennpunkte gebildet wird. Die Quartik wird eingehüllt von den 4 DB -Kreisscharen.

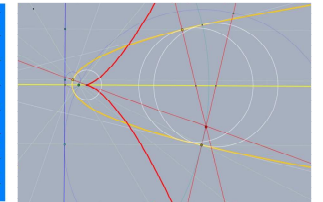
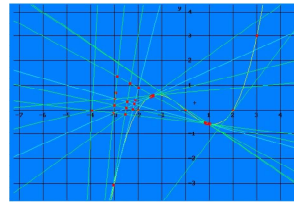


10

10 6-Ecknetze aus Kreisscharen

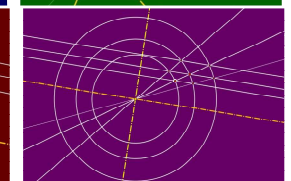
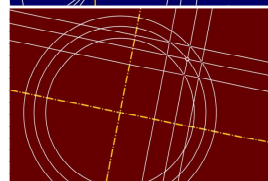
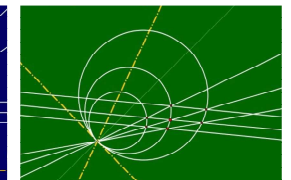
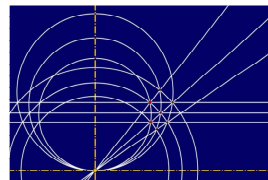
Drei Geradenbündel erzeugen stets ein 6-Ecknetz. Über 6-Ecknetze aus Geraden allgemein gibt der Satz von GRAF und SAUER Auskunft:

jede geradlinige Sechseckswabe besteht aus den Tangenten einer ebenen Kurve 3. Klasse. So bilden die Normalen von Parabeln ein 6-Ecknetz: sie hüllen eine Neilsche Parabel ein. Auch die Tangenten einer ganzrationalen Kurve 3. Ordnung bilden ein 6-Ecknetz.



Die Konstruktion eines 6-Ecknetzes aus Parabelnormalen steht noch aus. Die Frage nach 6-Ecknetzen aus Kreisen von BLASCHKE 1939 habe ich für 3 Kreisbündel, bzw. für 3 lineare Vektorfelder beantwortet. Sind die Kreise eines Netzes sämtlich orthogonal zu einem festen Kreis, so liegt die Projektion eines ebenen geradlinigen Netzes auf die Möbiusquadrik vor. Die folgenden Beispiele zeigen 6-Ecknetze, die nicht auf diese Weise entstehen.

Zunächst drei Bündel mit nur 2 Polen insgesamt, das 1. mit Diagonalnetz:



Das Beispiel r.u. ist in dem Beispiel l.o. enthalten, wir führen es an mit dem Hinweis, dass man die konzentrischen Kreise ersetzen kann durch Loxodrome eines festen Winkels.

11

12