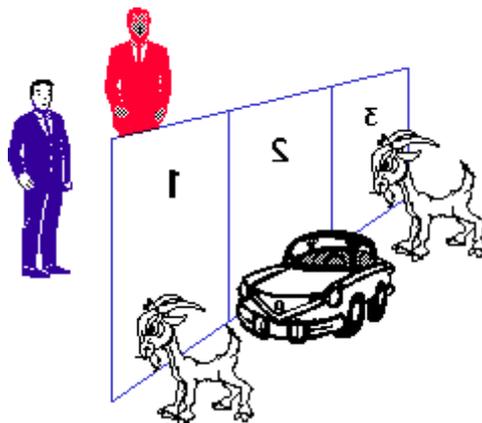


# Ziegenproblem

Liebe Schülerinnen und Schüler! Arbeitet bitte die folgenden Aufgaben der Reihe nach durch. Nachdem ihr mit einer Aufgabe fertig seid, holt ihr euch bitte den nächsten Aufgabenzettel am Lehrertisch ab – bitte keine Aufgaben überspringen! Falls ihr nicht wisst, wie ihr an eine Aufgabe herangehen sollt oder bei eurer Bearbeitung stecken bleibt, könnt ihr gerne meine Hilfe beanspruchen.

Wir beschäftigen uns weiter mit der bedingten Wahrscheinlichkeit und schauen uns im Folgenden ein bekanntes Anwendungsbeispiel an. Beim Ziegenproblem, auch bekannt als Drei-Türen-Modell oder Monty-Hall-Problem, geht es um die Frage, ob eine Wahl, die zunächst zufällig unter drei gleich wahrscheinlichen Möglichkeiten getroffen wurde, geändert werden sollte, wenn zusätzliche Informationen verfügbar werden.

Die Aufgabenstellung stammt aus einer Spielsituation von der amerikanischen Fernsehsendung „Let’s Make A Deal“, die von 1963 bis 1990 von dem Spielleiter Monty Hall moderiert wurde. Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:



Angenommen du nimmst an einer Spielshow teil und hast die Wahl zwischen drei Türen. Hinter einer Tür ist ein Auto, hinter den anderen Ziegen. Du wählst eine Tür aus – sagen wir Tür 1 – und der Spielleiter, der weiß, was hinter den Türen ist, öffnet eine andere Tür – sagen wir Tür 3 – hinter der eine Ziege steht. Dann sagt er zu dir: „Bleibst du bei Tor 1 oder möchtest du jetzt lieber Tür 2 auswählen?“

Die Aufgabenstellung kannst du dir auch in folgendem Video auf YouTube anschauen:

<https://www.youtube.com/watch?v=bLVvJHOeAAs>

Was würdest du tun? Begründe deinen Lösungsvorschlag!

Hol dir den nächsten Aufgabenzettel!

## Aufgabenzettel 2

Bildet nun Gruppen zu je drei Personen (falls es sich nicht ausgeht, können auch 2er Gruppen gebildet werden). Besprecht und diskutiert eure Lösungsvorschläge!

Gibt es Lösungsvorschläge, die von deinem abweichen? Wenn ja schreibe diese mit Begründung auf und diskutiert die Überlegungen.

### Simulation des Ziegenproblems:

Spielt in den Gruppen die Fernsehshow nach. Dazu holt ihr euch drei Spielkarten vom Lehrertisch ab. Bei den Karten handelt es sich um eine Ass Karte und zwei Nicht-Ass Karten. Die Ass Karte soll dabei den Gewinn, also das Auto darstellen, die beiden Nicht-Ass Karten sollen dabei den Nicht-Gewinn, also die beiden Ziegen darstellen.

Einer von euch drei stellt die/den Moderator/in dar, eine/r die/den Spieler/in, /die/der an der Spielshow teilnimmt und eine/r ist die/der Schriftführer/in (bei 2er Gruppen wird die/der Schriftführer/in weggelassen und die/der Moderator/in und die/der Spieler/in übernehmen gemeinsam diesen Part). Spielt abwechselnd und wechselt euch in euren Rollen von Runde zu Runde ab.

### Ablauf des Spiels:

Tragt zuerst eure Namen in der folgenden Liste ein. Bestimmt wer in der ersten Runde welche Rolle übernimmt. Sind für euch der Ablauf des Spiels und die einzelnen Rollen klar, könnt ihr mit dem Spiel beginnen. Andernfalls könnt ihr euch die Aufgaben der drei Rollen noch einmal genau durchlesen.

### Aufgaben der drei Rollen:

Moderator/in: Die/Der Moderator/in mischt jede Runde die drei Karten, so dass es die/der Spieler/in nicht sieht und legt die drei Karten vor der/m Spieler/in verdeckt hin. Die/Der Moderator/in muss dabei wissen, wo sich die Ass Karte befindet. Die/Der Moderator/in lässt der/m Spieler/in eine Karte auswählen und deckt anschließend eine der beiden anderen Karten, die eine Nicht-Ass Karte ist, auf. Nachdem die/der Moderator/in eine Nicht-Ass Karte aufgedeckt hat, fragt sie/er die/den Spieler/in, ob sie/er bei ihrer/seiner anfänglichen Wahl bleiben möchte oder ob sie/er doch lieber die andere Karte nehmen möchte. Je nachdem für welche Karte sich die/der Spieler/in entschieden hat, deckt die/der Moderator/in diese gewählte Karte auf und zeigt der/m Spieler/in somit, ob sie/er gewonnen hat oder nicht.

Spieler/in: Die/Der Spieler/in bekommt von der/dem Moderator/in drei verdeckte Karten vorgelegt und entscheidet sich für eine beliebige Karte. Nachdem die/der Moderator/in eine Nicht-Ass Karte aufgedeckt hat, kann sich die/der Spieler/in erneut entscheiden, welche Karte sie/er wählen möchte. Sie/Er kann bei ihrer/seiner ursprünglich gewählten Karte bleiben oder aber die andere Karte wählen.

Schriftführer/in: Während die/der Spieler/in und die/der Moderator/in das Spiel nachahmen, hat die/der Schriftführer/in Pause und nimmt nicht am Spiel teil. Die/Der Schriftführer/in hat die Spielliste vor sich liegen und trägt das Ergebnis der/s Spielers/in ein, ob sie/er gewonnen oder verloren hat nachdem sie/er ihre/seine ursprüngliche Wahl beibehalten hat oder nachdem sie/er die Karte gewechselt hat. (Wenn ihr eine zweier Gruppe seid, dann übernehmt ihr gemeinsam den Part des Schriftführers und tragt eure Ergebnisse selber ein)

Nehmt nun einen der Zettel und benutzt diesen zum Mitschreiben der Ergebnisse her, die anderen beiden legt ihr momentan beiseite. Macht Striche bei jeder/m Spieler/in und tragt am Ende aller Spiele, die Ergebnisse auf jedem Zetteln ein. Ihr spielt jetzt *30 Spiele* durch, wobei jeder jede Rolle zehn Mal übernehmen soll. Probiert auch beide Strategien (Wechsel und Nichtwechsel) aus.

Spieler/in		Spieler/in		Spieler/in	
Anzahl der Spiele		Anzahl der Spiele		Anzahl der Spiele	
Gewinn bei Nichtwechsel		Gewinn bei Nichtwechsel		Gewinn bei Nichtwechsel	
Verlust bei Nichtwechsel		Verlust bei Nichtwechsel		Verlust bei Nichtwechsel	
Gewinn bei Wechsel		Gewinn bei Wechsel		Gewinn bei Wechsel	
Verlust bei Wechsel		Verlust bei Wechsel		Verlust bei Wechsel	

Besprecht eure Ergebnisse. Wer hat die meisten Spiele gewonnen und welche Strategie hat diese/r Spieler/in (meistens) benutzt? Fällt euch bei den Ergebnissen irgendetwas auf? Diskutiert die Wechselstrategie, haben sich dadurch die Gewinnchancen erhöht oder nicht?

Wenn ihr Gefallen an diesem Spiel bzw. an dieser Aufgabenstellung gefunden habt, könnt ihr dieses Spiel auch am Computer nachspielen. Sucht euch als Hausübung im Internet bei GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) das Ziegenproblem und spielt es einige Male durch. Ihr findet die Aufgabenstellung unter folgendem Link: <https://www.geogebra.org/m/f4QfxksF>

Wie ist es dir zuhause ergangen, welche Ergebnisse hast du bekommen?

Holt euch den nächsten Aufgabenzettel!

### Aufgabenzettel 3

Die von euch eben durchgespielte Aufgabenstellung wurde erst 1990 berühmt, als ein Leser an die US-Zeitschrift „Parade“, die obige Fragestellung gestellt hatte. Am 9. November 1990 beantwortete die Journalistin Marilyn vos Savant, bekannt als Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten, die Frage in ihrer Kolumne „Fragen Sie Marilyn“.

Sie behauptete darin, *dass sich die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn des Autos beim Wechsel der Türen verdoppelt.*

Doch ist das richtig?

Leserbriefe aus aller Welt erreichten sie, unter anderem von Mathematikern.

Im Folgenden sind zwei fiktive Leserbriefe abgedruckt. Lest euch diese Briefe durch und diskutiert diese in der Gruppe.

Leserbrief 1:

*Liebe Frau Marilyn vos Savant, vielen Dank für Ihren Versuch, das Ziegenproblem zu lösen. Amüsiert habe ich Ihre „Kolumne“ gelesen.*

*Vielleicht haben Sie die Problemstellung nicht richtig gelesen (oder die Welt dreht sich bei Ihnen entgegengesetzt). Aber wenn Sie nochmals darüber nachdenken, werden Sie mir schon beipflichten. Schauen Sie: Zu Beginn gibt es drei Möglichkeiten eine Tür auszuwählen. Somit folgt, dass die Wahrscheinlichkeit das Auto zu treffen  $\frac{1}{3}$  beträgt. Wenn jetzt aber eine Tür wegfällt, stehen nur noch zwei Türen zur Auswahl und demnach liegt die Wahrscheinlichkeit bei  $\frac{1}{2}$ .*

*Das ist doch nicht zu schwer gewesen. Naja, so ein Fehler kann jedem Mal unterlaufen!*

Was haltet ihr von diesem Leserbrief? Teilt ihr die Meinung oder würdet ihr anders argumentieren? Haltet hier eure Anmerkungen fest:

Leserbrief 2:

*Sehr geehrte Frau Savant, vielen Dank für Ihre erkenntnisreiche Kolumne. Ich bin zwar kein Mathematiker, aber ich glaube ich habe Ihre Argumentation verstanden. Zuerst war ich davon überzeugt, dass ich bei zwei Türen eine fifty-fifty Chance haben würde.*

*Aber nach reiflicher Überlegung kam ich darauf, dass man die Situation von Vornherein betrachten sollte. Das heißt, wenn ich zu Beginn auf eine der drei Türen tippe, so liegt die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto dahinter ist bei  $1/3$ . Somit entfallen auf die anderen beiden Türen  $2/3$ . Wenn nun eine Tür der anderen zweien wegfällt, ist ja die Wahrscheinlichkeit immer noch  $2/3$ , aber auf nur eine Tür verteilt. Deshalb sollte ich nun wechseln. Ich hoffe ich liege mit meiner Argumentation nicht daneben.*

Was haltet ihr nun von dieser Argumentation? Haltet auch hier wieder eure Anmerkungen fest:

Holt euch den nächsten Aufgabenzettel!

## Aufgabenzettel 4

Nach den Erkenntnissen der ersten Spielrunde, spielt nun erneut 30 Runden, wobei jeder wieder zehn Mal den Part des Spielers einnehmen soll.

Spieler/in		Spieler/in		Spieler/in	
Anzahl der Spiele		Anzahl der Spiele		Anzahl der Spiele	
Gewinn bei Nichtwechsel		Gewinn bei Nichtwechsel		Gewinn bei Nichtwechsel	
Verlust bei Nichtwechsel		Verlust bei Nichtwechsel		Verlust bei Nichtwechsel	
Gewinn bei Wechsel		Gewinn bei Wechsel		Gewinn bei Wechsel	
Verlust bei Wechsel		Verlust bei Wechsel		Verlust bei Wechsel	

Betrachtet die Ergebnisse der zweiten Spielrunde. Haben sich deine Ergebnisse und/oder die Ergebnisse deiner Kollegen/innen verbessert, also hast du bzw. habt ihr jetzt öfters die Ass Karte erwischt, als noch in der ersten Runde? Welche Strategie hast du und haben deine Kollegen/innen in der zweiten Runde (hauptsächlich) gewählt?

Um die Ergebnisse zusammenzufassen, tragt eure gemeinsamen Ergebnisse aus den beiden Runden, also den 60 Spielen, in die folgende Tabelle ein.

Anzahl der Spiele	60
Gewinn bei Nichtwechsel	
Verlust bei Nichtwechsel	
Gewinn bei Wechsel	
Verlust bei Wechsel	

Holt euch den nächsten Aufgabenzettel!

## Aufgabenzettel 5

### Betrachtung der Wechselstrategie:

Da wir die Wechselstrategie nun genauer betrachten und analysieren möchten, fassen wir die Ergebnisse noch etwas zusammen.

Betrachtet also nun nur mehr die Wechselstrategie und überlegt euch, was ihr mit den Ergebnissen aus dem Nichtwechseln machen könnt. Was bedeutet es, wenn ihr gewonnen habt, wenn ihr die Karte nicht gewechselt habt (also „Gewinn bei Nichtwechsel“) und was bedeutet es, wenn ihr verloren habt, wenn ihr die Karte nicht gewechselt habt (also „Verlust bei Nichtwechsel“)? Was ist gleichbedeutend mit diesen Ergebnissen und wo können diese Ergebnisse dazugerechnet werden?

Gewinn bei Nichtwechsel =

Verlust bei Nichtwechsel =

Tragt die zusammengefassten Ergebnisse in die folgende Tabelle ein:

Anzahl der Spiele	60
Gewinn bei Wechsel	
Verlust bei Wechsel	

Betrachtet nun eure Tabelle für die Wechselstrategie. Wie hoch war bei euch die relative Häufigkeit, dass man gewinnt wenn man die Karte wechselt und dass man verliert wenn man die Karte wechselt?

*relative Häufigkeit(Gewinn bei Wechsel) =*

*relative Häufigkeit(Verlust bei Wechsel) =*

Lässt sich anhand dieser Ergebnisse bei eurer Gruppe eine Tendenz erkennen, ob die Wechselstrategie eine bessere Gewinnchance ermöglicht?

Ihr habt nun in eurer Gruppe 60 Spiele durchgespielt. Sind diese Aussagen, bzw. die gerade berechneten Ergebnisse aussagekräftig?

Was besagt das Gesetz der großen Zahlen?

Holt euch den nächsten Aufgabenzettel!

## Aufgabenzettel 6

### Zusammenfassung der Ergebnisse aller Gruppen:

Um noch aussagekräftigere Ergebnisse zu bekommen, fassen wir also die Ergebnisse aller Gruppen zusammen.

Geht dazu nach vorne und tragt eure Ergebnisse in der Tabelle an der Tafel ein. Schreibt euer Ergebnis und die Ergebnisse der anderen Gruppen in eure Tabelle. (Falls noch nicht alle Gruppen ihre Ergebnisse eingetragen haben, holt ihr dies später nach, sobald alle Gruppen ihre Ergebnisse eingetragen haben und fährt mit dem nächsten Aufgabenzettel fort)

	Anzahl der Spiele	Gewinn bei Wechsel	Verlust bei Wechsel
Gruppe 1			
Gruppe 2			
Gruppe 3			
Gruppe 4			
Gruppe 5			
Gruppe 6			
Gruppe 7			
Gruppe 8			
Gruppe 9			
Gruppe 10			
Gesamt			

Berechnet mit dieser größeren Menge an Daten die relativen Häufigkeiten, das man gewinnt oder verliert wenn man die Karte wechselt. Sind diese Ergebnisse schon aussagekräftiger und wie gut passen eure Ergebnisse aus den 60 Spielen mit den Gesamtergebnissen überein?

*relative Häufigkeit(Gewinn bei Wechsel) =*

*relative Häufigkeit(Verlust bei Wechsel) =*

Auf Grund der Ergebnisse müssten sich schon sehr gute Tendenzen ergeben, ob man jetzt besser wechseln oder doch bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben sollte. Genauso sollte sich auch schon eine gute Annäherung an die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Wechsel treffen lassen. Wir wollen jetzt aber dem Problem ganz genau auf den Grund gehen, die exakte Wahrscheinlichkeit ermitteln und versuchen, die Lösung dieser Aufgabenstellung zu verstehen.

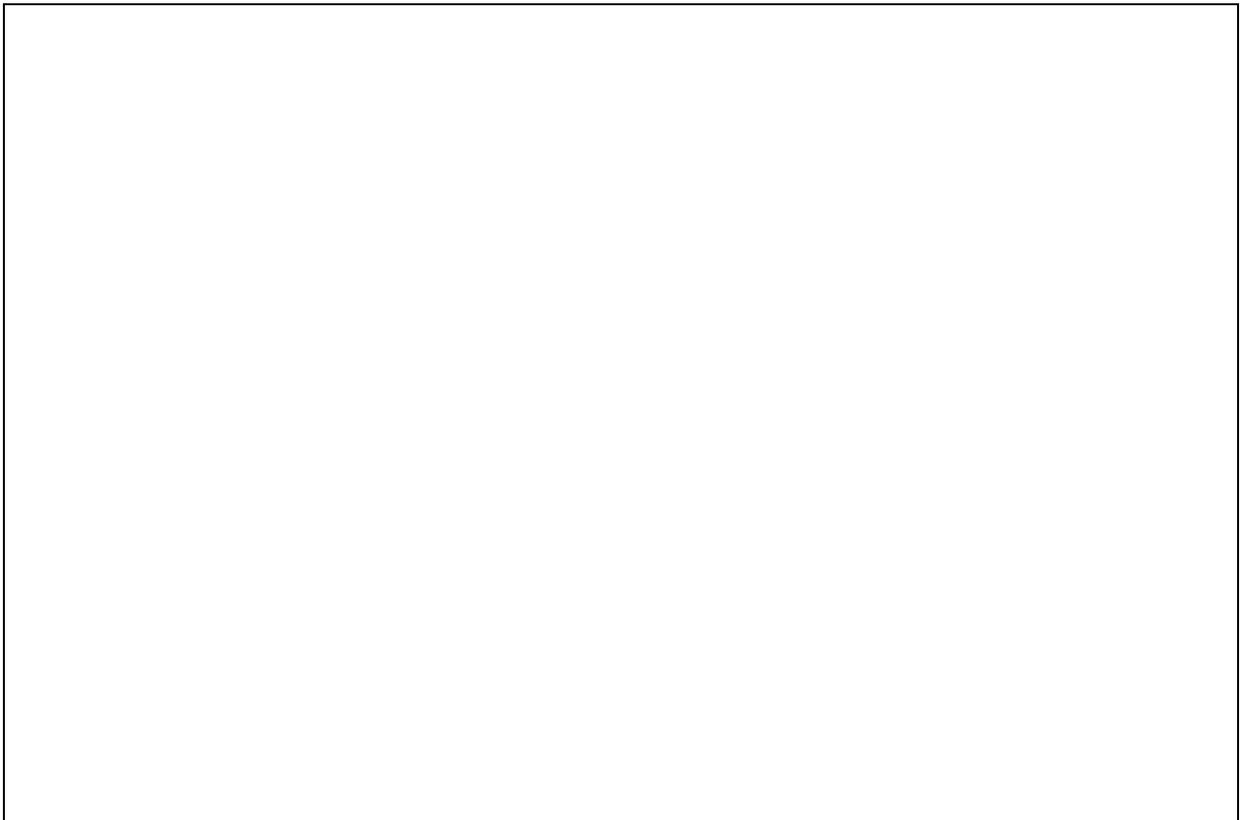
Holt euch dazu den nächsten Aufgabenzettel!

## Aufgabenzettel 7

### Die Lösung des Ziegenproblems:

Um der Lösung des Ziegenproblems auf den Grund zu gehen, spielt ihr das Spiel mit den drei Karten erneut durch. Allerdings legt ihr jetzt in der Gruppe die Karten offen hin und spielt das Spiel in allen Konstellationen durch. Überlegt euch welche Möglichkeiten die/der Moderator/in für das Öffnen einer Tür (hier Karte) hat und unter welchen Umständen die/der Spieler/in gewinnt oder verliert. Versucht alle Möglichkeiten durchzuspielen.

Auf welche Einschätzung kommt ihr?



Holt euch den nächsten Aufgabenzettel!

## Aufgabenzettel 8

Füllt nun, mit den Erkenntnissen die ihr gerade gewonnen habt, die folgende Tabelle aus:

Wahl Tür 1	Tür 2	Tür 3	Moderator/in öffnet Tür ...	Ergebnis beim Wechseln	Ergebnis beim Nichtwechseln
Auto	Ziege	Ziege			
Ziege	Auto	Ziege			
Ziege	Ziege	Auto			
Tür 1	Wahl Tür 2	Tür 3			
Auto	Ziege	Ziege			
Ziege	Auto	Ziege			
Ziege	Ziege	Auto			
Tür 1	Tür 2	Wahl Tür 3			
Auto	Ziege	Ziege			
Ziege	Auto	Ziege			
Ziege	Ziege	Auto			

Insgesamt gibt es also neun gleichwahrscheinliche Möglichkeiten, wie das Auto und die Ziegen verteilt sein können und welche Tür ihr auswählt. Bei wie vielen dieser neun Möglichkeiten gewinnt ihr das Auto und bei wie vielen gewinnt ihr kein Auto wenn ihr die Strategie des Wechselns verfolgt und wenn ihr die Strategie des Nichtwechselns verfolgt? Berechnet mit Hilfe dieser Zahlen, die Gewinn- bzw. Verlustwahrscheinlichkeit bei der Strategie des Wechselns (bei der Strategie des Nichtwechselns würde genau das Gegenteil herauskommen).

$P(\text{Gewinn bei Wechsel}) =$

$P(\text{Verlust bei Wechsel}) =$

Holt euch den nächsten Aufgabenzettel!

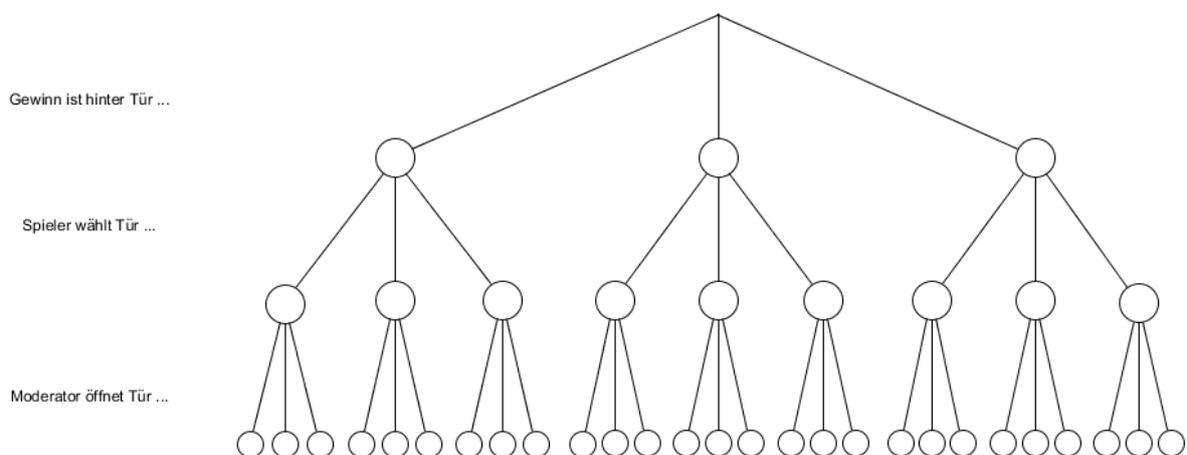
## Aufgabenzettel 9

Eine weitere Möglichkeit das Ziegenproblem zu untersuchen bzw. zu lösen, ist es, ein dazu passendes Baumdiagramm anzufertigen. Mit Hilfe des Baumdiagramms werden ebenfalls alle Möglichkeiten aufgezeichnet und mit den jeweils dazu passenden Wahrscheinlichkeiten versehen.

Im Folgenden ist ein bereits fertig gezeichnetes Baumdiagramm mit allen Ästen vorgegeben. Eure Aufgabe ist es zuerst, das Baumdiagramm fertig auszufüllen und alle Wahrscheinlichkeiten bei den Ästen hinzuschreiben. Falls ihr eine andere Lösung für ein Baumdiagramm habt, könnt ihr auch gerne dieses hinzeichnen und damit weiterarbeiten.

Anleitung für dieses Baumdiagramm:

1. Schritt: Das Auto steht jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{3}$  hinter Tür 1, Tür 2 und Tür 3
2. Schritt: Ihr, die Spieler, wählt mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils  $\frac{1}{3}$  Tür 1, Tür 2 oder Tür 3
3. Schritt: Wenn das Auto nun beispielsweise hinter Tür 1 ist, und ihr Tür 1 gewählt habt, dann kann die/der Moderator/in im zweiten Schritt 2 Türen öffnen, was er mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  tut, in jedem anderen Fall hat er jeweils nur eine Wahl.
4. Schritt: Ob ihr die Tür jetzt wechseln möchtet oder nicht, hängt von euch ab. Diese Möglichkeit wird im Baumdiagramm aber nicht mehr eingezeichnet, denn so hat man nun die Möglichkeit hat, beide Fälle zu betrachten.



Nach dem fertigen Ausfüllen des Baumdiagramms, sucht euch nun alle Fälle, wo ihr gewinnen würdet, wenn ihr die Tür wechselt und berechnet euch mit Hilfe des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit davon. Ebenso sucht ihr euch alle Fälle, wo ihr verlieren würdet, wenn ihr die Tür wechselt und berechnet auch davon die Wahrscheinlichkeit.

Wie sehen eure berechneten Ergebnisse aus? Stimmen diese mit den vorherigen Überlegungen zusammen?

$P(\text{Gewinn bei Wechsel}) =$

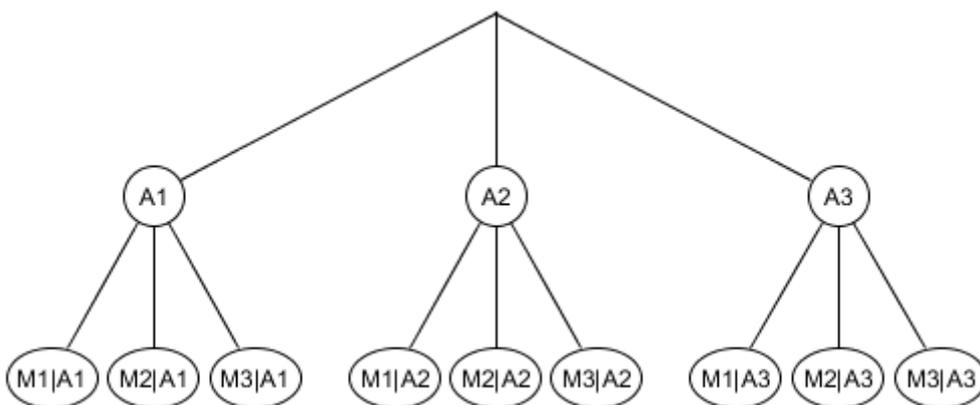
$P(\text{Verlust bei Wechsel}) =$

### Zusatzaufgabe:

Wie oben bereits erwähnt wurde, kann das Baumdiagramm auch anders gezeichnet werden. Eine weitere Möglichkeit soll hier dargestellt werden, wo das Ziel ist, dass am Ende das Ergebnis mit der Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

Dazu soll die folgende Aufgabenstellung berechnet werden: Die/Der Spieler/in hat sich für Tür 1 entschieden. Die/Der Moderator/in öffnet daraufhin Tür 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür 2 steht?

Tragt jetzt dazu passend im nachfolgenden Baumdiagramm die einzelnen Wahrscheinlichkeiten bei den jeweiligen Ästen ein, wenn ihr euch anfangs für Tür 1 entschieden habt. Die/Der Moderator/in wird daher auf keinen Fall Tür 1 öffnen, berücksichtigt das bei eurem Baumdiagramm!



Die einzelnen Ausgänge bedeuten hier folgendes:

$A_i$ ..... Auto steht hinter Tür  $i$

$M_i$ ..... Moderator/in öffnet Tür  $i$

$M_i|A_j$ ..... Moderator/in öffnet Tür  $i$ , wenn das Auto hinter Tür  $j$  steht

Berechnet mit Hilfe des Baumdiagramms und mit Hilfe des Satzes von Bayes die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür 2 steht, wenn die/der Moderator/in Tür 3 geöffnet hat.

$$P(A_2|M_3) =$$

Welche Strategie habt ihr bei dieser Aufgabenstellung angewendet? Passt das Ergebnis daher mit den vorherigen Überlegungen überein?

Ihr habt nun alle Aufgaben gelöst. Super gemacht!!!



Ihr habt das Ziegenproblem, oder auch genannt das Drei-Türen-Modell oder Monty-Hall Problem (hoffentlich) erfolgreich untersucht und gelöst. Wie ihr gesehen habt, hat dieses Problem in den 90er Jahren für viel Diskussion gesorgt und es ist daher kein Problem, das man auf Anhieb versteht. Man muss sich damit auseinandersetzen und es genau untersuchen, damit man es versteht und auch die Lösung berechnen kann.