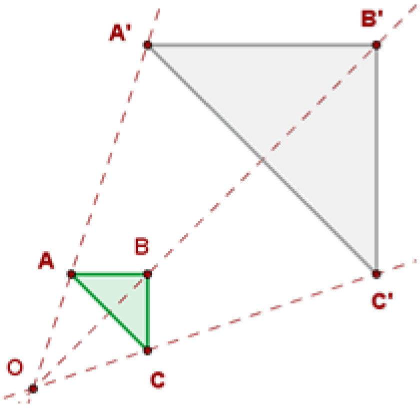
Translaciones, giros, simetrías.

Transformaciones geométricas

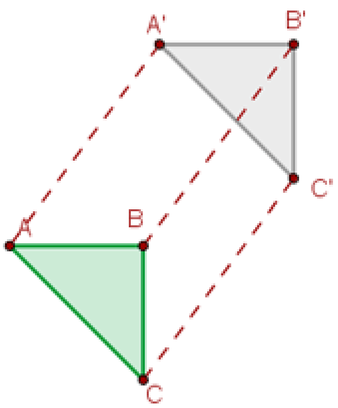


Transformación geométrica es una aplicación del plano en el plano tal que **a cada punto de un plano le hace corresponder otro punto del mismo plano**.

Movimiento o isometría

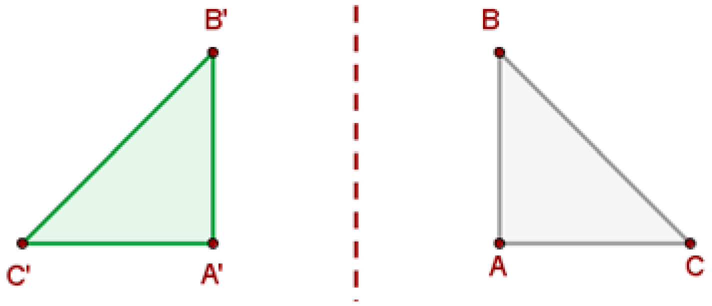
Movimiento o isometería en el plano es una **transformación que conserva las distancias**. Puede ser:

Movimiento directo



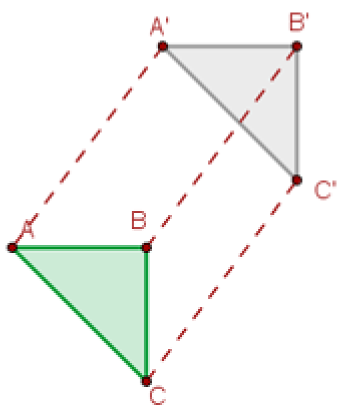
Cuando la **figura original y la figura transformada** por el movimiento **se pueden hacer coincidir sin salir del plano**.

Movimiento inverso



Cuando la **figura original y transformada no pueden hacerse coincidir**

Traslación



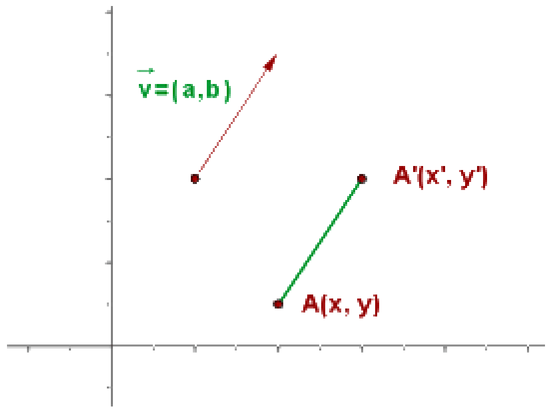
La traslación es una transformación puntual por la cual a todo punto A del plano le corresponde otro punto A' también del plano de forma que $\vec{AA'} = \vec{v}$ **. Siendo** $\vec{v}$ **el vector que define la traslación**.

La traslación se designa $T_{\vec{v}}$ por , luego $T_{\vec{v}}(A) = A'$.

El punto **A'** es el **punto trasladado** de **A**.

Un punto y su trasladado se dice que **son homólogos**.

Coordenadas de un punto mediante una traslación.

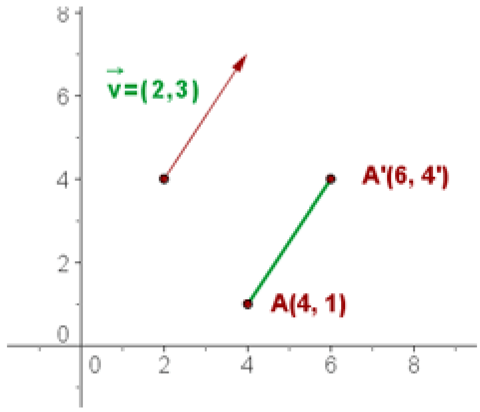


$T_{\vec{v}} \quad A(x,y) \quad A(x',y') \quad \vec{v}=(a,b)$

$A' = A + \vec{v}$

$A' = (x,y) + (a,b) = (x+a,\ y+b)$

$x' = x + a \qquad y' = y + b$



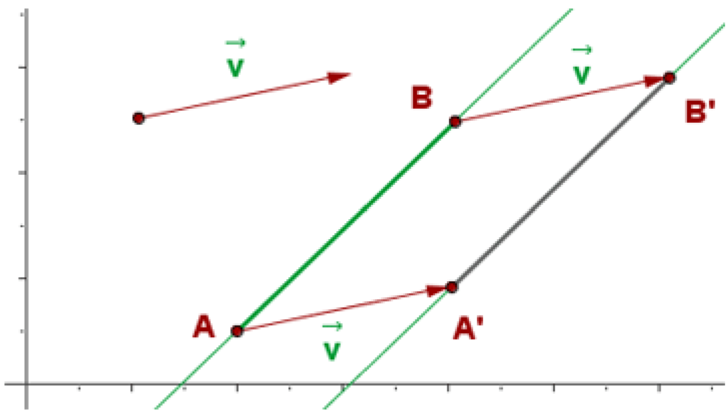
$T_{\vec{v}} \quad A(4,1) \quad A(x',y') \quad \vec{v}=(2,3)$

$x' = 4 + 2 = 6$

$A'(6,4)$

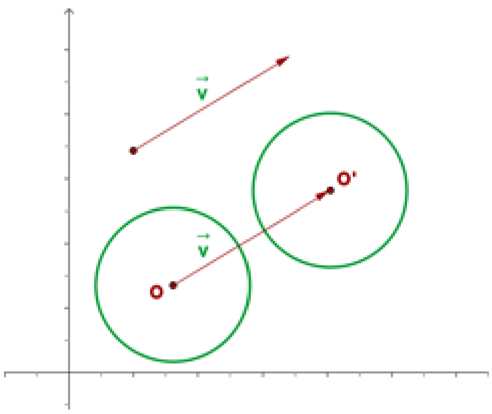
$y' = 1 + 3 = 4$

Traslación de una recta



Una recta **se transforma**, mediante una traslación, **en una recta paralela**.

Traslación de una circunferencia



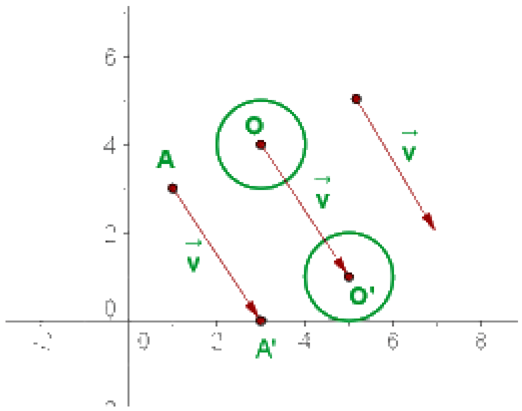
La **homóloga** de una circunferencia mediante una traslación es otra **circunferencia de igual radio que tiene como centro el punto homólogo del centro de la circunferencia original**.

Ejemplo1:

Una traslación en el plano está definida por un vector $\vec{v} = (2, -3)$.

1 Hallar la imagen por dicha traslación de un punto A (1,3).

2 Hallar la transformada de una circunferencia que tiene de centro (3,4) y de radio 1



$\vec{v} = (2, -3) \qquad A(1, 3)$

$A' = (1, 3) + (2, -3) = (1 + 2, 3 - 3)$

$A' = (3, 0)$

$\vec{v} = (2, -3) \qquad O(3, 4) \qquad r = 1$

$O' = (3, 4) + (2, -3) = (3 + 2, 4 - 3)$

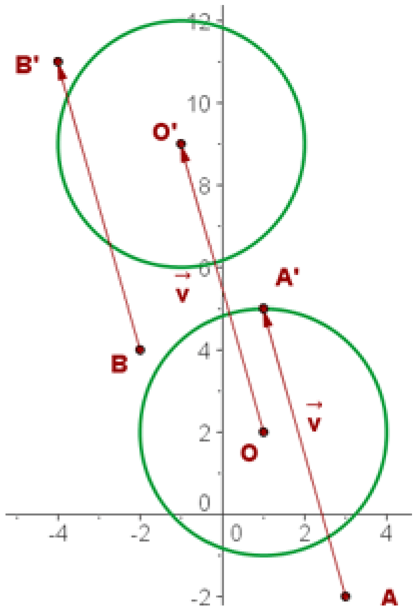
$O' = (5, 1) \qquad r' = 1$

Ejemplo2:

En una traslación mediante el vector $\vec{v}$, un punto A (3, - 2) se transforma en un punto A' (1,5). Calcular:

El transformado del punto B(-2, 4).

La transformada de una circunferencia de centro (1,2).y radio 3.



$A\,(3,-2)$ $\qquad$ $A'(1,5)$

$\vec{v} = (1,5)-(3,-2) = (1-3, 5-(-2))$

$\vec{v} = (-2,7)$

$B\,(-2,4)$ $\qquad$ $\vec{v} = (-2,7)$

$B' = (-2,4)+(-2,7) = (-4,11)$

$B' = (-4,11)$

$\vec{v} = (-2,7)$ $\qquad$ $O\,(1,2)$ $\qquad$ $r = 3$

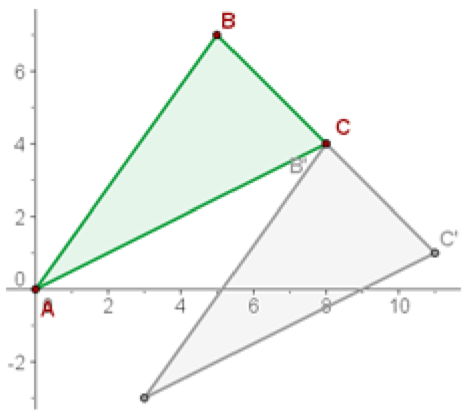
$O' = (1,2)+(-2,7) = (1-2, 2+7)$

$O' = (-1,9)$ $\qquad$ $r' = 3$

<u>Ejemplo3:</u>

Una traslación tiene de vector $\vec{v} = (3,-3)$. Hallar la figura transformada de un triángulo cuyos vértices son:

$A\,(0,0), B\,(5,7)$ y $C\,(8,4)$



$A\,(0,0)$ $\qquad$ $\vec{v} = (3,-3)$

$A' = (0,0)+(3,-3) = (0+3, 0-3)$

$A' = (3,-3)$

$B\,(5,7)$ $\qquad$ $\vec{v} = (3,-3)$

$B' = (5,7)+(3,-3) = (5+3, 7-3)$

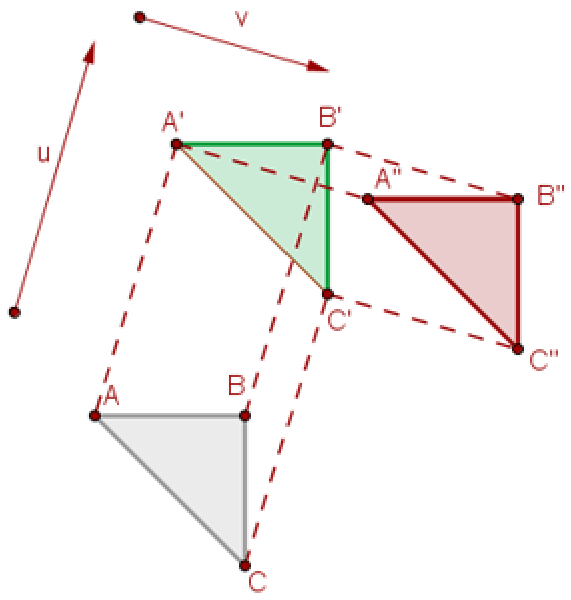
$B' = (8,4)$

$C\,(8,4)$ $\qquad$ $\vec{v} = (3,-3)$

$C' = (8,4)+(3,-3) = (8+3, 4-3)$

$C' = (11,1)$

Composición de traslaciones



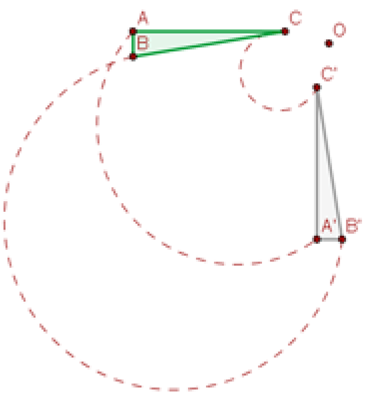
Al aplicar sucesivamente **dos traslaciones de vectores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se obtiene **otra traslación** cuyo vector es la **suma de los vectores**:

$$\vec{u}+\vec{v}$$

$$A' = A+\vec{u}$$

$$A'' = A+\vec{u}+\vec{v}$$

Giros



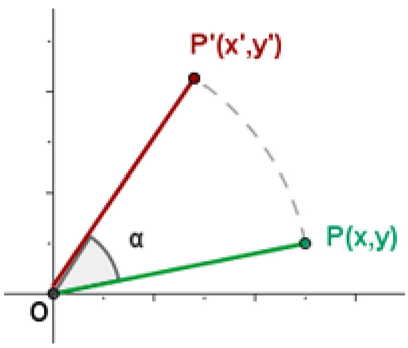
Dados un punto O y un ángulo α, se llama giro de centro O y ángulo α a una transformación G que hace corresponder a cada punto P otro P' = G(P) de modo que:

$$\overline{OP} = \overline{OP'} \qquad \widehat{POP'} = \alpha$$

El sentido de giro positivo de es del contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Los giros son movimientos isométricos, dado que conservan las distancias.

Giro de centro O(0,0)

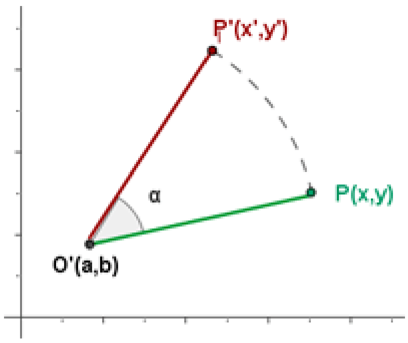


$$G(O,\alpha) \qquad O(0,0)$$

$$x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

$$y' = x\cdot\operatorname{sen}\alpha + y\cdot\cos\alpha$$

Giro de centro O'(a,b)



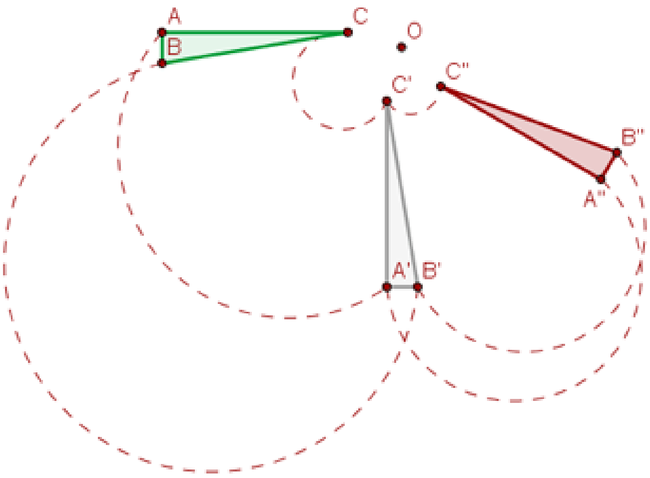
$G(O',\alpha) \qquad O'(a,b)$

$$x'-a=(x-a)\cdot\cos\alpha-(y-b)\cdot sen\alpha$$

$$y'-b=(x-a)\cdot sen\alpha+(y-b)\cdot\cos\alpha$$

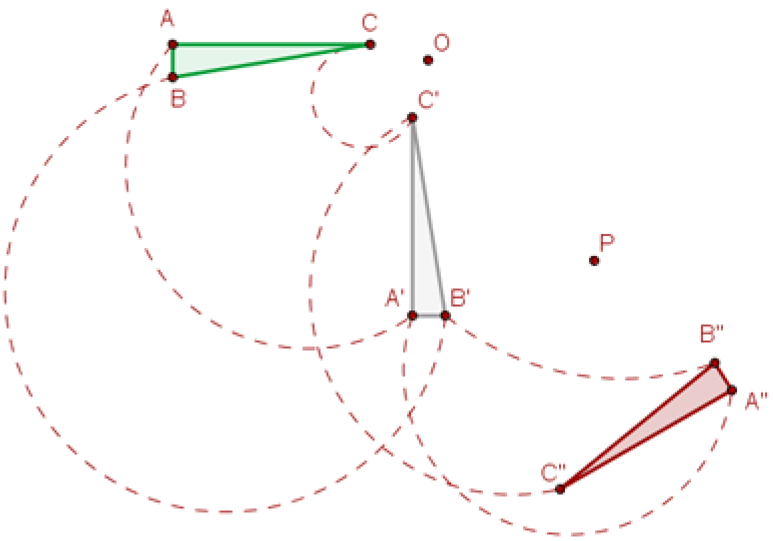
Composición de giros

Con el mismo centro

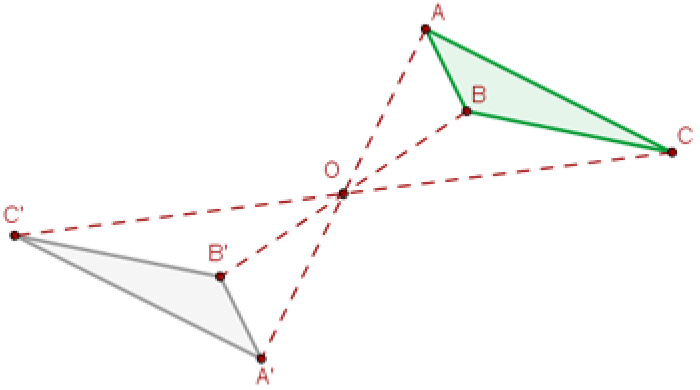


Al aplicar sucesivamente dos giros de igual centro O y amplitudes α y β se obtiene un giro de igual centro O y amplitud igual a la suma de las amplitudes α+β .

Con distinto centro

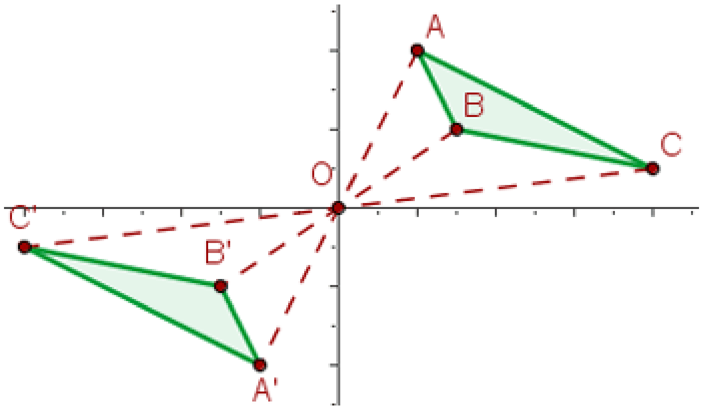


Simetría central



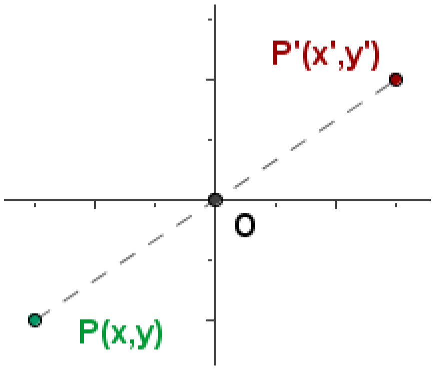
Una **simetría central**, de centro el punto O, es un movimiento del plano con el que a cada punto P del plano le hace corresponder otro punto P', siendo O el punto medio del segmento de extremos P y P'.

Coordenadas mediante una simetría de centro O(0,0)



Un punto P' homólogo de un punto P(x,y) mediante una simetría central de centro O(0,0) tiene de coordenadas:

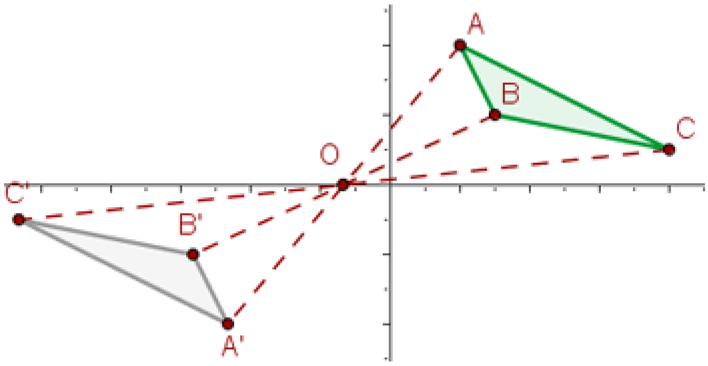
Una simetría de centro O equivale a un giro de centro O y amplitud 180°.



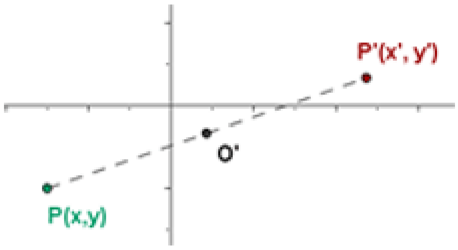
P' = (-x, -y)

x' = -x   y' = -y

Coordenadas mediante una simetría de centro O(a, b)



Un punto P' homólogo de un punto P(x,y) mediante una simetría central de centro O(a ,b) tiene de coordenadas:



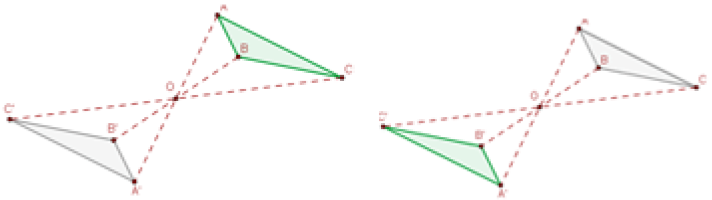
P' = (-x+ 2a, -y+ 2b)

x' = -x + 2a

y' = -y + 2b

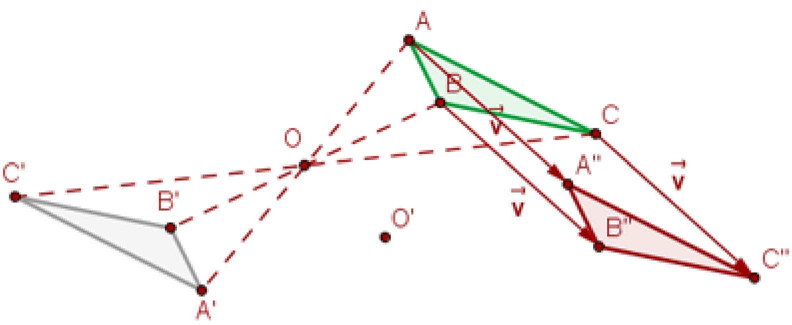
Composición de simetrías centrales

Con el mismo centro



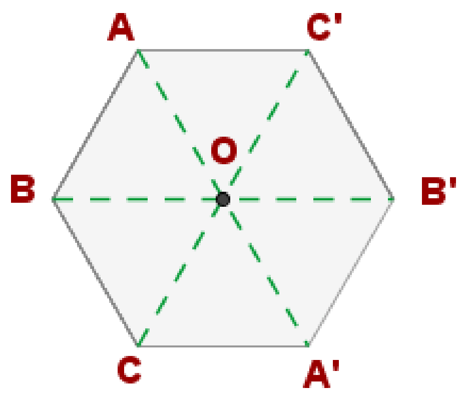
Como una simetría de centro O equivale a un giro de centro O y amplitud 180°, al aplicar otra transformación el ángulo será de 360°, por lo que se obtiene la misma figura, lo que se llama involución. **Es una transformación involutiva**.

Con distinto centro



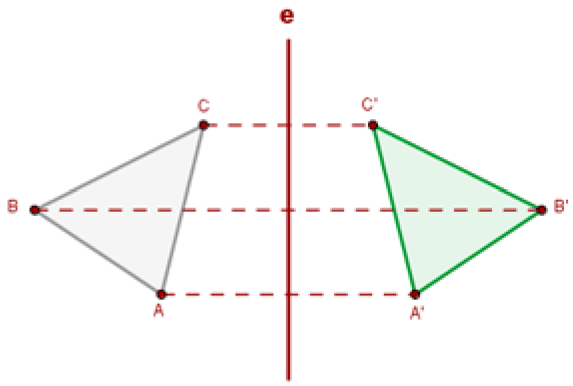
La composición de dos simetrías centrales con distinto centro **es una traslación**.

Centro de simetría



Un punto es centro de simetría de una figura si define una simetría central.

Simetría axial



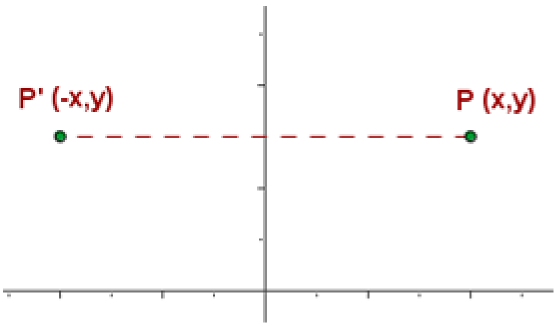
Una simetría axial de eje e es una transformación, por tanto a todo punto P del plano le corresponde otro punto P' también del plano, de manera que el eje e sea la mediatriz del segmento AA'.

Las **simetrías axiales son isometrías** porque conservan las distancias entre los puntos y sus homólogos.

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Coordenadas de puntos mediante simetrías axiales

Coordenadas de un punto simétrico al eje de ordenadas

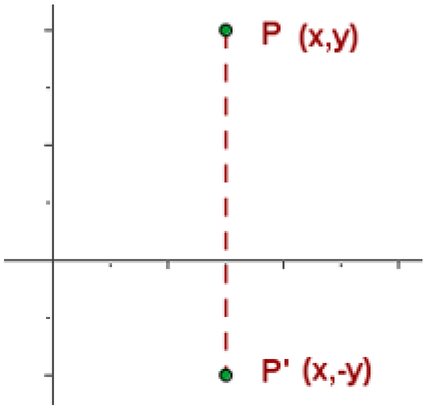


Dos puntos A(x, y) y A'(x', y') simétricos respecto del eje de ordenadas tienen sus abscisas opuestas y sus ordenadas iguales.

$$P(x,\ y) \longrightarrow P(-x,\ y)$$

$$x = -x' \quad y = y'$$

Coordenadas de un punto simétrico al eje de abscisas



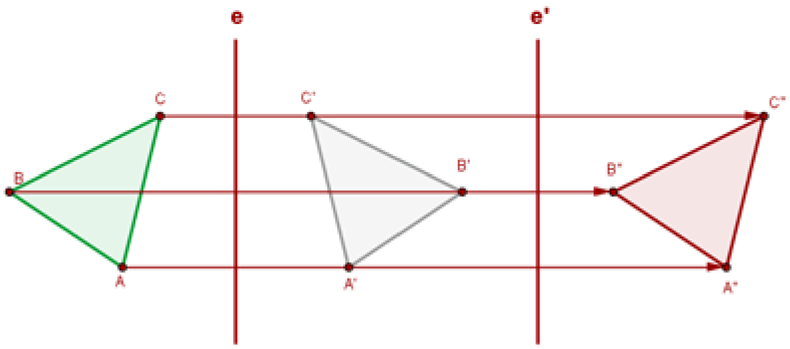
Dos puntos A(x, y) y A'(x', y') simétricos respecto del eje de abscisas tienen sus abscisas iguales y sus ordenadas opuestas.

P(x, y) ⟶ P(x, -y)

$x = x'$ $y = -y'$

Composición de simetrías axiales

Simetría de ejes paralelos



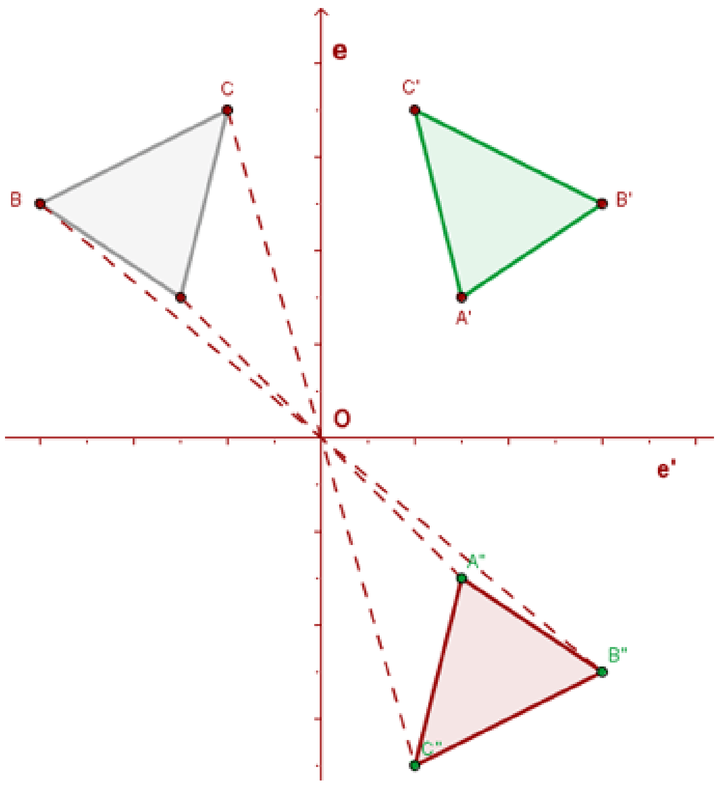
La composición de dos simetrías ejes paralelos e y e' **es una traslación**, cuyo vector tiene:

La longitud del vector es el doble de la distancia entre los ejes.

La dirección del vector es perpendicular a los ejes.

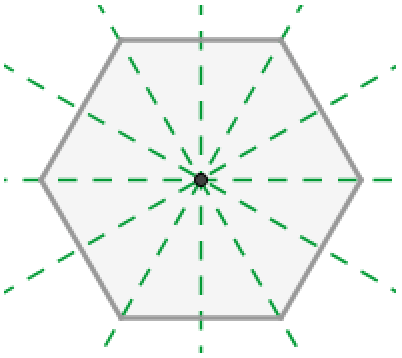
El sentido es el que va de e a e'.

Simetría de ejes perpendiculares



La composición de dos simetrías de ejes perpendiculares e y e' es una simetría central respecto del punto de corte de los dos ejes de simetría.

Eje de simetría



El eje de simetría de una figura es la recta que divide a la figura en dos partes iguales, de modo que define una simetría axial entre una parte y otra.