TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

La función original f(x) se le llama transformada inversa y se denota por $T^{-1}(F)$ Es decir, se escribirá $f(x) = T^{-1}(F)$

Propiedad 1. $T^{-1}[kF(s)] = kT^{-1}[F(s)]$ Donde es una constante cualquiera.

Propiedad 2. (Linealidad). La transformación de Laplace es una operación lineal, es decir:

$$T^{-1}[aF(s) \pm bG(s)] = aT^{-1}[F(s)] \pm bT^{-1}[G(s)]$$

Donde, a y b son constantes.

Propiedad 3. (Traslación). Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$

Entonces $T^{-1}[F(s-a)] = e^{ax} f(x)$

Propiedad 4. (Cambio de escala). Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces,

$$T^{-1}[F(as)] = \frac{1}{a} f(\frac{x}{a})$$

Teorema de las derivadas: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces

$$T^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right] = (-1)^n x^n f(x)$$

Teorema de las integrales: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces

$$T^{-1}\left[\int_s^{\infty} f(u)du\right] = \frac{F(x)}{x}$$

Teorema de multiplicación por s: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ y $f(0) = 0$ entonces

$$T^{-1}[sF(s)] = f'(x)$$

Teorema de división por s: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces

$$T^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^x f(u)du$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{2}{(s+4)}$$

Desarrollo

Tomamos las fracciones parciales del ejemplo anterior

$$T^{-1}\left\{\frac{2}{(s+4)}\right\} = 2T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{2}{(s+4)}\right\} = 2e^{-4x}$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{3}{(s-1)^2}$$

Desarrollo

$$T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} = 3T^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

Mediante las propiedades de las transformadas

$$T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} = 3xe^{x}$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{s+2}{s^2+4}$$

Desarrollo

$$T^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+4}\right\} = T^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + T^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

Mediante las propiedades de las transformadas

$$T^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+4}\right\} = cos2x + sen2x$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{3s+4}{(s-1)^2+9}$$

Desarrollo

$$T^{-1}\left\{\frac{3s+4}{(s-1)^2+9}\right\} = T^{-1}\left\{\frac{3s-3+7}{(s-1)^2+9}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{3s+4}{(s-1)^2+9}\right\} = 3T^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+9}\right\} + \frac{7}{3}T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2+9}\right\}$$

Mediante las propiedades de las transformadas

$$T^{-1}\left\{\frac{3s+4}{(s-1)^2+9}\right\} = 3e^{x}cos3x + \frac{7}{3}e^{x}sen3x$$

Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales (funciones con raíces reales)

Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales
(funciones con raíces reales)

Fracciones parciales

Son expresiones de la siguiente forma $\frac{f(x)}{g(x)}$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomicas y el $grad[f(x)] < grad[g(x)]$

En la función $g(x)$ se pueden presentar las siguientes situaciones

Factores lineales distintos

A los factores de la forma $a_i x + b_i$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes

Factores lineales repetidos

Al factor de la forma $(ax+b)^n$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{s}{(s+1)(s+4)}$$

Desarrollo

Tomamos las fracciones parciales

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+4)}\right\} = T^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+4)}\right\} = \frac{1}{3}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} + \frac{2}{3}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+4)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-4x}$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{3}{(s-1)^2(s+2)}$$

Desarrollo

Tomamos las fracciones parciales

$$T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2(s+2)}\right\}$$
$$= -\frac{1}{9}T^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{3}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + \frac{1}{9}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2(s+2)}\right\} = -\frac{1}{9}e^{x} + \frac{1}{3}xe^{x} + \frac{1}{9}e^{-2x}$$

Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales (expresiones cuadráticas)

Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales (expresiones cuadráticas)

Fracciones parciales

Son expresiones de la siguiente forma $\frac{f(x)}{g(x)}$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomicas y el $grad[f(x)] < grad[g(x)]$

En la función $g(x)$ se pueden presentar las siguientes situaciones

Factores cuadráticos distintos

A los factores de la forma $a_i x^2 + b_i x + c_i$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{a_n x^2 + b_n x + c_n}$$

Donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ y $B_1, B_2, \dots, B_n$ son constantes

Factores cuadráticos repetidos

Al factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ y $B_1, B_2, \dots, B_n$ son constantes

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de la siguiente expresión

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Solución

Mediante las fracciones parciales

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = T^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{s}{(s^2+1)} - \frac{1}{3}\frac{s}{(s^2+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{3}T^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} - \frac{1}{3}T^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{3}cos x - \frac{1}{3}cos 2x$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de la siguiente expresión

$$\frac{(s^2+3s)}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

Solución

Mediante las fracciones parciales

$$T^{-1}\left\{\frac{(s^2+3s)}{(s+1)^2(s^2+1)}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}-T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+\frac{1}{2}T^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\}$$
$$-\frac{3}{2}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{(s^2+3s)}{(s+1)^2(s^2+1)}\right\}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}-\mathrm{xe}^{-\mathrm{x}}+\frac{1}{2}\cos\mathrm{x}-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\mathrm{x}$$