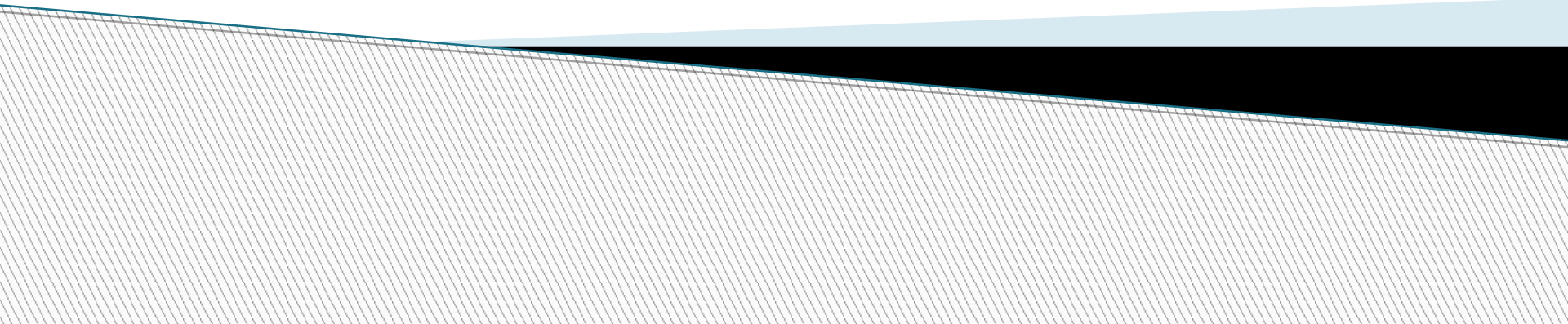


TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE



TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

La función original $f(x)$ se le llama transformada inversa y se denota por $T^{-1}(F)$ Es decir, se escribirá $f(x) = T^{-1}(F)$

Propiedad 1. $T^{-1}[kF(s)] = kT^{-1}[F(s)]$ Donde k es una constante cualquiera.

Propiedad 2. (Linealidad). La transformación de Laplace es una operación lineal, es decir:

$$T^{-1}[aF(s) \pm bG(s)] = aT^{-1}[F(s)] \pm bT^{-1}[G(s)]$$

Donde, a y b son constantes.

Propiedad 3. (Traslación). Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$

$$\text{Entonces } T^{-1}[F(s - a)] = e^{ax} f(x)$$

Propiedad 4. (Cambio de escala). Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces,

$$T^{-1}[F(as)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

Teorema de las derivadas: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces

$$T^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n x^n f(x)$$

Teorema de las integrales: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces

$$T^{-1}\left[\int_s^{\infty} f(u) du\right] = \frac{F(x)}{x}$$

Teorema de multiplicación por s: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ y $f(0) = 0$ entonces

$$T^{-1}[sF(s)] = f'(x)$$

Teorema de división por s: Si $T^{-1}[F(s)] = f(x)$ entonces

$$T^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^x f(u) du$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{2}{(s+4)}$$

Desarrollo

Tomamos las fracciones parciales del ejemplo anterior

$$T^{-1}\left\{\frac{2}{(s+4)}\right\} = 2T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{2}{(s+4)}\right\} = 2e^{-4x}$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{3}{(s-1)^2}$$

Desarrollo

$$T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} = 3T^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

Mediante las propiedades de las transformadas

$$T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} = 3xe^x$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{s + 2}{s^2 + 4}$$

Desarrollo

$$T^{-1} \left\{ \frac{s + 2}{s^2 + 4} \right\} = T^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\} + T^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\}$$

Mediante las propiedades de las transformadas

$$T^{-1} \left\{ \frac{s + 2}{s^2 + 4} \right\} = \cos 2x + \text{sen} 2x$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{3s + 4}{(s - 1)^2 + 9}$$

Desarrollo

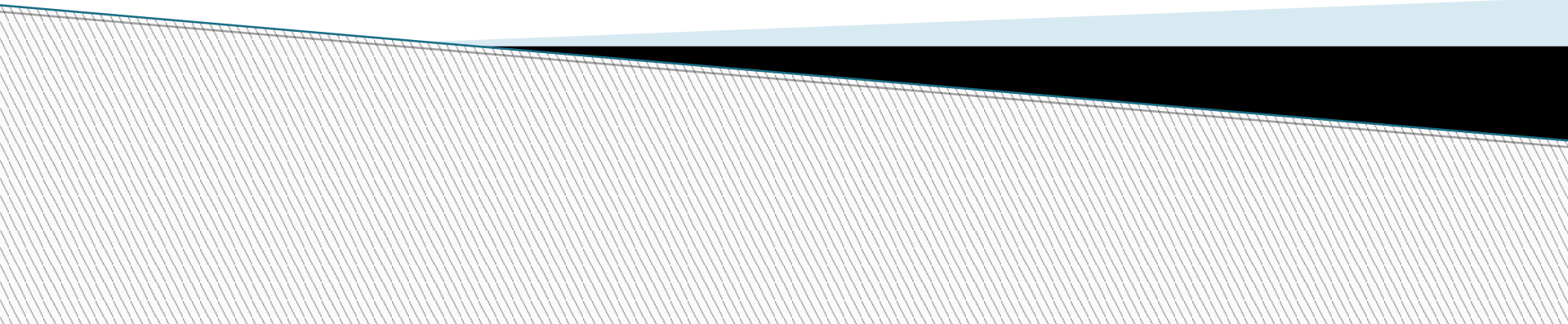
$$T^{-1} \left\{ \frac{3s + 4}{(s - 1)^2 + 9} \right\} = T^{-1} \left\{ \frac{3s - 3 + 7}{(s - 1)^2 + 9} \right\}$$

$$T^{-1} \left\{ \frac{3s + 4}{(s - 1)^2 + 9} \right\} = 3T^{-1} \left\{ \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 9} \right\} + \frac{7}{3} T^{-1} \left\{ \frac{3}{(s - 1)^2 + 9} \right\}$$

Mediante las propiedades de las transformadas

$$T^{-1} \left\{ \frac{3s + 4}{(s - 1)^2 + 9} \right\} = 3e^x \cos 3x + \frac{7}{3} e^x \operatorname{sen} 3x$$

Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales (funciones con raíces reales)



Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales (funciones con raíces reales)

Fracciones parciales

Son expresiones de la siguiente forma $\frac{f(x)}{g(x)}$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas y el $\text{grad}[f(x)] < \text{grad}[g(x)]$

En la función $g(x)$ se pueden presentar las siguientes situaciones

Factores lineales distintos

A los factores de la forma $a_i x + b_i$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_n x + b_n}$$

Donde A_1, A_2, \dots, A_n son constantes

Factores lineales repetidos

Al factor de la forma $(ax + b)^n$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

Donde A_1, A_2, \dots, A_n son constantes

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

$$\frac{s}{(s+1)(s+4)}$$

Desarrollo

Tomamos las fracciones parciales

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+4)}\right\} = T^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+4)}\right\} = \frac{1}{3}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} + \frac{2}{3}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}$$

$$T^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+4)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-4x}$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace

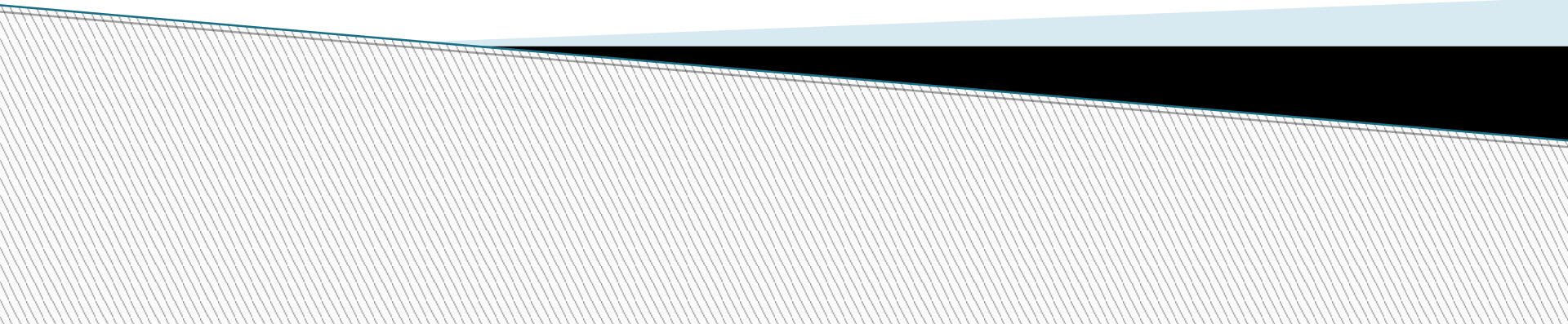
$$\frac{3}{(s-1)^2(s+2)}$$

Desarrollo

Tomamos las fracciones parciales

$$\begin{aligned} T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2(s+2)}\right\} \\ = -\frac{1}{9}T^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{3}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + \frac{1}{9}T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} \\ T^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2(s+2)}\right\} = -\frac{1}{9}e^x + \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{9}e^{-2x} \end{aligned}$$

Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales (expresiones cuadráticas)



Transformada Inversa de Laplace por fracciones parciales (expresiones cuadráticas)

Fracciones parciales

Son expresiones de la siguiente forma $\frac{f(x)}{g(x)}$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas y el $\text{grad}[f(x)] < \text{grad}[g(x)]$

En la función $g(x)$ se pueden presentar las siguientes situaciones

Factores cuadráticos distintos

A los factores de la forma $a_i x^2 + b_i x + c_i$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{a_n x^2 + b_n x + c_n}$$

Donde A_1, A_2, \dots, A_n y B_1, B_2, \dots, B_n son constantes

Factores cuadráticos repetidos

Al factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$ se le asocia una expresión

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donde A_1, A_2, \dots, A_n y B_1, B_2, \dots, B_n son constantes

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de la siguiente expresión

$$\frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Solución

Mediante las fracciones parciales

$$T^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \right\} = T^{-1} \left\{ \frac{1}{3} \frac{s}{(s^2 + 1)} - \frac{1}{3} \frac{s}{(s^2 + 4)} \right\}$$
$$T^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \right\} = \frac{1}{3} T^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)} \right\} - \frac{1}{3} T^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 4)} \right\}$$

$$T^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \right\} = \frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de la siguiente expresión

$$\frac{(s^2 + 3s)}{(s + 1)^2(s^2 + 1)}$$

Solución

Mediante las fracciones parciales

$$\begin{aligned} T^{-1} \left\{ \frac{(s^2 + 3s)}{(s + 1)^2(s^2 + 1)} \right\} \\ = -\frac{1}{2} T^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 1)} \right\} - T^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 1)^2} \right\} + \frac{1}{2} T^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)} \right\} \\ - \frac{3}{2} T^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)} \right\} \end{aligned}$$

$$T^{-1} \left\{ \frac{(s^2 + 3s)}{(s + 1)^2(s^2 + 1)} \right\} = -\frac{1}{2} e^{-x} - x e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{2} \operatorname{sen} x$$