



**COMPRESIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
MEDIANTE EL SOFTWARE GEOGEBRA**

**MÓDULO DE APRENDIZAJE ENMARCADO EN EL MODELO DE
RAZONAMIENTO DE VAN HIELE**

**Autores:
JAVIER ANTONIO RÍOS RIVERA
ANUAR DE JESÚS OYOLA CHARRY**

**SAHAGÚN, CÓRDOBA
2017**





INTRODUCCIÓN

Nuestra práctica docente en el municipio de Sahagún, departamento de Córdoba, Colombia nos ha permitido evidenciar que algunos estudiantes del grado décimo tienen dificultades para comprender los conceptos relacionados con las razones trigonométricas, dado que no logran comprender, en años anteriores, ciertos conceptos previos necesarios para la comprensión de las primeras ideas acerca de la trigonometría. En este sentido, notamos una desarticulación entre lo que se supone debe estar comprendido y las nuevas ideas que se deben desarrollar en el grado décimo.

De acuerdo con el modelo de van Hiele, se propusieron unos descriptores hipotéticos para reconocer en qué nivel se encontraban los estudiantes y qué conceptos se debían tener en cuenta para el paso de un nivel al siguiente; estos descriptores sirvieron de insumo para el diseño de las actividades del módulo enmarcadas en las fases de aprendizaje y la visualización de elementos elaborados en el software GeoGebra.

NIVELES SEGÚN MODELO DE VAN HIELE: DENOMINACIÓN Y DESCRIPCIÓN

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990) los niveles son una secuencia jerarquizada de etapas (ordenadas) por las que evoluciona la comprensión de un estudiante. De acuerdo a lo anterior, estos niveles se describen a continuación:

Nivel 1: Visualización o reconocimiento.

En este nivel los estudiantes perciben las figuras como un todo sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes (MEN, 1998). Es decir, se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes; se describen por su apariencia física mediante características meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno. “En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos”. (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 307).

Nivel 2: Análisis.

En este nivel los estudiantes perciben las componentes y propiedades de los objetos y figuras como condiciones necesarias. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación efectuada durante trabajos prácticos (MEN, 1998). En este nivel “los estudiantes han cambiado su forma de mirar las figuras geométricas”. (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 308). Es decir, son conscientes que están formadas por elementos y propiedades.

Por ejemplo: si un estudiante ve que un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, que las diagonales son de la misma longitud, y que los lados opuestos también son de la misma longitud, se reconoce la igualdad de los pares de lados opuestos del paralelogramo general (MEN, 1998); sin embargo, el estudiante es incapaz de observar el rectángulo como un paralelogramo particular.

Nivel 3: Ordenación o clasificación.

En este nivel los estudiantes describen las figuras de manera formal, es decir, pueden señalar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva a entender el significado de las



definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren. “No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 309). Los estudiantes realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado (MEN, 1998). Esto quiere decir que reconocen cómo unas propiedades se derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.

Nivel 4: Deducción formal.

En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, pues los estudiantes ven su necesidad para justificar las proposiciones planteadas; además, se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas. “Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 310). Es decir, se comprende cómo se puede llegar a resultados similares a partir de proposiciones o premisas distintas, lo que permite entender que se pueden realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado; en este nivel, “aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones” (MEN, 1998, p. 39).

Nivel 5: Rigor.

En este nivel, el estudiante conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos, los cuales se pueden analizar para comparar diferentes geometrías. Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático (MEN, 1998).

Aplicaciones didácticas del software GeoGebra.

Las siguientes descripciones de Benítez, Herrera, Salas y Cuenca (2009), son algunas características didácticas del software GeoGebra:

- Permite lograr el dominio del aprendizaje para el reforzamiento de los discernimientos en los estudiantes.



- Permite realizar procesos de aprendizaje con la finalidad de descubrir las capacidades intelectuales de los estudiantes.
- Permite generar procesos de actualización.
- Favorece las clases para que sean más creativas, dinámicas y didácticas, proporcionando una mejor concentración por parte de los estudiantes.

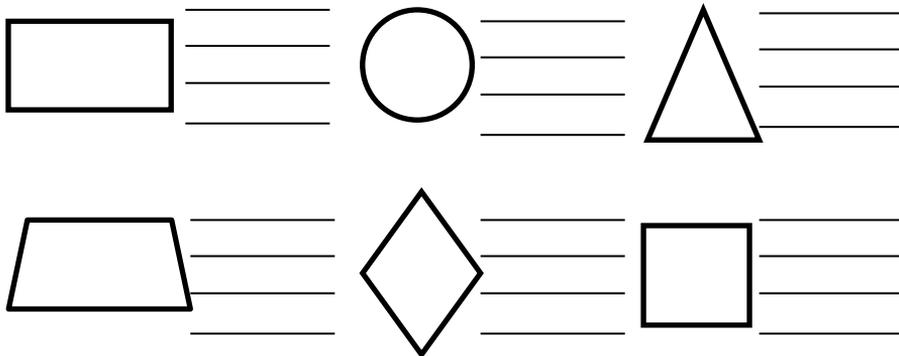
Actividades del módulo de aprendizaje

Nivel 0 (Predescriptivo)

- Identifica características de triángulos y otras figuras geométricas (reconocimiento de vértices, lados y ángulos).
- Reconoce la clasificación de los triángulos según la medida de los lados.
- Reconoce la clasificación de los triángulos según la medida de los ángulos.
- Reconoce el concepto de razón.

Fase 1: Información

1. Establezca el nombre de cada figura plana y descríbala.



2. Diseñe un mapa conceptual a partir de los conceptos de las figuras anteriores.



3. Relacione cada definición con el triángulo y nombre correspondiente.

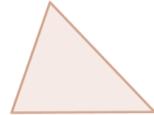
Triángulo Isósceles

Tiene 3 lados iguales



Triángulo Equilátero

Tiene 3 lados diferentes



Triángulo Escaleno

Tiene 2 lados iguales



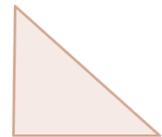
4. Relacione cada definición con el triángulo y nombre correspondiente.

Triángulo Obtusángulo Uno de sus ángulos es recto



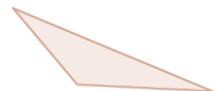
Triángulo Acutángulo

Uno de sus ángulos es obtuso



Triángulo Rectángulo

Sus tres ángulos son agudos

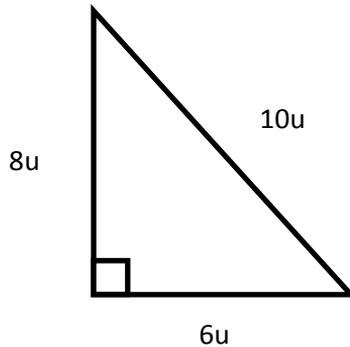


Aporte de información: Una razón matemática es el cociente entre dos medidas de diferentes magnitudes, generalmente se expresa como a es a b. Una razón está compuesta por dos términos así: $\frac{a}{b}$, donde a es el antecedente y b es el consecuente; ejemplo: $\frac{3}{4}$; 3 es el antecedente y 4 es el consecuente.

Esta razón se puede escribir 3:4 o $\frac{3}{4}$ y se lee **tres** es a **cuatro**.

Una razón también se puede expresar como el cociente entre el antecedente y el consecuente; es decir, $3:4 = 0,75$

5. Determine todas las razones posibles que se puedan establecer en el siguiente triángulo rectángulo.



Fase 2: Orientación dirigida

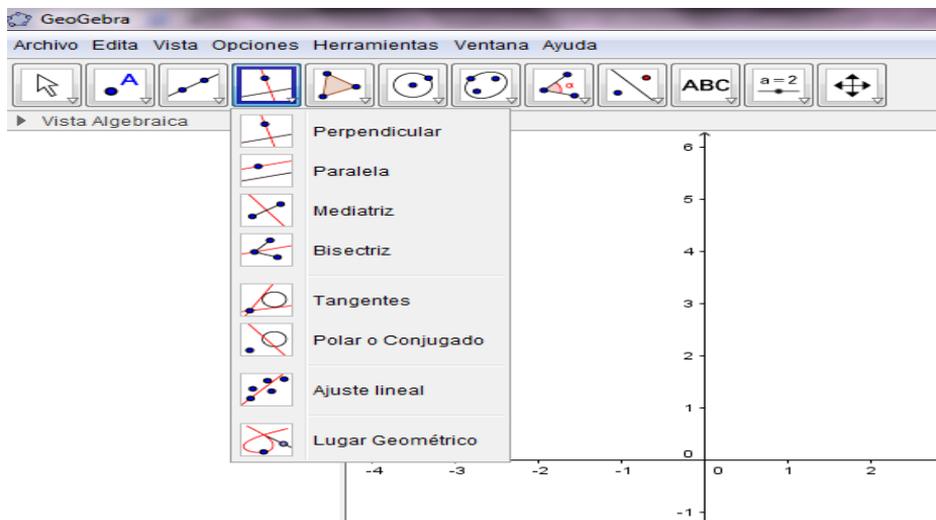
Aporte de información:

Para iniciar con el software GeoGebra, hacer doble clic sobre el ícono que se encuentra en el escritorio de su PC (si no lo encuentra, acceda desde Inicio/Todos los programas/GeoGebra).

Debe pulsar el botón maximizar para que pueda trabajar cómodamente.



Cada uno de los botones que está observando (en la llamada *Barra de Herramientas*) permite desplegar un menú diferente. Así





1. Utilice el Software GeoGebra para construir un cuadrado y un triángulo rectángulo. Para ello, siga los siguientes pasos:

PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN CUADRADO EN GEOGEBRA

Ingrese a la herramienta GeoGebra y oculte los ejes, dando clic en vista. Ya tiene la pantalla lista para la construcción del cuadrado, así:

1. Dé clic en las rectas (segmento entre dos puntos), para determinar el lado del cuadrado, que puede ser de cualquier medida o dirección. Llame los puntos del segmento A y B.
2. Recuerde que los cuadrados tienen ángulos interiores rectos, por lo tanto, puede crear rectas perpendiculares en el punto A y en el punto B. Luego, diríjase a rectas perpendiculares y haga clic. Para aplicar esta herramienta, haga clic en el segmento AB y determine dos rectas perpendiculares en los puntos A y B respectivamente.
3. Creadas las rectas perpendiculares, diríjase a la herramienta circunferencia y dé clic en compás; diríjase al segmento en el punto B (dé clic). Realice una circunferencia de radio AB.
4. Diríjase a la herramienta punto (intersección entre dos objetos). Toque la circunferencia y la perpendicular que pasa por el punto B. Ahora ha creado el punto C.
5. Recuerde que los lados opuestos de un cuadrado son paralelos, por lo que debe dibujar una recta paralela que pase por el punto C. Debe seleccionar entonces la herramienta recta (rectas paralelas), dar clic en el segmento AB y el punto C, para obtener la paralela.
6. Diríjase a la herramienta punto (intersección entre dos objetos), para crear el nuevo punto, que es la intersección de la paralela y la perpendicular en el punto A.
7. Ahora debe dibujar su cuadrado como un polígono, para esto vaya a la herramienta triángulo (polígono) y una todos los puntos dando clic a cada uno de ellos.
8. Ahora, debe ocultar todas las líneas construidas; para esto debe dar clic en la herramienta desplazar vista gráfica (exponer/ocultar) y dé clic en todos los objetos utilizados y luego dé clic en la flechita para visualizar su cuadrado.
9. Para probar si es verdaderamente un cuadrado, dé clic en la herramienta ángulo (distancia o longitud) y puede medir cada lado con solo tocar cada par de puntos.



PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES EN GEOGEBRA

Ingrese a la herramienta GeoGebra y oculte los ejes, dando clic en vista. Ya tiene la pantalla lista para la construcción de un triángulo rectángulo:

1. Dé clic en la herramienta recta (segmento de longitud dada), para determinar el valor de uno de los lados del triángulo rectángulo. Llame el segmento AB.
2. Posteriormente, diríjase a la herramienta circunferencia (compás), dé clic en el punto A y construya una circunferencia de radio AB.
3. Ahora dé clic en la herramienta recta (rectas perpendiculares), a fin de crear una recta perpendicular al segmento en el punto A.
4. Debe marcar la intersección de la recta perpendicular y la circunferencia, dando clic en la herramienta punto (intersección); llame este punto C.
5. Por último, dé clic en la herramienta polígono y debe tocar todos los puntos creados.
6. Para comprobar que efectivamente es un triángulo rectángulo isósceles, dé clic en la herramienta ángulo para determinar las medidas de sus ángulos internos y de los lados del triángulo.

2. Con base en los pasos anteriores, construya un rectángulo, una circunferencia, un trapecio y un paralelogramo en GeoGebra. Describa los pasos que siguió en cada construcción.

3. Establezca comparaciones entre las diferentes figuras construidas en relación a sus formas, lados y ángulos.

4. Establezca el número de vértices, lados y ángulos de un cuadrado, un rectángulo y un triángulo.



Fase 3: Explicitación

Actividades

1. Construya en GeoGebra diferentes clases de triángulos. Explique el procedimiento para su construcción e identifique las características de cada uno.
2. Socialización de los procedimientos elaborados con relación a la construcción de triángulos en GeoGebra.
3. Realización de mapa conceptual grupal sobre la clasificación de los triángulos según la medida de los ángulos y la medida de los lados.

Fase 4: Orientación Libre

Actividades

1. Hacer una representación libre en GeoGebra, utilizando las clases de triángulos y otras figuras que se trabajaron en la fase de información.
2. Con base en esa representación, diseñe un cuento en el que involucre los conceptos aprendidos hasta el momento.

Fase 5: Integración

1. Cada estudiante expone su representación en GeoGebra y el cuento que construyó en la fase anterior.
2. De manera individual, cada estudiante responde las siguientes preguntas:

Los triángulos isósceles se caracterizan por:

- a. Tener dos ángulos congruentes (igual medida).
- b. Tener tres ángulos congruentes (igual medida).
- c. Tener tres lados congruentes (igual medida).
- d. Tener dos ángulos rectos.

El triángulo que tiene los 3 lados congruentes (igual medida) es

- El escaleno.
- El rectángulo.
- El equilátero.
- El isósceles

Un triángulo obtusángulo es aquel que:

- Tiene 3 ángulos agudos
- Un ángulo obtuso y dos ángulos agudos
- Un ángulo recto y dos ángulos agudos
- Un ángulo recto y dos ángulos obtusos

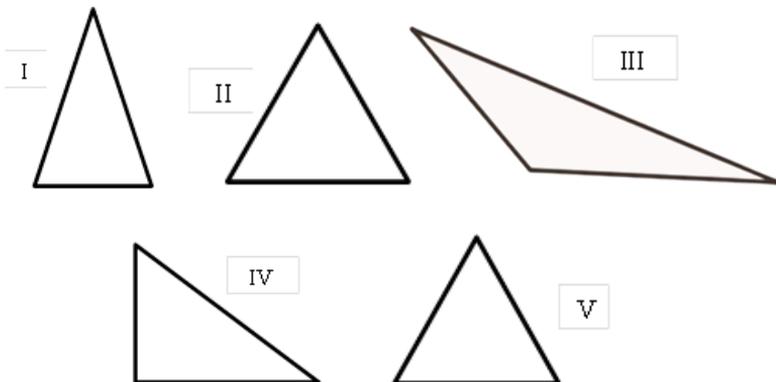
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre falsa? Un triángulo puede ser:

- Isósceles y Rectángulo
- Isósceles y Obtusángulo
- Isósceles y Acutángulo
- Equilátero y Obtusángulo

Un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales miden 45° cada uno, es un triángulo:

- Acutángulo
- Rectángulo
- Obtusángulo
- Escaleno

Responda las preguntas de acuerdo a las siguientes figuras.





De las anteriores figuras, la que representa un triángulo obtusángulo se relaciona con el número:

- a. I
- b. II
- c. III
- d. IV

La figura que representa un triángulo rectángulo se relaciona con el número:

- a. I
- b. II
- c. III
- d. IV

En las cinco figuras mostradas, dos son triángulos equiláteros; estas se relacionan con los números:

- a. I y V
- b. II y III
- c. II y IV
- d. II y I

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a. Las figuras I y II son triángulos escalenos.
- b. Las figuras I y II son triángulos rectángulos.
- c. Las figuras I y II son triángulos obtusángulos.
- d. Las figuras I y II son triángulos acutángulos.

Nivel 1 (Reconocimiento Visual)

El estudiante:

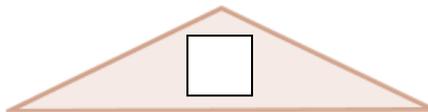
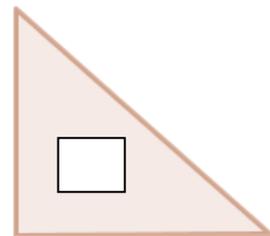
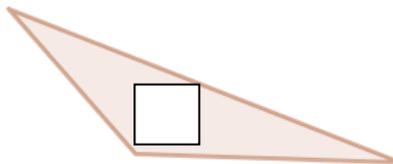
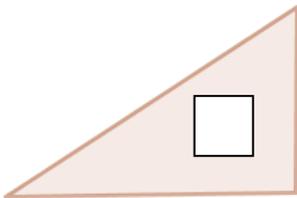
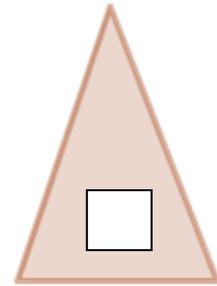
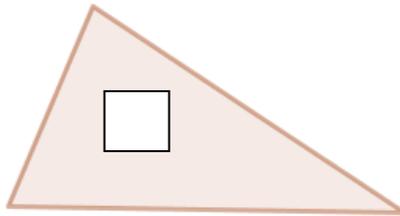
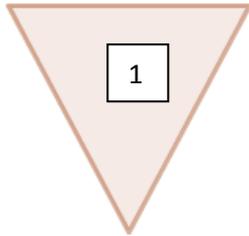
- Relaciona triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y ángulos.
- Reconoce que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .
- Reconoce los elementos de un triángulo rectángulo.
- Reconoce visualmente el teorema de Pitágoras.
- Reconoce los criterios de semejanza de triángulos.



Fase 1: Información

Actividades

1. Relacione los números de la tabla con los triángulos que se presentan a continuación. Observe el ejemplo.





Según la medida de los lados \ Según la medida de los ángulos	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo	1	2	3
Obtusángulo		4	5
Rectángulo		6	7

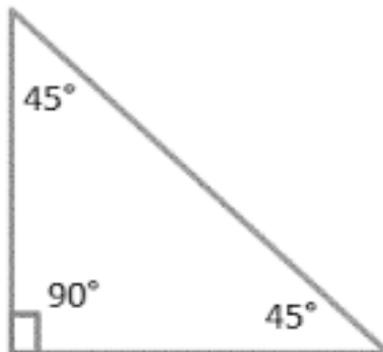
3. Construya en GeoGebra los siete triángulos anteriores. Además, explique el procedimiento para su construcción e identifique las características de cada uno.

Fase 2: Orientación Dirigida

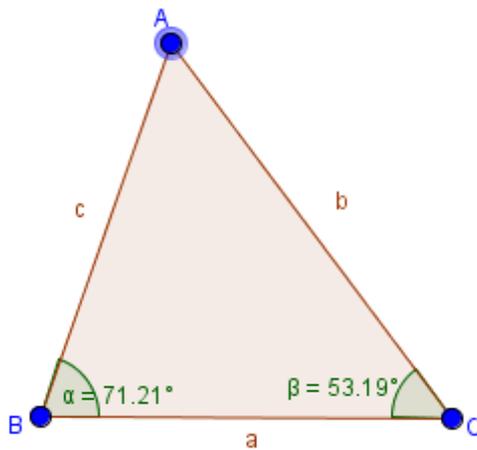
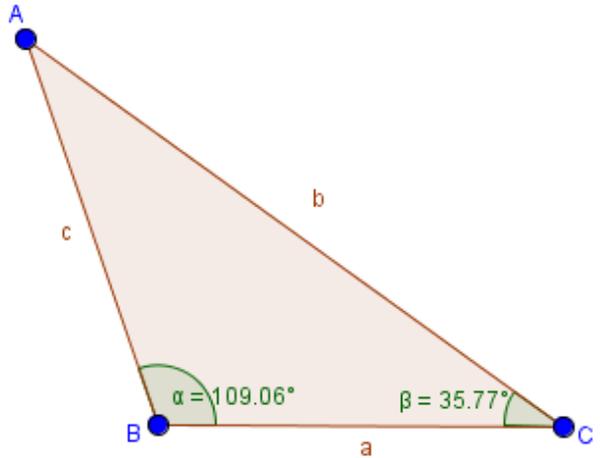
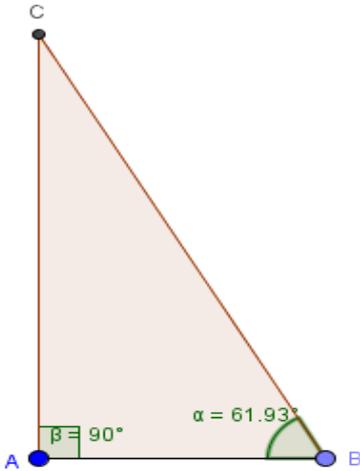
Actividades

Aporte de información Suma de los ángulos interiores de un triángulo

La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180° . Ejemplo:



1. Dados los siguientes triángulos, encuentre la medida de los ángulos desconocidos.



2. Utilice el software GeoGebra para construir diferentes triángulos y determine la medida de sus ángulos interiores para verificar que su suma es 180°

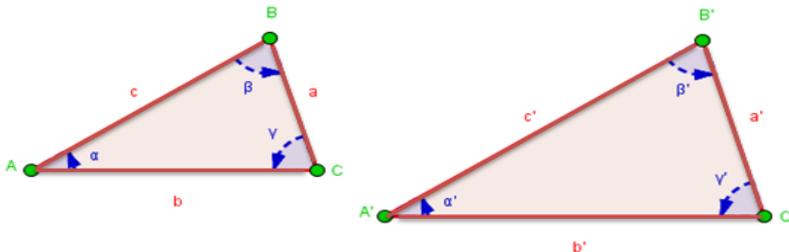
Aporte de Información

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales uno a uno, respectivamente; los lados opuestos a dichos ángulos son proporcionales. Para determinar la semejanza entre dos triángulos existen tres criterios que son los siguientes:

Primer Criterio de semejanza de triángulos: Ángulo – Ángulo (AA)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente iguales.

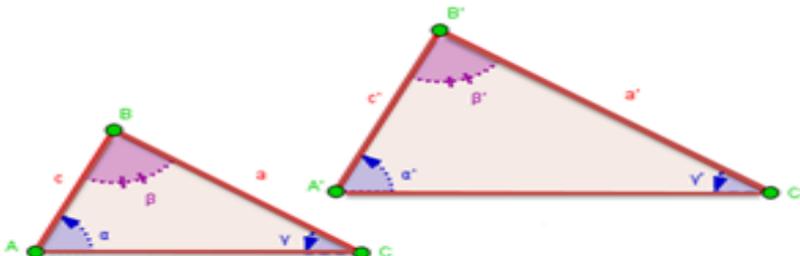
Si se dice que $\alpha \cong \alpha'$ y que el $\gamma \cong \gamma'$, entonces el $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



Segundo criterio de semejanza de triángulos: Lado-Ángulo-Lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales respectivamente y congruente el ángulo que forman.

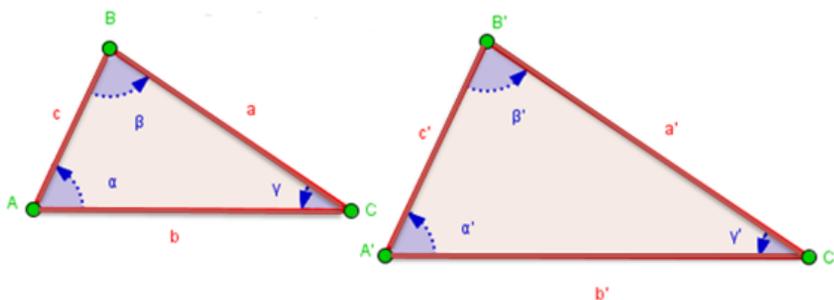
Si se dice que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ y que $\beta \cong \beta'$, entonces el $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



Tercer Criterio de semejanza de triángulos: Lado - Lado - Lado (LLL)

Dos triángulos son semejantes si sus tres lados son respectivamente proporcionales.

Si se dice que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



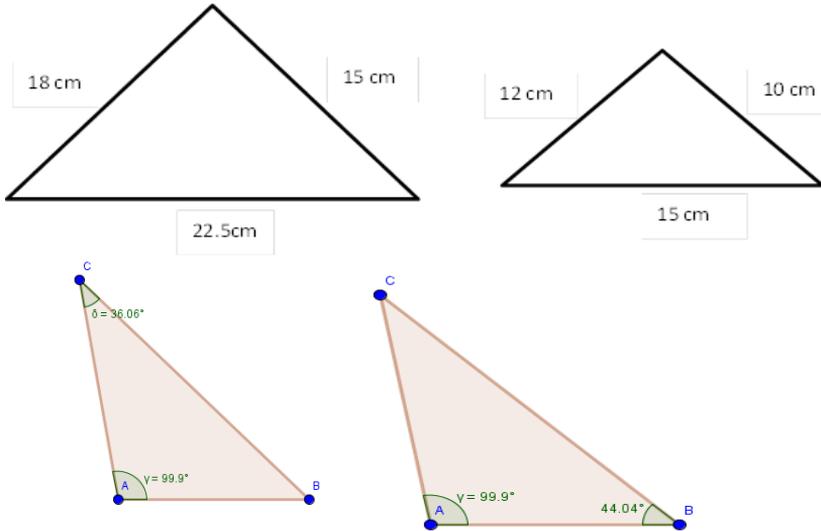
3. Utilice el software GeoGebra y construya triángulos semejantes por cada criterio de semejanza. Describa los pasos para la construcción de cada figura.

- Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.
- Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.
- Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.



Fase 3: Explicitación

1. Determine si los siguientes triángulos son semejantes y explique el criterio de semejanza respectivo.

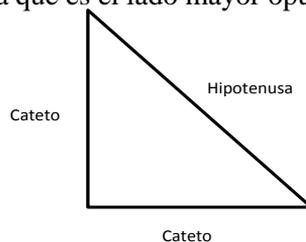


2. Socialización de los procedimientos realizados con relación a la explicación del criterio de semejanza en cada uno de los triángulos.

Aporte de Información:

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (90°); en cuanto a sus lados uno de ellos tiene mayor longitud y se llama hipotenusa y los otros dos son llamados catetos.

De los catetos se puede decir que son los lados del triángulo que forman el ángulo recto y de la hipotenusa que es el lado mayor opuesto al ángulo recto.

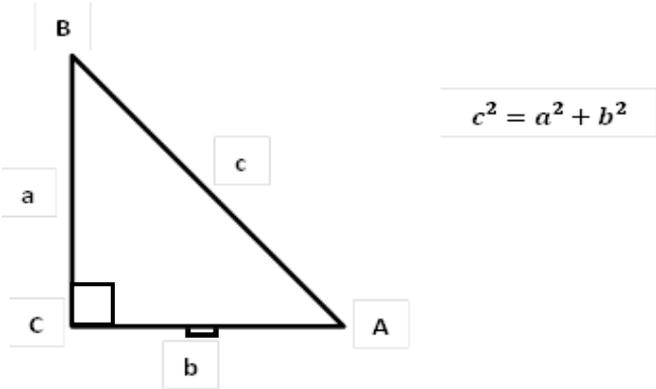


3. Construya diferentes triángulos rectángulos en GeoGebra y determine la medida de sus lados y de sus ángulos. Identifique los catetos y la hipotenusa de cada uno.

Aporte de Información

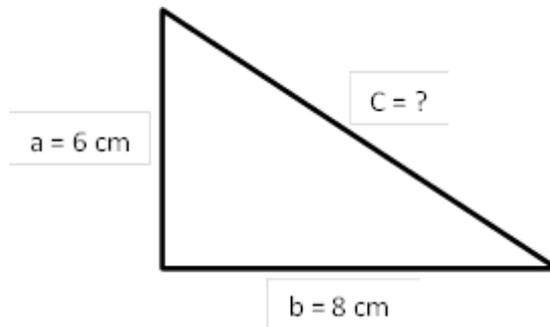
TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$c^2 = a^2 + b^2$

4. Halle el valor de la longitud desconocida en el siguiente triángulo rectángulo y, posteriormente, responda cada pregunta:





- a. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa en el triángulo?
- b. ¿Qué clase de triángulo según sus lados observa? ¿Por qué?
- c. ¿Qué características tiene un triángulo rectángulo?
- d. ¿Se podrá calcular el valor de los ángulos desconocidos con el teorema de Pitágoras? ¿Por qué?

5. Socialización de los conceptos y procedimientos que surgen de la construcción de triángulos rectángulos en GeoGebra.

Fase 4: Orientación Libre

Actividad

1. Los siguientes triángulos: el triángulo ABC tiene lados de medidas 8, 15 y 17 unidades y, el triángulo DEF, tiene lados de medidas 7, 23 y 25 unidades. Dibuje cada triángulo en GeoGebra señalando los catetos y la hipotenusa. Sustente si los triángulos son o no rectángulos.

2. Construya un triángulo rectángulo en GeoGebra. Construya un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Con base en la construcción anterior responda:

- a. ¿Cuál es el área de cada uno de los cuadrados?
- b. ¿Qué relación encuentra en el cuadrado construido sobre la hipotenusa y los construidos sobre los catetos?
- c. ¿Se cumple el teorema de Pitágoras? ¿Por qué?

Fase 5: Integración

1. Cada estudiante expone la construcción realizada en la fase anterior teniendo en cuenta los interrogantes realizados.

2. Responda, de forma individual, las siguientes preguntas:

Con respecto a la hipotenusa, es falso afirmar que:

- a. Forma parte de los elementos de un triángulo rectángulo.
- b. Es el lado de mayor longitud en un triángulo rectángulo.
- c. Todos los triángulos tiene hipotenusa.
- d. Es el lado opuesto al ángulo recto.



Un triángulo rectángulo tiene:

- Dos ángulos rectos.
- Dos ángulos agudos.
- Dos ángulos agudos y uno obtuso.
- Una hipotenusa y un ángulo llano.

Si en un triángulo rectángulo se desconoce un ángulo agudo, este puede hallarse:

- Sumando el ángulo recto con el agudo que se conoce.
- Sumando dos veces el ángulo agudo que se conoce.
- Sumando el ángulo recto con la longitud de la hipotenusa.
- Restando la medida del ángulo recto con la medida del ángulo agudo que se conoce.

En un triángulo, dos de sus ángulos internos miden 65° y 80° ; entonces el tercer ángulo mide:

- 35°
- 25°
- 55°
- 15°

Si se sabe que uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 27° , entonces el otro ángulo agudo mide:

- 53°
- 63°
- 33°
- 43°

Dado un triángulo equilátero, se puede afirmar que:

- Sus ángulos tienen diferente medida.
- Sus lados tienen diferente medida.
- Todos sus ángulos miden 60° .
- Tiene un ángulo recto.



Nivel 2 (Análisis)

El estudiante:

- Reconoce la demostración geométrica del teorema de Pitágoras.
- Aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor desconocido del lado de un triángulo rectángulo.
- Establece razones válidas en triángulos rectángulos semejantes.
- Establece relaciones entre catetos y la hipotenusa.
- Genera diferentes razones a partir de las medidas del triángulo.

Descriptor de separación:

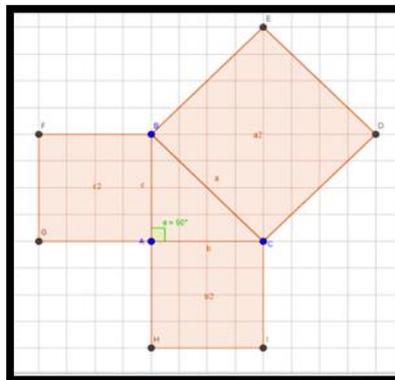
El estudiante:

No establece relaciones entre los catetos y la hipotenusa en triángulos rectángulos.

Fase 1: Información

Actividades

1. Observe la siguiente figura y luego responda cada interrogante:



¿Qué observa en la figura?

¿En el triángulo cuál de los lados representa la hipotenusa? ¿Por qué?



¿En el triángulo cuáles lados representan los catetos? ¿Por qué?

¿A cuál de los lados le corresponde el mayor número de cuadrados pequeños?

¿Cuántos cuadrados pequeños constituyen el cuadrado construido en el cateto c ?

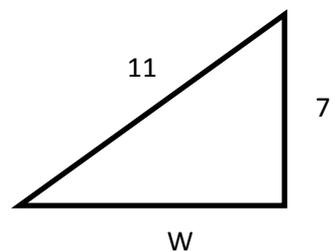
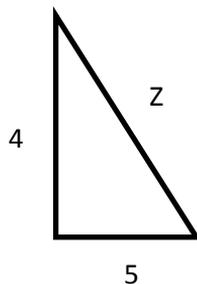
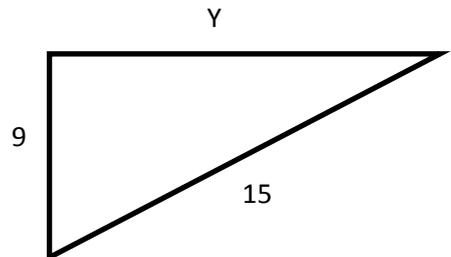
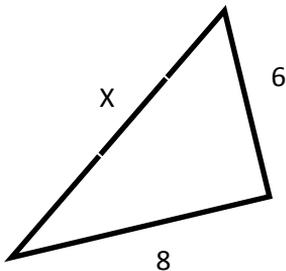
¿Cuántos cuadrados pequeños constituyen el cuadrado construido en el cateto b ?

¿Si se suma el número de cuadrados pequeños que conforman el cuadrado del cateto c , con el número de cuadrados pequeños que conforman el cuadrado del cateto b , que se puede concluir?

Fase 2: Orientación dirigida

Actividades

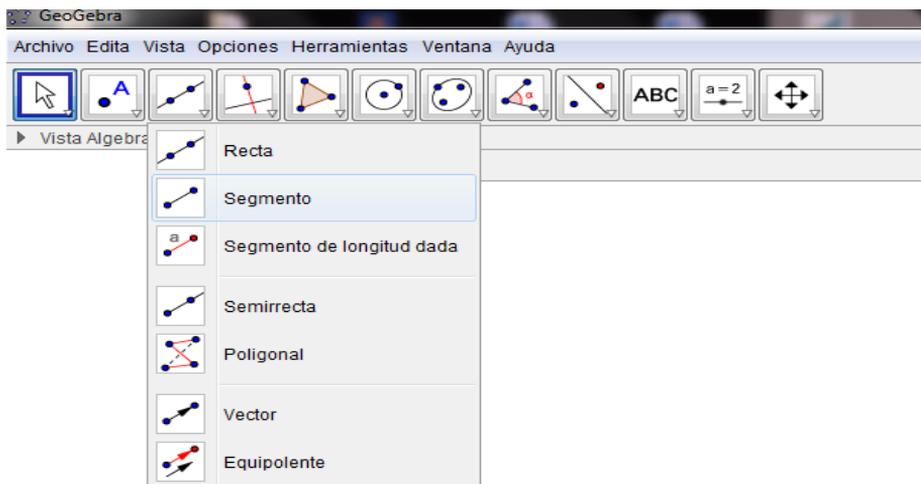
1. Halle el valor de la longitud desconocida en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.



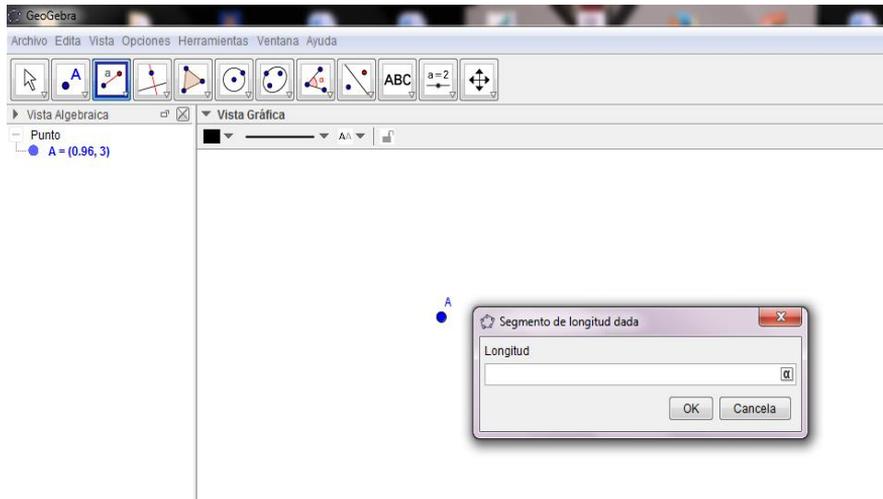
2. Utilice el software GeoGebra y construya un triángulo rectángulo cuyas medidas de los catetos sean 6 y 8 unidades respectivamente; verifique el valor de la hipotenusa teniendo en cuenta las herramientas del programa y la fórmula del teorema de Pitágoras. Veamos un ejemplo como apoyo.

Aporte de información

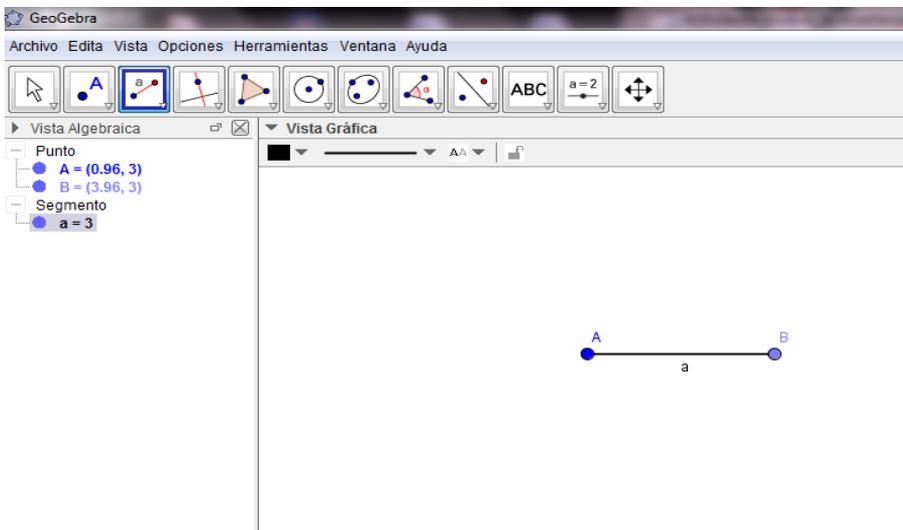
1. En la barra de herramientas elija segmento de longitud dada.



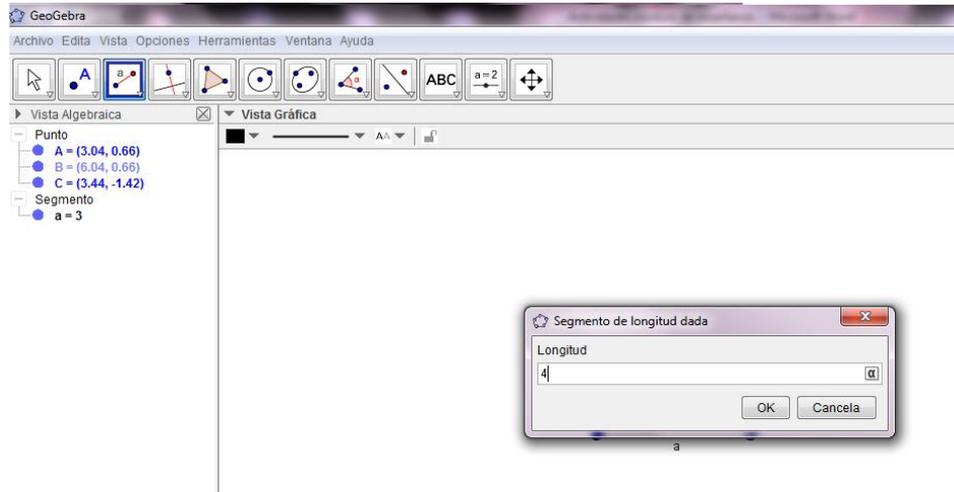
2. Agregue en este espacio la longitud requerida para el segmento:



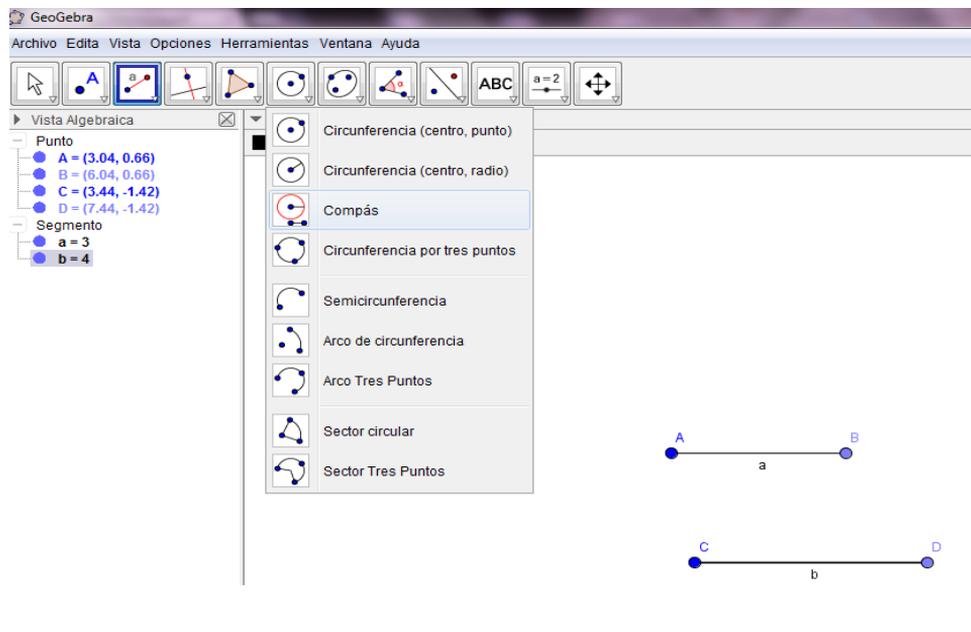
3. En este caso observe que la longitud del segmento es 3.



4. Agregue un nuevo segmento con la medida solicitada, en este caso 4:



5. Con los dos segmentos requeridos, seleccione la herramienta compás:



6. Dé clic en el punto A y cree el centro de la circunferencia de radio 3 (menor segmento).

GeoGebra

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica

Punto

- A = (3.04, 0.66)
- B = (6.04, 0.66)
- C = (3.44, -1.42)
- D = (7.44, -1.42)

Segmento

- a = 3
- b = 4

Vista Gráfica

Segmento a: Segmento [A, B]

Segmento b

7. Traslade la circunferencia al segmento más grande, cuyo centro ahora es C.

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica

Punto

- A = (3.1, 1.5)
- B = (6.1, 1.5)
- C = (6.32, -0.68)
- D = (10.32, -0.68)

Segmento

- f = 3
- g = 4

Vista Gráfica

Punto A

Segmento f

Segmento g

8. Haga clic en la herramienta **Elige y Mueve** para trasladar el segmento más pequeño, por fuera de la construcción.

GeoGebra

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Elige y Mueve

Gira en torno a un punto

- A = (5.04, 0.66)
- B = (6.04, 0.66)
- C = (3.44, -1.42)
- D = (7.44, -1.42)

Segmento

- a = 3
- b = 4

Vista Gráfica

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica

Vista Gráfica

Cónica

- $c: x^2 + y^2 - 6.88x + 2.84y = -4$

Punto

- A = (8.8, 3.6)
- B = (11.8, 3.6)
- C = (3.44, -1.42)
- D = (7.44, -1.42)

Segmento

- a = 3
- b = 4

Diagrama de construcción:

- Un segmento horizontal AB con longitud 'a'.
- Un segmento horizontal CD con longitud 'b'.
- Un círculo con centro C y radio 'c'.

9. Trace una perpendicular al segmento CD, que pase por el punto C:

Archivo Editar Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica

- Cónica
 - c: $x^2 + y^2 - 6.88x$
- Punto
 - A = (8.8, 3.6)
 - B = (11.8, 3.6)
 - C = (3.44, -1.42)
 - D = (7.44, -1.42)
- Segmento
 - a = 3
 - b = 4

Herramientas: Perpendicular, Paralela, Mediatriz, Bisectriz, Tangentes, Polar o Conjugado, Ajuste lineal, Lugar Geométrico

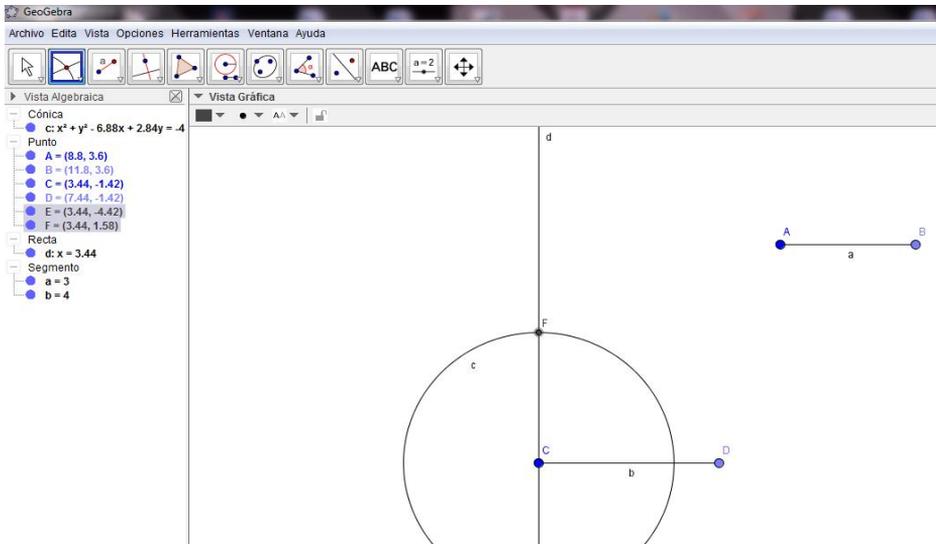
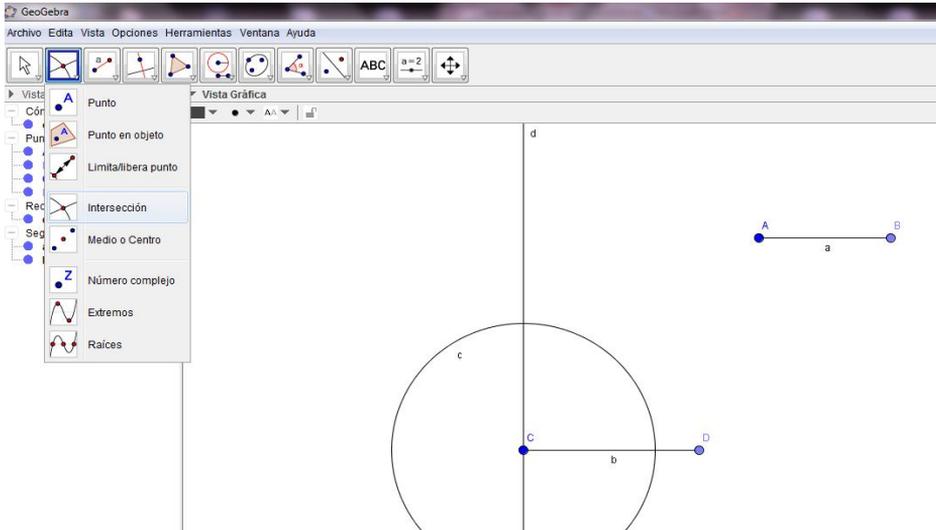
Archivo Editar Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica

- Cónica
 - c: $x^2 + y^2 - 6.88x + 2.84y = -4$
- Punto
 - A = (8.8, 3.6)
 - B = (11.8, 3.6)
 - C = (3.44, -1.42)
 - D = (7.44, -1.42)
- Recta
 - d: $x = 3.44$
- Segmento
 - a = 3
 - b = 4

Vista Gráfica

10. Haga clic en la herramienta intersección para crear el punto donde se intersectan la perpendicular y la circunferencia:



11. Se pueden ocultar los puntos que no se deseen, dando clic en los puntos azules que se encuentran en la izquierda de la pantalla.

GeoGebra interface showing the algebraic view on the left and the graphical view on the right. The algebraic view lists the following objects:

- Cónica: $c: x^2 + y^2 - 6.88x + 2.84y = -4$
- Punto:
 - A = (8.8, 3.6)
 - B = (11.8, 3.6)
 - C = (3.44, -1.42)
 - D = (7.44, -1.42)
 - E = (3.44, -4.42)
 - F = (3.44, 1.58)
- Recta: $d: x = 3.44$
- Segmento:
 - a = 3
 - b = 4

The graphical view shows a circle with center C and radius 5. A vertical line d passes through C. Point F is at the top of the circle. A horizontal segment AB is shown above the circle with length a.

12. Elija la herramienta polígono para generar el triángulo rectángulo, con solo tocar los puntos que serán los vértices. (En este caso el triángulo FCD).

GeoGebra interface showing the algebraic view on the left and the graphical view on the right. The algebraic view lists the following objects:

- Cónica: $c: x^2 + y^2 - 6.88x + 2.84y = -4$
- Punto:
 - A = (8.8, 3.6)
 - B = (11.8, 3.6)
 - C = (3.44, -1.42)
 - D = (7.44, -1.42)
 - E = (3.44, -4.42)
 - F = (3.44, 1.58)
- Recta: $d: x = 3.44$
- Segmento:
 - a = 3
 - b = 4
 - $c_1 = 5$
 - $d_1 = 3$
 - f = 4
- Triángulo:
 - polígono1 = 6

The graphical view shows the same circle and line as in the previous screenshot, but with a right-angled triangle FCD shaded in light orange. The triangle has vertices F, C, and D. Its sides are labeled d_1 , c_1 , and f.

13. Oculte la circunferencia y observe el triángulo rectángulo construido:

Archivo Editar Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica Vista Gráfica

Cónica
 $c: x^2 + y^2 - 6.88x + 2.84y = -4$

Punto
 A = (8.8, 3.6)
 B = (11.8, 3.6)
 C = (3.44, -1.42)
 D = (7.44, -1.42)
 E = (3.44, -4.42)
 F = (3.44, 1.58)

Recta
 $d: x = 3.44$

Segmento
 a = 3
 b = 4
 $c_1 = 5$
 $d_1 = 3$
 f = 4

Triángulo
 poligono1 = 6

14. Dé clic en la herramienta **Distancia o longitud** y verifique las medidas de los lados del triángulo.

Archivo Editar Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica Vista Gráfica

Cónica
 $c: x^2 + y^2 - 6.88x + 2.84y = -4$

Punto
 A = (8.8, 3.6)
 B = (11.8, 3.6)
 C = (3.44, -1.42)
 D = (7.44, -1.42)
 E = (3.44, -4.42)
 F = (3.44, 1.58)

Recta
 $d: x = 3.44$

Segmento
 a = 3
 b = 4
 $c_1 = 5$
 $d_1 = 3$
 f = 4

Triángulo
 poligono1 = 6

Ángulo
 Ángulo
 Ángulo dada su amplitud

Distancia o Longitud

Área

Pendiente

Lista {1,2}

GeoGebra

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

Vista Algebraica Vista Gráfica

Cónica
 $c: x^2 + y^2 - 6.88x + 2.84y = -4$

Número
 distanciaCD = 4
 distanciaFC = 3
 distanciaFD = 5

Punto
 A = (8.8, 3.6)
 B = (11.8, 3.6)
 C = (3.44, -1.42)
 D = (7.44, -1.42)
 E = (3.44, -4.42)
 F = (3.44, 1.58)

Recta
 d: $x = 3.44$

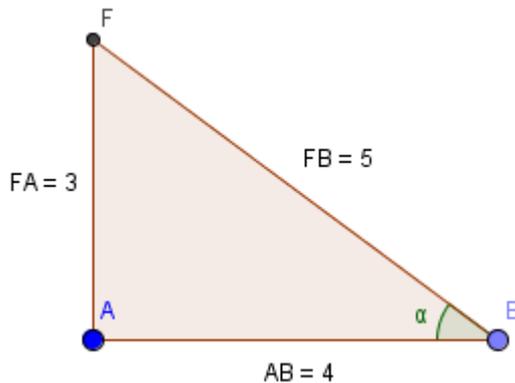
Segmento
 a = 3
 b = 4
 c₁ = 5
 d₁ = 3
 f = 4

Texto
 TextoCD = "CD = 4"
 TextoFC = "FC = 3"
 TextoFD = "FD = 5"

Triángulo
 polígono1 = 6

Aporte de información

En el siguiente triángulo, la medida del cateto opuesto con respecto al ángulo α es 3 unidades; la medida del cateto adyacente es 4 unidades y la medida de la hipotenusa es 5 unidades.



Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo anterior, las razones posibles que podemos establecer con respecto al ángulo α son:

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

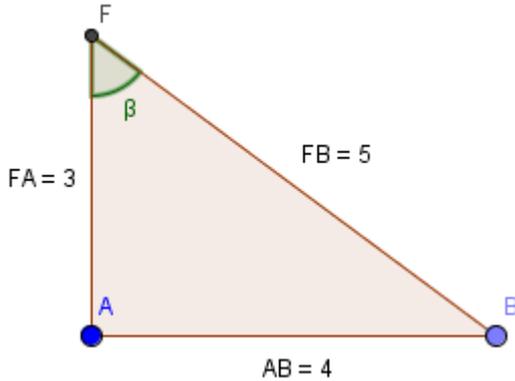
$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{3}$$

3. Con base en el siguiente triángulo rectángulo, halle las razones posibles teniendo en cuenta el ángulo β



$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

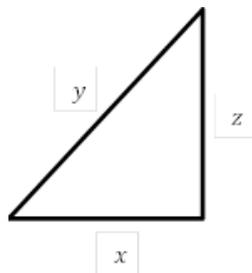
$$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Fase 3: Explicitación

Actividades

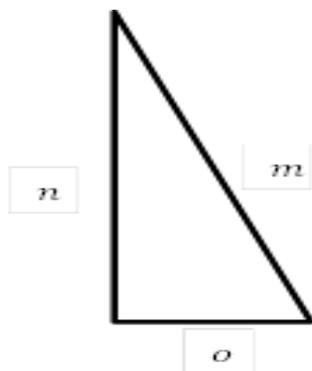
1. Realizar un mapa conceptual grupal sobre las principales ideas relacionadas con el teorema de Pitágoras.
2. Después de realizado el mapa conceptual, dos estudiantes socializan su interpretación del mismo ante el grupo.
3. En equipos de tres estudiantes, se determina el valor de verdad de los siguientes planteamientos y se justifican las respuestas, a partir de los siguientes triángulos rectángulos.

- a. La ecuación $x^2 = y^2 + z^2$ es:



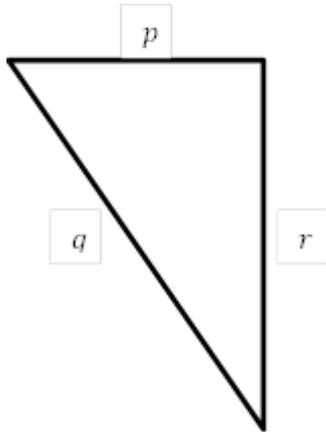
Falsa___ Verdadera___

- b. La ecuación $m^2 = n^2 + o^2$ es:



Falsa___ Verdadera___

c. La ecuación $p^2 = q^2 - r^2$ es



Falsa ___ Verdadera ___

Fase 4: Orientación libre

Actividades

1. Construya triángulos rectángulos y verifique en ellos las medidas de acuerdo al teorema de Pitágoras.
2. Considerando las medidas de los catetos y la hipotenusa, halle las siguientes razones:

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$\frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Formule un problema de aplicación del teorema de Pitágoras en situaciones de la vida diaria y resuélvalo.

Fase 5: Integración

Actividad

1. Construya en GeoGebra tres triángulos rectángulos semejantes y nombre cada uno de los ángulos internos. Explique el procedimiento para su construcción e identifique las características de cada uno.
2. Encuentre las siguientes razones, considerando el mismo ángulo congruente en cada uno de los triángulos.

Triángulo 1

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Triángulo 2

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Triángulo 3

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} =$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} =$$

$$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} =$$

$$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} =$$

3. Teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior, ¿qué puede concluir al respecto? Socialice sus conclusiones con el grupo en general.

4. Responda, de forma individual, las siguientes preguntas:



- Una escalera se encuentra apoyada en una pared de 6m de altura; el pie de la escalera está a 4m de la pared; por lo tanto, se puede afirmar que la longitud de la escalera es:

- a. 7,2 m
- b. 6,3 m
- c. 52 m
- d. 36,1 m

- Describa los pasos, de forma analítica, que considere necesarios para calcular la altura de un triángulo equilátero de 18 cm de lado. Se puede apoyar en el software GeoGebra.

Nivel 3 (Clasificación)

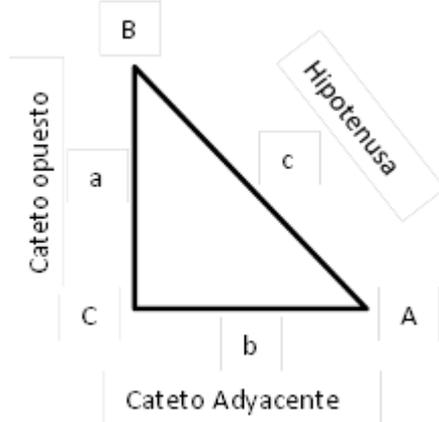
El estudiante:

- Reconoce que el seno de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- Reconoce que el coseno de un ángulo es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa
- Reconoce que la tangente de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
- Reconoce que la cosecante de un ángulo es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.
- Reconoce que la secante de un ángulo es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente
- Reconoce que la cotangente de un ángulo es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.
- Relaciona el seno con su inversa.
- Relaciona el coseno con su inversa.
- Relaciona la tangente con su inversa.
- Logra generalizar que las razones trigonométricas son equivalentes en triángulos semejantes y en ángulos determinados.

Fase 1: Información

Actividades

1. Establezca las razones posibles de acuerdo a los lados que componen un triángulo rectángulo como el siguiente. Recuerde tener en cuenta el ángulo A, en este caso:



Ejemplo: Cateto Opuesto/ Hipotenusa.

.....

.....

.....

2. Establezca las razones posibles para el ángulo B. Observe que los catetos opuesto y adyacente cambian.

.....

.....

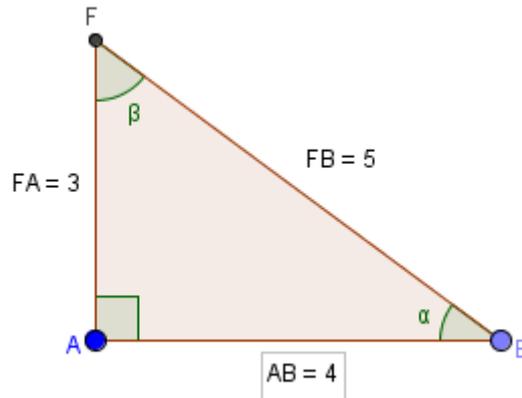
.....

3. Construya cualquier triángulo rectángulo en GeoGebra. Identifique uno de los ángulos agudos y establezca razones con respecto a la medida de sus catetos y su hipotenusa.

Fase 2: Orientación Dirigida

Aporte de información

Las razones trigonométricas son seis (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante). A continuación, puede apreciar las razones trigonométricas con respecto al ángulo α



$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\text{cotangente de } \alpha = \text{cot } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{4}{3}$$

$$\text{secante de } \alpha = \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{5}{4}$$

$$\text{cosecante de } \alpha = \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{5}{3}$$

Actividades

1. Teniendo en cuenta la información anterior, donde se definen las razones trigonométricas del triángulo rectángulo; relacione cada razón con el nombre correspondiente.

Cat. Opuesto/ Hipotenusa	COTANGENTE
Cat. Adyacente/ Hipotenusa	COSECANTE
Cat. Opuesto/ Cat. Adyacente	SECANTE
Hipotenusa / Cat. Opuesto	COSENO
Hipotenusa/ Cat. Adyacente	TANGENTE
Cat. Adyacente/ Cat. Opuesto	SENO

2. Teniendo en cuenta la definición de las razones trigonométricas del ángulo α , en el aporte de información, halle las razones trigonométricas para el ángulo β

$$\text{seno de } \beta = \sin \beta = \frac{\text{cateto opuesto a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \text{--}$$

$$\text{coseno de } \beta = \cos \beta = \frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \text{--}$$

$$\text{tangente de } \beta = \tan \beta = \frac{\text{cateto opuesto a } \beta}{\text{cateto adyacente a } \beta} = \text{--}$$

$$\text{cotangente de } \beta = \cot \beta = \frac{\text{cateto adyacente a } \beta}{\text{cateto opuesto a } \beta} = \text{---}$$

$$\text{secante de } \beta = \sec \beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \beta} = \text{---}$$

$$\text{cosecante de } \beta = \csc \beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \beta} = \text{---}$$

3. Construya un triángulo rectángulo cualquiera en GeoGebra; elija uno de los ángulos agudos y encuentre las razones trigonométricas.

4. Construya en GeoGebra un triángulo rectángulo que cumpla con la condición dada y, a partir de la construcción, encuentre las demás razones trigonométricas del ángulo α :

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{8}{5}$$

Fase 3: Explicitar

Actividades

1. Realizar un mapa conceptual grupal sobre las principales ideas relacionadas con las razones trigonométricas.
2. Después de realizado el mapa conceptual, dos estudiantes socializan su interpretación del mismo ante el grupo.



Fase 4: Orientación Libre

Actividades

1. Construya triángulos rectángulos en GeoGebra y determine las razones trigonométricas, considerando los dos ángulos agudos de cada uno.
2. Considerando las medidas de los catetos y la hipotenusa de alguno de los triángulos, junto con un ángulo agudo determinado, halle las siguientes razones y expresaselas en forma decimal. Posteriormente, establezca una conclusión al respecto.

$$\text{sen}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{cos}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{tan}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{ctg}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{sec}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{csc}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} =$$

3. Formule un problema de aplicación de las razones trigonométricas en situaciones de la vida diaria y resuélvalo.

Fase 5: Integración

Actividades

1. Construya en GeoGebra dos triángulos rectángulos semejantes y halle cada una de las razones trigonométricas para cada uno de los ángulos agudos. Explique el procedimiento para su construcción e identifique las características de cada uno.



2. Encuentre las siguientes razones trigonométricas, considerando las medidas de los catetos y la hipotenusa en cada triángulo, de uno de los ángulos congruentes. Exprese el resultado en forma decimal.

Triángulo 1**Triángulo 2**

$$\text{sen}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{cos}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{tan}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{cot}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{sec}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} =$$

$$\text{csc}(\text{ángulo}) = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----} =$$

3. Teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior, ¿qué puede concluir al respecto? Socialice sus conclusiones con el grupo en general.