**INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRJ**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA**
**CÁLCULO VETORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA**
**Professor Felipe Acker**
**parte 1 - o plano**

**Exercícios - sistemas de coordenadas**

1. Sejam $r_1$ a reta passando pelos pontos $(1,0)$ & $(3,4)$, $r_2$ a reta passando por $(1,0)$ & $(4,5)$. Ache as coordenadas do ponto interseção de $r_1$ com $r_2$.

2. Encontre as equações paramétricas, $x(t)$ e $y(t)$, da reta que passa pelos pontos $A = (1,2)$ e $B = (-3,4)$, de forma que o movimento seja uniforme (velocidade constante), com $(x(1), y(1)) = A$ e $(x(5), y(5)) = B$.

3. Seja $C$ o círculo de $\mathbb{R}^2$ definido pela equação $x^2 + y^2 = r^2$ e seja $P = (a,b)$ um ponto de $C$. Determine a equação da reta tangente a $C$ em $P$.

4. O gráfico de uma função é o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$, com $x$ no domínio de $f$. Seja $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2 \sin x$.

   (a) Determine uma equação em $x$ e $y$ que caracterize os pontos do gráfico de $f$.

   (b) Determine funções $x : [-5,5] \to \mathbb{R}$ e $y : [-5,5] \to \mathbb{R}$ tais que o gráfico de $f$ seja dado pelos pontos da forma $(x(t), y(t))$, com $t$ em $[-5,5]$.

   (c) Determine funções $x : [-10,10] \to \mathbb{R}$ e $y : [-10,10] \to \mathbb{R}$ tais que o gráfico de $f$ seja dado pelos pontos da forma $(x(t), y(t))$, com $t$ em $[-10,10]$.

5. Suponha que o ponto de coordenadas $(x(t), y(t))$ representa a extremidade móvel do ponteiro dos segundos de um relógio (suponha que o comprimento do ponteiro é 3). Se a origem do sistema de coordenadas está no centro do relógio, encontre as equações paramétricas x(t) e y(t) (o parâmetro t é o tempo (medido em segundos e a partir de 00:00)).

6. Calcule a área do triângulo de vértices $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ e $(c_1, c_2)$.

7. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Para cada número real $x$, seja $p(x)$ o ponto de $S^1$, outro que $(0, 1)$, interseção entre $S^1$ a reta passando por $(x, 0)$ e por $(0, 1)$. Determine, em função de $x$, as coordenadas de $p(x)$.

8. Considere um sistema de coordenadas em que os eixos, embora tenham unidades de mesmo tamanho, não sejam ortogonais. Suponha que o ângulo entre os eixos seja $\pi/3$. Se $P_1$ e $P_2$ são pontos do plano que têm em nosso sistema, coordenadas respectivamente iguais a $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, determine, em função de $x_1, y_1, x_2$ e $y_2$, a distância entre $P_1$ e $P_2$. Atenção: a definição de ângulo entre os eixos está deliberadamente vaga.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(u, v) = (au, bv)$ ($a$ e $b$ são dois números reais positivos, fixos). Sejam

$$D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\right\}, \qquad E = T(D).$$

   (a) Mostre que

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

   (b) Calcule a área de $E$.

10. Para cada número real positivo $r$, seja $n(r)$ o número de soluções $(a, b)$ em $\mathbb{Z}^2$ para $a^2 + b^2 \leq r^2$. Em outras palavras, $n(r)$ é o número de pares ordenados de coordenadas inteiras dentro do círculo de centro na origem e raio $r$. Calcule

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r)}{r^2}.$$

Justifique sua resposta.