Definitionen für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzen mit natürlichen Exponenten mit $n > 1$

Exponent oder Hochzahl

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}$$

n −mal
der gleiche Faktor a

Basis oder Grundzahl

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definitionen 1 bis 3:

Es wird vereinbart: a sei eine reelle Zahl:

(1) $\boldsymbol{a^1 \coloneqq a}$

(2) $\boldsymbol{a^0 \coloneqq 1}$ mit $a \neq 0$

(3) $\boldsymbol{a^{-n} \coloneqq \frac{1}{a^n}}$ mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$

Merke: $\mathbf{0^0}$ ist **keine** reelle Zahl.

Quadratwurzel und n-te Wurzel

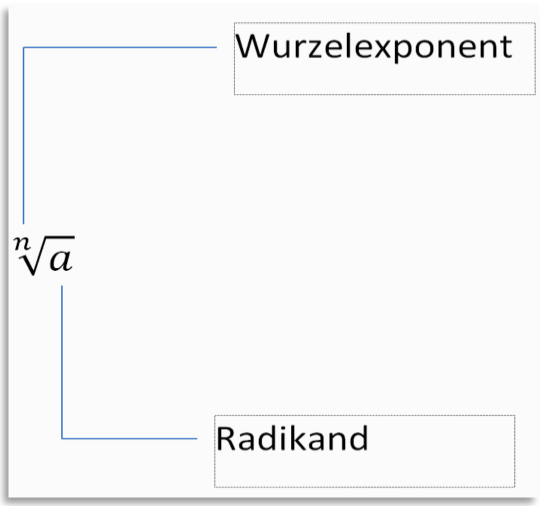
Definitionen 4 bis 6:

Es wird vereinbart: a sei eine **positive** reelle Zahl und n eine natürliche Zahl $n > 1$:

(4) $\boldsymbol{\sqrt{a}}$ ist diejenige **positive** Zahl x, für die gilt $x^2 = a$. Man nennt x die ***Quadratwurzel von a***.

(5) $\boldsymbol{\sqrt{0} := 0}$

(6) $\sqrt[n]{a}$ ist diejenige **positive** Zahl x, für die gilt $x^n = a$. Man nennt x die ***n-te Wurzel aus a***.



Merke: Für alle reellen Zahlen x: $\boldsymbol{\sqrt{x^2} = |x|}$.

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 7

Es wird vereinbart: a sei eine **positive** reelle Zahl. m und n seien ganze Zahlen, wobei $n > 1$:

(7) $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}} := \sqrt[n]{a^m}$

Logarithmus

Definition 8

Es wird vereinbart: z sei eine **positive** reelle Zahl. b sei eine **positive** reelle Zahl mit **Ausnahme** von $b = 1$:

(8) $\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{z}$ ist diejenige reelle Zahl x, für die $b^x = z$ gilt. Man nennt x den **Logarithmus** $\boldsymbol{z}$ **zur Basis** $\boldsymbol{b}$.

Potenzsätze für ganzzahlige Exponenten

Für alle reellen Zahlen a und b mit **Ausnahme** von $a = 0$ und $b = 0$ und ***für alle*** ganzzahligen Exponenten m und n:		
	gleiche Basen	*gleiche Exponenten*
Multiplizieren	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (1)	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (2)
	*Potenzen mit **gleicher Basis** werden **multipliziert**, indem man die Summe der Exponenten mit der gemeinsamen Basis potenziert.*	*Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden **multipliziert**, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.*
Dividieren	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (3)	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (4)
	*Potenzen mit **gleicher Basis** werden **dividiert**, indem man die Differenz der Exponenten mit der gemeinsamen Basis potenziert.*	*Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden **dividiert**, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.*
Potenzieren	$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$ (5)	
	*Potenzen werden **potenziert**, indem man das Produkt der Exponenten mit der Basis potenziert.*	

Potenzsätze für rationale Exponenten

Für alle reellen Zahlen a und b mit **Ausnahme** von $a = 0$ und $b = 0$ und ***für alle*** rationalen Exponenten m und n:		
	gleiche Basen	*gleiche Exponenten*
Multiplizieren	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (1)	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (2)
	*Potenzen mit **gleicher Basis** werden **multipliziert**, indem man die Summe der Exponenten mit der gemeinsamen Basis potenziert.*	*Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden **multipliziert**, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.*
Dividieren	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (3)	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (4)
	*Potenzen mit **gleicher Basis** werden **dividiert**, indem man die Differenz der Exponenten mit der gemeinsamen Basis potenziert.*	*Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden **dividiert**, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.*
Potenzieren	$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$ (5)	
	*Potenzen werden **potenziert**, indem man das Produkt der Exponenten mit der Basis potenziert.*	