Una parcela para Txuri
A plot for Laika
Un lopin pour Laika

AITZOL LASA[1]
MIGUEL R. WILHELMI[2]
OLGA BELLETICH[3]

Universidad Pública de Navarra – Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Resumen

Se presenta una situación didáctica para la introducción de la optimización de áreas en segundo ciclo de Educación Primaria (8-9 años), que articula la utilización de dos soportes físicos: uno, lápiz y papel; otro, software de geometría dinámica. Se introduce un modelo dinámico en un momento de exploración, una vez que la actividad matemática sobre papel excede el grado de maestría aritmética de los niños. La Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos constituyen el marco teórico del diseño de la situación y del análisis de los resultados. Las pruebas experimentales con niños de segundo y tercer ciclo de Educación Primaria confortan el análisis a priori. Asimismo, se identifican indicios de obstáculos didácticos.

Palabras clave: M*odelo dinámico. Situación didáctica. Enfoque ontosemiótico. Geometría. Medida. Educación Primaria.*

Abstract

This paper describes a didactical situation to introduce the optimization of areas in Primary Education (age 8-9). The mathematical activity is assisted by two physical instruments: first, paper and pencil; second, dynamic geometry software. Once the mathematical activity on paper exceeds the arithmetical skills of the kids, a dynamic model is used to explore new properties. The design for the didactical situation and the analysis of the results are given in terms of two didactical theories, i.e., the Theory of Didactical Situations in Mathematics and the Onto-semiotic Approach for mathematical knowledge and instruction. The experimental trial on groups age 8-9 and 10-11 strengthens the theoretical approach. In addition, didactical obstacles have been identified.

Keywords: *Dynamic model. Didactical situation. Onto-semiotic approach. Geometry. Measure. Primary Education.*

Résumé

Une situation didactique pour l'introduction de l'optimisation du calcul d'aires en Cours Élémentaire (CE1 et CE2) est présentée. On articule l'utilisation de deux milieux matériels: un, crayon-papier; autre, logiciel de géométrie dynamique. Un modèle dynamique pour l'exploration est introduit, au moment où l'activité mathématique avec le milieu crayon-papier dépasse la maitrise arithmétique des enfants. La Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques et l'Approche Onto-sémiotique de la

[1] Máster en Profesorado de Educación Secundaria, Universidad Pública de Navarra; aitzol.lasa@unavarra.es
[2] Doctor en Matemáticas, Universidad Pública de Navarra; miguelr.wilhelmi@unavarra.es
[3] Doctora en Pedagogía, Universidad Pública de Navarra; olga.belletich@unavarra.es

connaissance et l'enseignement mathématiques conforment le cadre théorique de l'élaboration de la situation et de l'analyse des donnés. La preuve de la contingence avec des enfants CE1 et CE2 conforte l'analyse a priori. On identifie aussi des indices d'obstacles didactiques.

Mots clés *: modèle dynamique, situation didactique, approche onto-sémiotique, géométrie, mesure, École Élémentaire.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo ejemplifica una actividad fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM; Brousseau, 2007) para identificar y describir, con la asistencia de un modelo dinámico, propiedades de figuras planas cuyas representaciones aritméticas y prealgebraicas exceden los conocimientos previstos de los niños en segundo ciclo (8-9 años) de Educación Primaria (EP).

Ribeiro (2013) propone una situación sobre papel cuadriculado, en el que los niños construyen figuras planas y discuten las propiedades de las mismas, con el objetivo de obtener la que optimiza el área para un perímetro dado. Los conocimientos aritméticos de los niños y el trabajo sobre una cuadrícula limitan la actividad a la obtención del cuadrado como figura óptima, dentro de la familia de cuadriláteros. Sin embargo, el autor no contempla una actividad matemática más allá de ese umbral aritmético.

Se propone aquí una fase de exploración, una vez que el análisis de las propiedades alcanza el límite aritmético de maestría del niño en los soportes físicos y sobre papel. De esta forma, el niño tiene a su alcance una nueva forma de control sobre sus producciones escritas, al poder contrastar los resultados obtenidos en distintos soportes y sobre distintos enfoques de los objetos matemáticos involucrados.

El diseño de esta situación didáctica, cuya puesta en escena se describe en términos de acción, formulación y validación, tiene por objetivo la enseñanza de la Geometría en EP. En particular, la secuencia propone un problema de optimización de áreas: Una parcela para Txuri4. El contraste experimental permite concluir que el uso integrado de materiales manipulables, lápiz-papel y software dinámico posibilita el desarrollo de una actividad matemática más rica y compleja que incluye las competencias geométricas clásicas.

En efecto, en EP los recursos materiales y la actividad mediante lápiz y papel determinan casi por completo la evolución de los aprendizajes de los niños, y el software cumple en

[4] Txuri es un nombre de perro común en vasco, idioma cooficial en la región donde se ha realizado la experiencia. En la traducción al inglés y al francés, se ha traducido por Laika, para facilitar la asociación en estos idiomas con el nombre de un perro.

la actualidad, en general, una función marginal en el sistema didáctico (Lasa y Wilhelmi, 2013a). A la hora de resolver problemas geométricos, existen tres momentos en los que la utilización de GeoGebra es pertinente: *exploración*, *ilustración* y *demostración* de una propiedad geométrica (Lasa y Wilhelmi, 2013b). En particular, GeoGebra cumple la función de *instrumento* tanto en el desarrollo de demostraciones matemáticas como en la resolución de problemas matemáticos.

Las teorías de la instrumentación consideran clave la noción de instrumento en el desarrollo de tareas matemáticas (Rabardel, 2002). Así, la actividad matemática se debe desarrollar en términos de un enfrentamiento con un medio (Brousseau, 2007). Ésta actividad incluye actividad física variada, comunicación verbal o gestual, y representación iconográfica o escrita. Junto con la TSDM, el Enfoque ontosemiótico (EOS) proporciona herramientas teóricas y metodológicas para el análisis del diseño de la actividad y de las producciones de los niños. La articulación de estos dos marcos teóricos ha sido fundamentada en diferentes trabajos (Wilhelmi, Font, Godino, 2005; Godino, Font, Contreras, Wilhelmi, 2006; Drijvers, Godino, Font, Trouche, 2013; Godino et al., 2013); en particular, Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (en prensa) fundamentan un sentido extenso de ingeniería didáctica que sirve para el diseño y puesta en marcha de procesos de estudio en matemáticas según diversos marcos teóricos.

Se presenta en primer lugar el marco teórico sobre el que se sustenta el diseño de la actividad, seguido de un análisis a priori. A continuación, se describe la situación y se presentan los resultados de la fase experimental. Por último, se cierra con una síntesis y conclusiones.

MARCO TEÓRICO

La TSDM (Brousseau, 2007) establece como hipótesis teórica la posibilidad de fijar los términos de una situación fundamental relativa a un conocimiento matemático determinado, que permita la adquisición de dicho conocimiento matemático por parte de los alumnos con un componente adidáctico esencial (Bloch, 1999). Estas situaciones se desarrollan en fases de acción, formulación, validación e institucionalización.

Los conocimientos funcionales producen respuestas adaptadas a un conjunto de situaciones que tratan de adaptarse a otras situaciones. Un conocimiento estable se considera un obstáculo cuando resiste a las contradicciones a las que se somete, provocando errores específicos, localizables, analizables y recurrentes, que siguen manifestándose durante mucho tiempo en diversos contextos.

La superación de obstáculos supone la programación sistemática de un enfrentamiento para la adquisición del nuevo conocimiento, que se adapte o sustituya al que se ha constituido en obstáculo. El docente debe entonces prever intervenciones específicas que, en particular, contemplen el cambio de registros y el uso de medios materiales diversos.

Una herramienta o artefacto es un objeto, normalmente físico pero a veces de otro tipo, que se utiliza para desempeñar una tarea de algún tipo (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013). Si añadimos a un artefacto las destrezas necesarias para desempeñar una tarea determinada por parte de quién lo manipula, éste pasa a ser un instrumento. Una vez que los niños desarrollan una forma estable de resolver un tipo específico de tareas, desarrollan un esquema de acción instrumentada (Trouche, 2000), que puede ayudar a superar obstáculos.

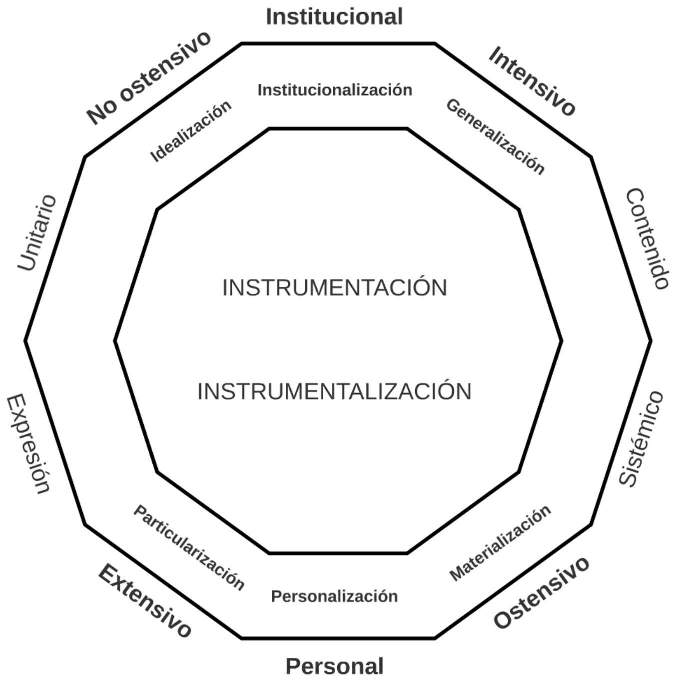
Desde el punto de vista de la Teoría de la génesis instrumental (TGI), el soporte físico, el lápiz y papel y el software de geometría dinámica constituyen instrumentos. La integración de éstos soportes ayuda en la comprensión del conocimiento matemático, puesto que el soporte material condiciona el significado del objeto matemático y la capacidad de modificación de los registros semióticos mejora éste aprendizaje (Duval, 1995).

La actividad matemática se concreta, según el Enfoque Ontosemiótico (EOS), en la manipulación de objetos matemáticos que tienen múltiples representaciones (Font, Godino y D'Amore, 2007; Font, 2007). Además, estos objetos tienen una realidad contextual, que se concreta en su funcionamiento atendiendo a distintas dualidades:

- *Extensivos* (particulares) / *intensivos* (genéricos).
- Significado *personal* (cognitivo) / *institucional* (epistemológico).
- Carácter *ostensivo* (material) / *no ostensivo* (ideal).
- *Unitario* / *sistémico*.
- *Contenido* / *expresión*.

Por ello, dentro del modelo ontosemiótico, tanto la instrumentación como la instrumentalización suponen una práctica operativa y discursiva determinada, motivada por una familia de situaciones, y que requiere un lenguaje propio, definiciones, enunciados y argumentos (figura 1).

Figura 1. El instrumento como práctica dentro del EOS.



Este trabajo se centra en tres dimensiones duales: institucional/personal, ostensivo/no ostensivo e intensivo/extensivo. Por un lado, el diseño de una situación didáctica tiene el propósito de *institucionalizar* un *significado de referencia* a partir de la puesta en marcha de fases de *acción*, *formulación* y *validación*, en los que los niños ponen en funcionamiento su *significado personal* para resolver la tarea (dualidad personal/institucional).

Por otro lado, la *materialización* de los objetos matemáticos empleados sobre una variedad de instrumentos (físicos, lápiz y papel, software de geometría dinámica) aparece en contraposición a los objetos matemáticos *ideales* que se quiere sean adquiridos por los alumnos (dualidad ostensivo/no ostensivo).

Por último, la utilización de un modelo dinámico permite centrar la actividad sobre *propiedades generales* de los objetos matemáticos involucrados, a la vez que facilita los medios para analizar un gran número de *casos particulares* (dualidad intensivo/extensivo).

La instrumentación del soporte material utilizado no es la única práctica operativa que determina la actividad matemática escolar, puesto que esta actividad requiere de la utilización del número y de representaciones algebraicas en sus distintos niveles. Si la actividad se centra en el soporte de lápiz y papel, el *umbral de maestría aritmético* corresponde a un *nivel 0 de algebrización* (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gozato y Wilhelmi, 2014), es decir, se corresponde con una ausencia de razonamiento algebraico en el que intervienen exclusivamente objetos extensivos. De hecho, en estas condiciones, se emplea el conteo y se aplican operaciones elementales sobre expresiones numéricas.

El *nivel 3 de algebrización* o de consolidación del álgebra, supone la generación de objetos intensivos con los que se opera a través de transformaciones simbólicas. Existen otros dos niveles en los que la utilización del álgebra es incipiente (*nivel 1*, se emplean intensivos en tareas estructurales) o intermedia (*nivel 2*, aparecen variables pero no se opera con ellas). En este trabajo se muestra cómo es posible hacer progresar a los alumnos en los niveles de algebrización desde una temprana edad.

En resumen, la TSDM y la TGI, junto con el EOS, permiten diseñar la propuesta y analizar los resultados obtenidos. Antes de ello, se realiza un análisis *a priori* sobre los conocimientos matemáticos previos en la escuela y las restricciones cognitivas.

ANÁLISIS A PRIORI

El currículo desarrolla los contenidos de descripción e identificación de figuras planas (polígonos y circunferencias) y cálculo de longitudes en segundo ciclo de EP. Además, a pesar de que el cálculo y la estimación de áreas corresponden propiamente a tercer ciclo de EP, los niños en segundo ciclo tienen un conocimiento intuitivo de la superficie.

El problema de optimización de área con perímetro conocido que se propone es coherente con estos contenidos curriculares, y además, permite el paso del número a la medida; paso que se puede iniciar propiamente al final del primer ciclo de Educación Primaria (7-8 años) mediante un problema de optimización (Lacasta, Malaspina, Pascual y Wilhelmi, 2009, 2010).

La adaptación de la actividad a segundo ciclo de EP contempla conocimientos consolidados que permiten a los niños abordar el problema propuesto, tales como el conteo, la superposición y la comparación y ordenación de superficies. Además, la actividad permite anticipar el desarrollo formal del cálculo de áreas mediante fórmulas, y determina condiciones que permiten la emergencia de las nociones de perímetro y área y su distinción.

Tal como se ha adelantado en el marco teórico, el *nivel 0 de algebrización* es característico del soporte de lápiz y papel en esta etapa, ya que el conteo, las operaciones aritméticas con números naturales y la interpretación gráfica de la unidad son actividades exclusivamente aritmético-figurativas. Por ello, cabe formular las siguientes preguntas:

- ¿Qué condiciones debe tener una situación que permita el progreso de los niños en EP (8-9 años) en los niveles de algebrización?
- ¿Qué función cumple el soporte material en este progreso?

Responder a estas preguntas concreta el objetivo de este trabajo. Se propone determinar una situación que, en su primera fase, identifique el *umbral de maestría aritmético* de los niños, y partir del mismo, permita avanzar en el descubrimiento de objetos intensivos; a saber, generalización de una familia de figuras geométricas que optimizan el área dado un perímetro determinado.

El avance hacia un *nivel 1 de algebrización* permite la discusión sobre objetos *no ostensivos* (desigualdad isoperimétrica) y su *institucionalización* (la circunferencia optimiza el área para un perímetro dado).

Por todo ello, la hipótesis de base es la siguiente:

> "Si en el aprendizaje de la geometría se introduce un soporte que permite privilegiar la dimensión intensiva de los objetos matemáticos involucrados, entonces los niños reconocen reglas o patrones, que les permite progresar en la adquisición del objeto como entidad no ostensiva (ideal)."

Este proceso de *abstracción* del razonamiento algebraico guarda relación con la tensión dual que sufren los objetos geométricos sobre el modelo dinámico, es decir, los polígonos y sus propiedades representan objetos particulares (extensivo), pero son a su vez representantes de una clase (intensivo).

SITUACIÓN: UNA PARCELA PARA TXURI

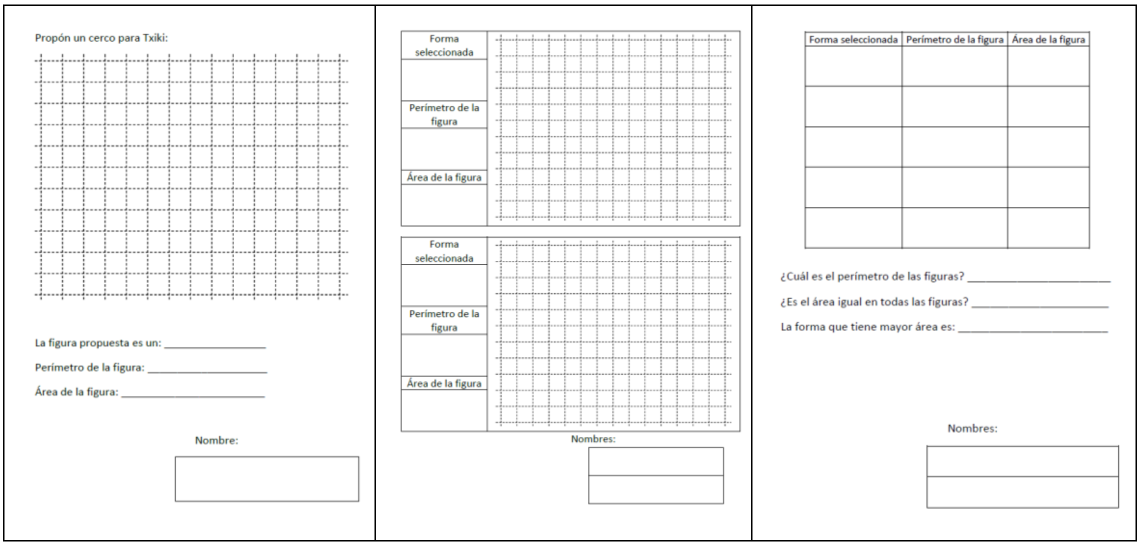
Se propone a los niños que determinen la forma que debería tener un cerco perimétrico de una longitud determinada para que la superficie encerrada sea máxima. El objetivo de la situación es hacer evolucionar los conocimientos por adaptación a diferentes soportes materiales.

Material

- *Material físico*. 20 unidades de valla, representando cada unidad un metro de valla. Una cuerda de 20 unidades de longitud.
- *Lápiz y papel*. Hoja de cuadrícula y lápiz (figura 2).
- *Software dinámico*. El niño introduce en la entrada de texto el nombre de la figura que quiere trabajar. A continuación, manipula el modelo de la figura plana seleccionada, comparando perímetro y área.

La construcción dinámica que modeliza el problema se puede consultar en Lasa y Wilhelmi (2014) y en el enlace GeoGebraTube (http://www.geogebratube.org/student/m210409).

Figura 2. Soporte de lápiz y papel



Objetivos de la maestra

La maestra tiene dos objetivos principales. Por un lado, que los niños conjeturen la desigualdad isoperimétrica, a partir de la exploración, comparación, clasificación y construcción de polígonos de hasta seis lados y de la circunferencia y el círculo, atendiendo a criterios de longitud de su perímetro y al área de su superficie. Por otro lado, el desarrollo de estrategias personales para estimar y medir longitudes y superficies de polígonos de manera exacta y aproximada, comparación de superficies por descomposición y medición, y explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada.

Fases de la situación

1. *Consigna*. Los niños reciben el enunciado del problema por parte de la maestra. La consigna de la actividad consiste en construir el mayor cerco posible con el vallado disponible. El enunciado es fácilmente reconocible por los niños y participa de sus núcleos de interés (*principio de globalización*):

   "Txuri necesita espacio para jugar con su pelota, pero si se queda suelta, se despista y no sabe volver. Por ello, queremos construir una parcela para Txuri, en la cual pueda jugar. Disponemos de 20 metros de valla, y con esos 20 metros de perímetro, tenemos que construir un cerco que cubra el mayor espacio posible".

2. *Acción por grupos con material físico*. Fase de acción para introducir el problema y momento de familiarización. Los niños proponen formas utilizando en material físico disponible (palillos, cuerdas) para representar el perímetro sobre el suelo. A través de la estimación, deben observar qué forma puede contener mayor superficie, sin medir todavía ninguna magnitud.
3. *Acción individual sobre papel*. Cada niño dibuja sobre la cuadrícula una propuesta de cerco para Txuri, respetando la restricción de perímetro. La medida de longitudes y áreas se realiza a partir de la cuadrícula, donde cada cuadradito constituye una unidad de superficie.
4. *Puesta en común de propuestas sobre papel*. Fase de formulación en la cual los niños deben comunicar su propuesta y compararla con la de sus compañeros. Como resultado a esta discusión, el grupo debe seleccionar, de entre las propuestas, la figura que optimiza la superficie.
5. *Acción por parejas con modelo dinámico*. Los niños completan el cuestionario sobre formas planas con la asistencia del modelo dinámico. El primer niño selecciona un tipo de forma y trata de optimizar el área de la misma ajustando el perímetro al máximo permitido. Una vez obtenida la figura, ambos niños transcriben tanto la forma como las medidas de la misma en el cuestionario, sobre papel. A continuación cambian el turno, hasta finalizar con las formas disponibles.
6. *Validación de la propuesta ganadora*. Si la forma obtenida a partir del modelo dinámico mejora la propuesta ganadora de la actividad (4), ésta se sustituye.

Comportamientos esperados

El primer lugar, la manipulación física de objetos puede llevar a la creación de cualquier tipo de espacio, puesto que la actividad matemática se basa en la comparación de tamaños relativos por estimación. Es de esperar que la reproducción física del cerco corresponda a polígonos regulares, puesto que optimizan el área dentro de la familia de los polígonos. A la hora de utilizar el soporte “papel”, la cuadrícula debe promover el descubrimiento de figuras rectangulares, puesto que el niño recurrirá a la estrategia de conteo de cuadrados internos a la hora de calcular el área de la figura. De esta forma, se obtiene el cuadrado de lado 5 como figura óptima dentro de la familia de los cuadriláteros, y el cálculo aritmético permite la validación de éste resultado. De hecho, el niño carece de estrategias algebraicas y aritméticas para calcular el área de polígonos cuyos lados no se ajusten en su casi totalidad a la cuadrícula, como tampoco conoce un medio para calcular el área del círculo.

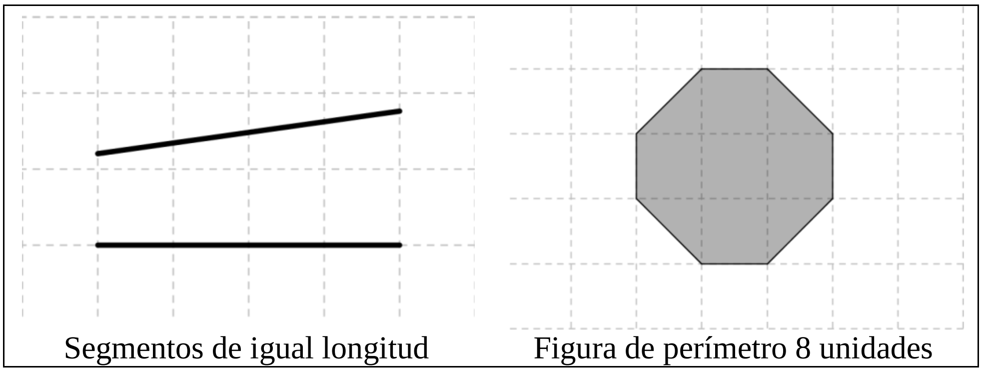
Por último, la manipulación del modelo dinámico permite la exploración de figuras más complejas. Se puede llegar a la conclusión de que ampliando el número de lados del polígono se obtiene un área cada vez mayor, y por lo tanto, que la circunferencia optimiza el área para un perímetro determinado.

Conocimientos previos y obstáculos relacionados

El niño debe poder identificar y clasificar los polígonos de hasta seis lados, atendiendo al número de lados, así como la circunferencia y el círculo. Asimismo, el niño debe utilizar el vocabulario geométrico básico en la descripción de dichas formas.

La comprensión del número irracional es inaccesible para un niño en segundo ciclo de EP. El empleo de una plantilla cuadriculada puede llevar a interpretar la unidad de medida como la distancia entre dos vértices consecutivos en la cuadrícula, no solo en horizontal y en vertical, sino también en diagonal. Según Dickson, Brown y Gibson (1991), al terminar la EP, la mitad de los niños interpreta la unidad como la distancia no perpendicular entre líneas paralelas (figura 3).

Figura 3. Interpretación de la unidad como distancia no perpendicular entre líneas paralelas.

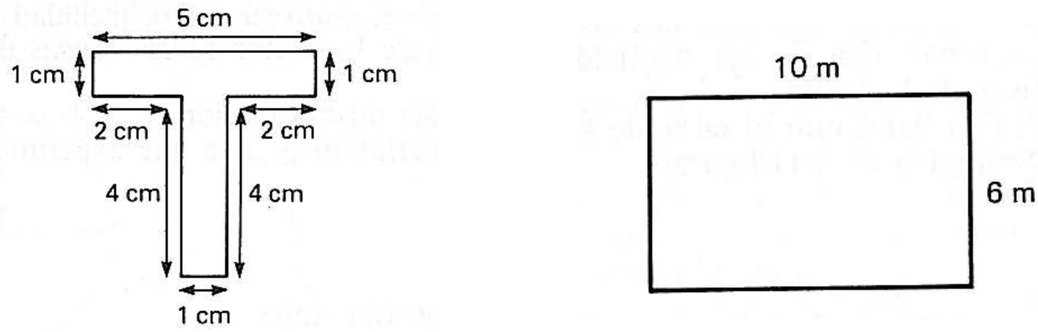


El niño construye sus propias figuras, tanto sobre papel como sobre la pantalla del ordenador. De esta forma, se evita la representación estereotipada de formas planas, que está en la génesis de diversos *obstáculos didácticos* recogidos en la literatura clásica (Castro, 2001).

El proceso de medida debe respetar asimismo una secuencia de estimación previa y el paso de unidades no-estándares a unidades estándares, antes de la aritmetización de la tarea (Dienes, 1997), para evitar que la tarea derive en una mera reproducción procedimental del cálculo aritmético de perímetros y áreas. Efectivamente, los niños de

10 años no parecen tener dificultades a la hora de calcular un perímetro, siempre y cuando el problema esté *nítidamente diseñado* (Dickson, Brown y Gibson, 1991). La codificación lingüística del problema determina la consecución de la tarea y se observa, por efecto del sistema educativo, una tendencia paulatina a confundir las nociones de perímetro y área (figura 4). Además, el niño establece el *teorema en acto* (Vergnaud, 1990): Dos figuras de igual perímetro, necesariamente tienen igual área (Chamorro, 2005).

Figura 4. Aritmetización de la tarea y emergencia de obstáculos.



Aritmetización de la tarea:
el niño calcula el perímetro sin dificultad.

Emergencia de obstáculos:
interferencia entre perímetro y área, el 25% de los niños indica un perímetro de 60 unidades.

EXPERIMENTACIÓN

Maestras en activo desarrollan la actividad en centros públicos y concertados, durante el curso 2013/2014. Tal como se ha desarrollado en el apartado 3, el diseño de la actividad y los contenidos trabajados hacen que ésta se considere óptima en segundo ciclo de EP. A diferencia de los niños de segundo ciclo, que poseen una idea intuitiva del área, los niños de tercer ciclo poseen contenidos procedimentales relativos a unidades de área.

La muestra del grupo experimental está formada por 90 niños de segundo ciclo de EP. Además se dispone de una segunda muestra compuesta por 55 niños de tercer ciclo que cumple la función de grupo de control. Se pretende de esta forma contrastar el desarrollo de la actividad con niños que tienen una comprensión incipiente e intuitiva de los contenidos involucrados, perímetro y área, con niños que ya han trabajo aspectos procedimentales de estos mismos conocimientos bajo los supuestos que sirven de base a este trabajo. En la tabla 1 se presenta la distribución de la muestra del grupo experimental.

Tabla 1. Distribución de la muestra

Centro	Curso	Número de niños
A	3	21
B	3	9
C	3-4	24
D	4	36
Total		90

RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos en las distintas fases de la situación (manipulación física, lápiz y papel, y modelo dinámico), para las muestras de segundo y tercer ciclo.

Segundo ciclo

Durante la fase de manipulación del material físico, los niños desarrollan principalmente formas geométricas regulares. Los niños proponen el rectángulo, el cuadrado, el pentágono, el hexágono e incluso la circunferencia (figura 5). Las formas se construyen en el suelo y los niños introducen el pie dentro de la forma para estimar su medida.

Figura 5. Producciones físicas de los niños con palillos

Durante la fase de acción sobre papel, prevalecen las propuestas rectangulares, con una clara primacía del cuadrado. Las figuras poligonales con un número par de lados (hexágono, octógono, decágono) aparecen con una frecuencia ligeramente superior a aquellas con número impar de lados (pentágono, heptágono, endecágono). Las figuras con mayor número de lados aparecen en menor frecuencia y solo 4 niños proponen la circunferencia. Uno de cada seis niños incurre en el obstáculo de identificación de la unidad. La tabla 2 muestra la distribución de respuestas dada por los niños en la actividad.

La figura 6 presenta producciones rectangulares tipo de los niños. En particular, la figura 6a presenta marcas de la estrategia de conteo sobre la cuadrícula, mientras que en la figura 6b se ha explicitado un procedimiento aritmético para el cálculo del perímetro.

Durante la fase de formulación cada niño presenta su propuesta. Tras una puesta en común y con los datos disponibles, fácilmente se llega a la conclusión de que el cuadrado optimiza el área para el perímetro dado. Así, para los niños en esta fase, el cuadrado es la propuesta "ganadora".

Tabla 2. Resultados de la actividad sobre papel, segundo ciclo

		Perímetro				**Área**			
Forma seleccionada	**NP**	**PC**	**EC**	**EF**	**IDU**	**AC**	**EC**	**EF**	**MPR**
Rectángulo	14	13	2	0	0	13	6	0	0
Cuadrado	37	32	3	2	2	34	10	0	1
Rombo	1	0	0	0	1	1	0	0	0
Pentágono	3	1	0	0	1	1	0	0	0
Hexágono	5	3	1	0	2	3	2	0	0
Heptágono	1	1	0	0	0	0	1	0	0
Octógono	5	1	2	0	3	2	2	0	0
Decágono	2	2	1	0	0	2	1	0	0
Endecágono	1	1	0	0	0	1	0	0	0
Dodecágono	1	1	0	0	0	1	0	0	0
Circunferencia	4	0	0	0	2	0	0	0	0
Nombre propio	8	4	1	0	4	6	3	0	0
En blanco	8	2	1	0	1	3	3	0	0
Total	**90**	**61**	**11**	**2**	**16**	**57**	**28**	**0**	**1**

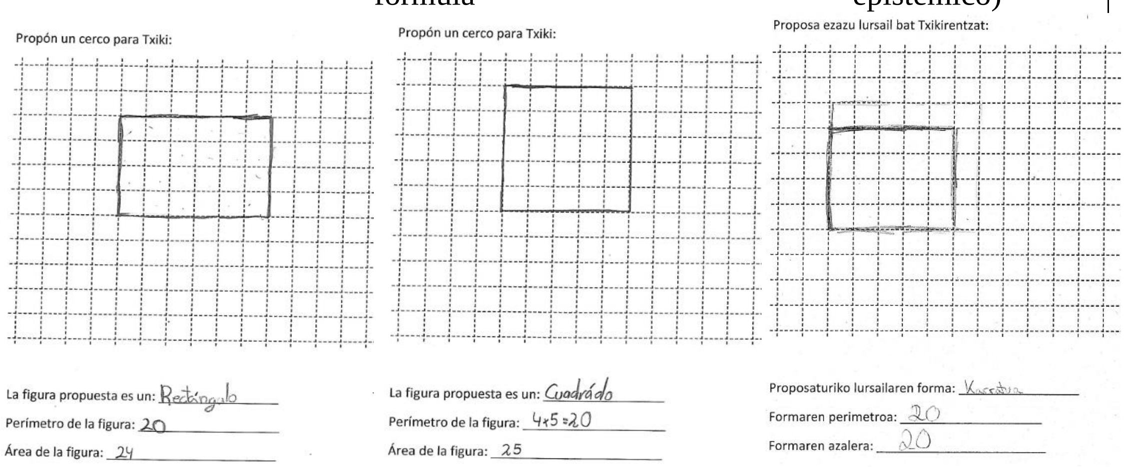
NP: Número de propuestas; PC: Perímetro correcto;
EC: Explicita el conteo; EF: Explicita una fórmula;
IDU: Interpretación diagonal de la unidad
AC: Área correcta; MPR: Marca perímetro rígido

Figura 6. Producciones tipo: cuadrado y rectángulo

a. Área y perímetro distintos

b. - Rectángulo área máx: cuadrado
- Cálculo del perímetro: fórmula

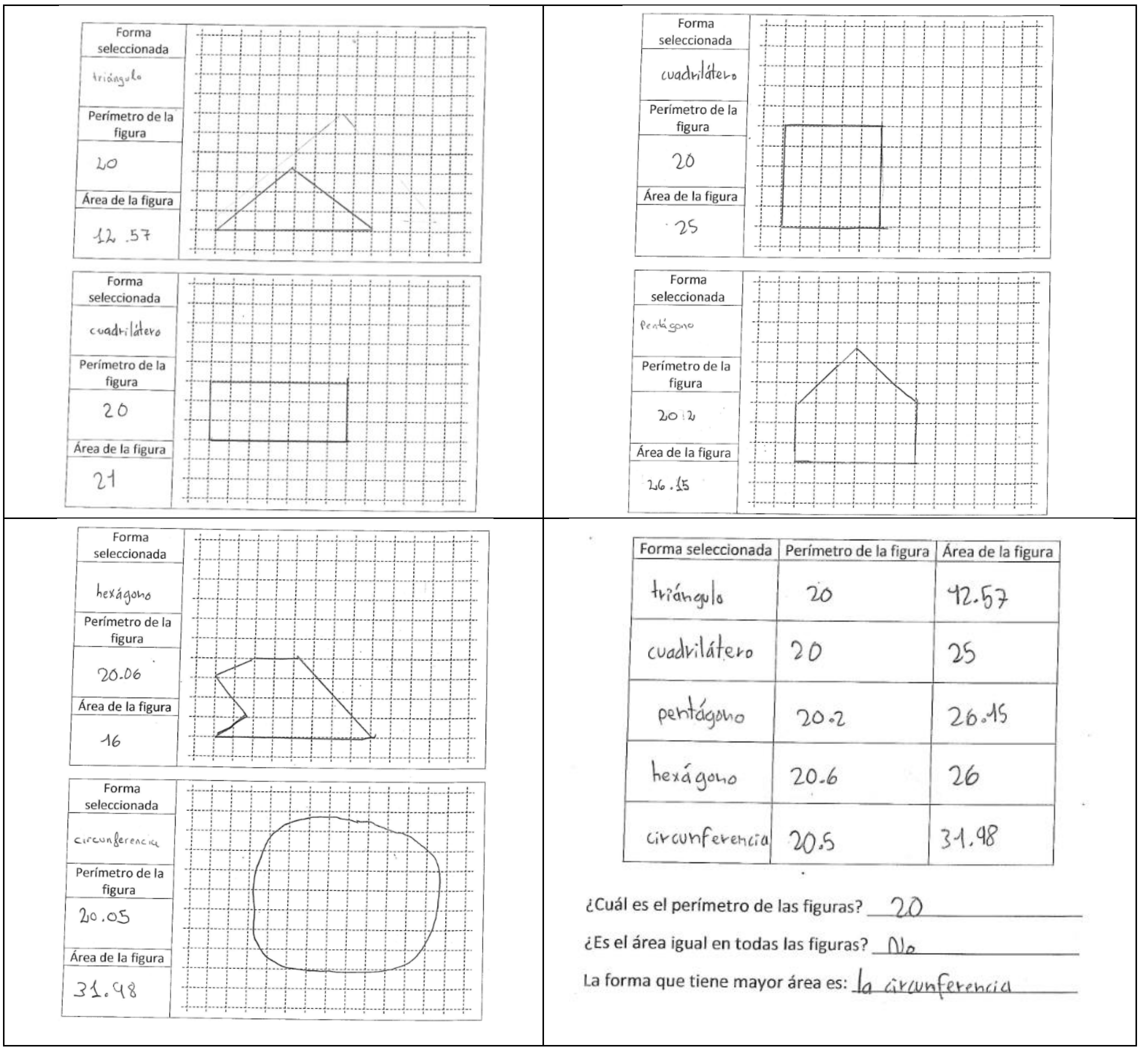
c. Equiparación perímetro-área en 3er ciclo (obstáculo epistémico)



A pesar de que existen propuestas de figuras que aparentemente superan el área del cuadrado, al no haberse completado el cálculo del área, estas propuestas se descartan en la fase de formulación. Sin embargo, gracias a esta discusión, el uso del modelo dinámico en la siguiente actividad queda motivado para los niños.

La actividad en ordenador se desarrolla por parejas. Además, para asegurar el desarrollo pertinente de la sesión, dos maestras se encargan de guiar la actividad. La actividad se desarrolla sin pormenores, y los niños son capaces de completar la ficha (figura 7). A pesar de que se observan pequeños errores aritméticos y de transcripción, la totalidad de los niños llega a la conclusión esperada: la circunferencia optimiza el área para el perímetro dado.

Figura 7. Desarrollo tipo de la actividad con la asistencia del modelo dinámico



Tercer ciclo

La actividad en tercer ciclo de EP se debe adecuar a las características de los niños. En particular, se omite la primera fase de manipulación física. En efecto, a los niños de 10 y 11 años se les puede solicitar el diseño de una producción abstracta sobre papel sin recurrir a la fase previa de familiarización con materiales físicos, puesto que se les ha presentado y han trabajado la noción de unidad de área. Además, desde el punto de vista afectivo, los niños de estas edades pueden sentir un cierto bochorno o rechazo en caso de que la actividad matemática se base en procedimientos de manipulación propio de los primeros ciclos de EP.

La primera actividad se desarrolla pues sobre papel y las propuestas de los niños son semejantes a aquellas presentadas por sus compañeros de segundo ciclo. Una vez más, el cuadrado es la figura que gana en las producciones sobre cuadrícula. El rectángulo se clasifica en segundo lugar, junto con las figuras irregulares con nombre propio (flecha, escalera, cruz, etc.). Los polígonos de más de cuatro lados son minoritarios. La tabla 3 muestra la distribución de respuestas dada por los niños. Los niños cometen más errores en el cálculo de perímetros que en el cálculo de áreas.

No existen diferencias significativas en las producciones de los niños de segundo y tercer ciclo. Al igual que en la muestra de segundo ciclo, la actividad en ordenador se desarrolla por parejas. Sin embargo, los estudiantes trabajan de forma autónoma en el ordenador y no se requiere de la guía de dos maestras para asegurar el desarrollo adecuado de la sesión. Los niños completan la ficha de forma eficaz.

Tabla 3. Resultados de la actividad sobre papel, 3er ciclo.

		Perímetro				**Área**				
Forma seleccionada	**NP**	**PC**	**EC**	**EF**	**IDU**	**AC**	**EC**	**EF**	**MPR**	**P=A**
Rectángulo	8	1	0	1	0	7	4	1	0	7
Cuadrado	35	34	0	3	0	30	19	0	3	0
Pentágono	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
Octógono	2	1	1	0	1	2	2	0	0	0
Dodecágono	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
Nombre propio	8	5	4	1	1	7	5	0	0	0
Total	**55**	**42**	**5**	**5**	**3**	**48**	**31**	**1**	**3**	**7**

NP: Número de propuestas; PC: Perímetro correcto; EC: Explicita el conteo
EF: Explicita una fórmula; IDU: Interpretación diagonal de la unidad
AC: Área correcta; MPR: Marca perímetro rígido; P=A asigna al perímetro el mismo valor que al área

Se observan errores aritméticos leves y de transcripción, pero estos errores no comprometen la actividad de la clase. La manipulación del modelo dinámico es correcta y la transcripción a papel de los casos observados lleva sin dificultad a la clase en su conjunto a aceptar la circunferencia como la forma plana que optimiza el área para un perímetro determinado. Aún más, atendiendo a las fases de acción, formulación y validación, los niños son capaces de llegar a esta conclusión sin la intervención explícita de la maestra.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En el soporte de lápiz y papel, los procedimientos empleados por los niños dan a entender que el conteo es la estrategia de base para el cálculo del perímetro y del área. En efecto, en toda da etapa, el 40% explicita el conteo en sus producciones, en forma de puntos, marcas o numerales en la cuadrícula y dentro de cada cuadrado computado (figura 8).
A diferencia del conteo, la descomposición no es un conocimiento operativo para la determinación de áreas en segundo ciclo. Sin embrago, la génesis escolar del cálculo de áreas mediante fórmulas, permite a los niños de tercer ciclo calcular el área de un triángulo en función del área del cuadrado, a partir de fracciones sencillas (figura 9).

Figura 8. Conteo explícito de unidades de área.

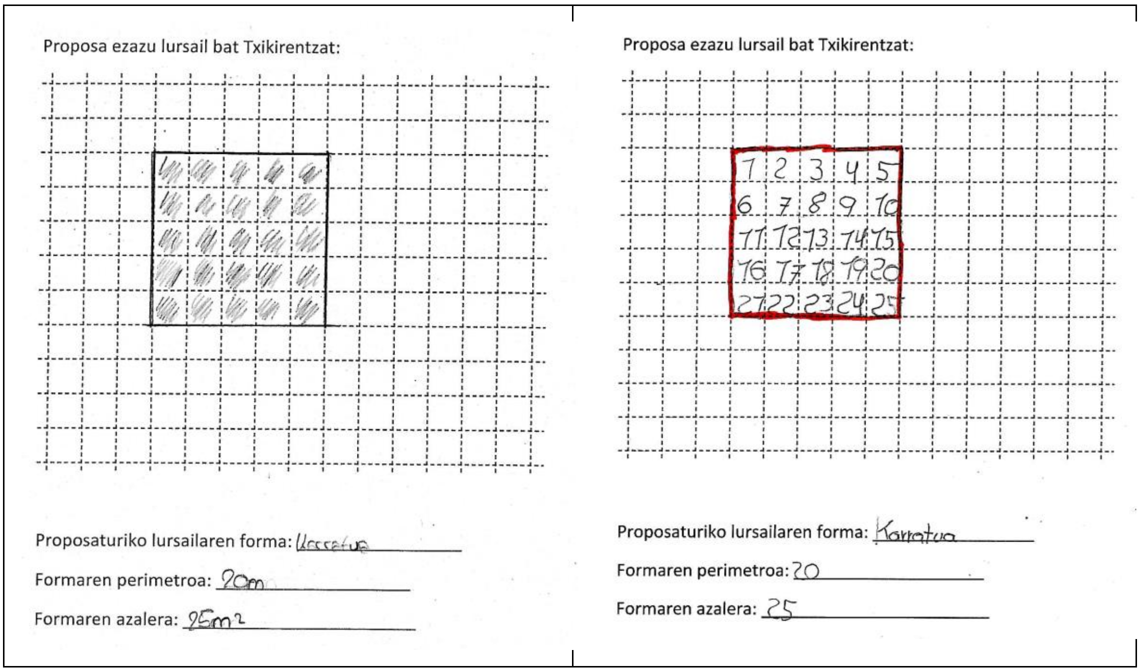
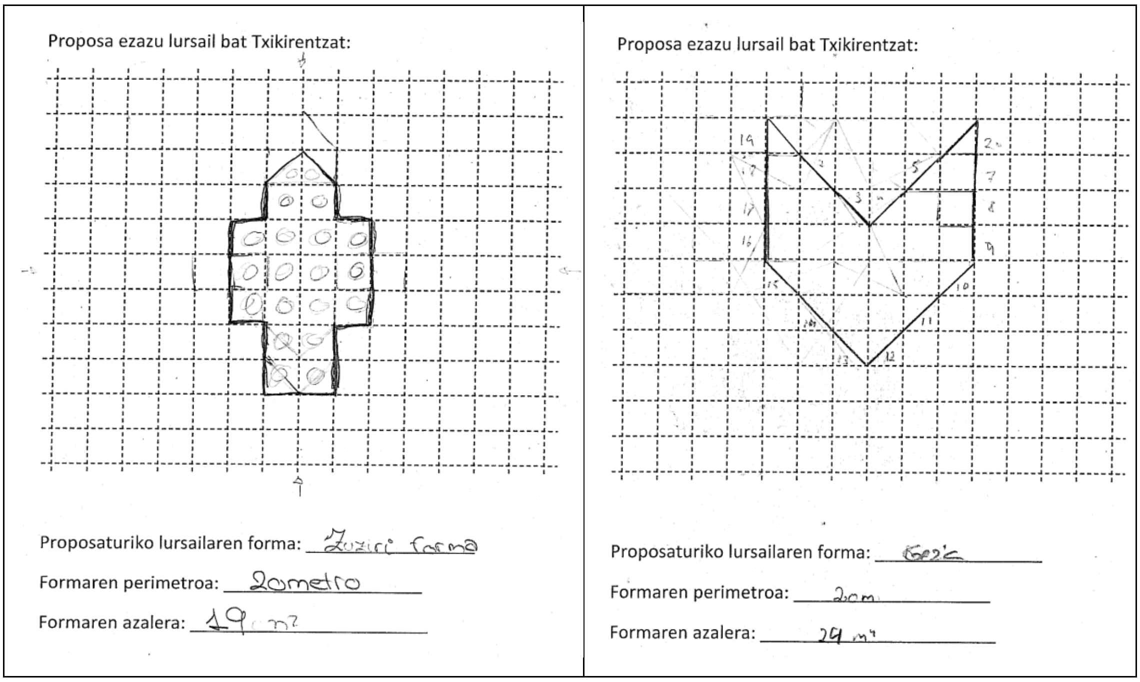


Figura 9. Cálculo de área por descomposición de un cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles.



La interpretación de la unidad como distancia entre vértices consecutivos de la cuadrícula, también en diagonal, se corrige a lo largo de la etapa. El 16% de los niños de segundo ciclo incurre en este error, mientras que solamente el 5% de los niños de tercer ciclo lo comete (tablas 2 y 3). El grupo de control permite observar, de esta manera, que existe una tendencia a superar el obstáculo “identificación de la unidad como distancia no perpendicular entre líneas paralelas” durante la etapa.

El uso de una cuadrícula durante la fase de acción sobre papel, fuerza la aparición de formas principalmente rectangulares (tabla 4). El porcentaje de niños que durante esta fase identifica el cuadrado como la figura que optimiza el área dentro de la familia de los cuadriláteros incrementa considerablemente de un ciclo a otro.

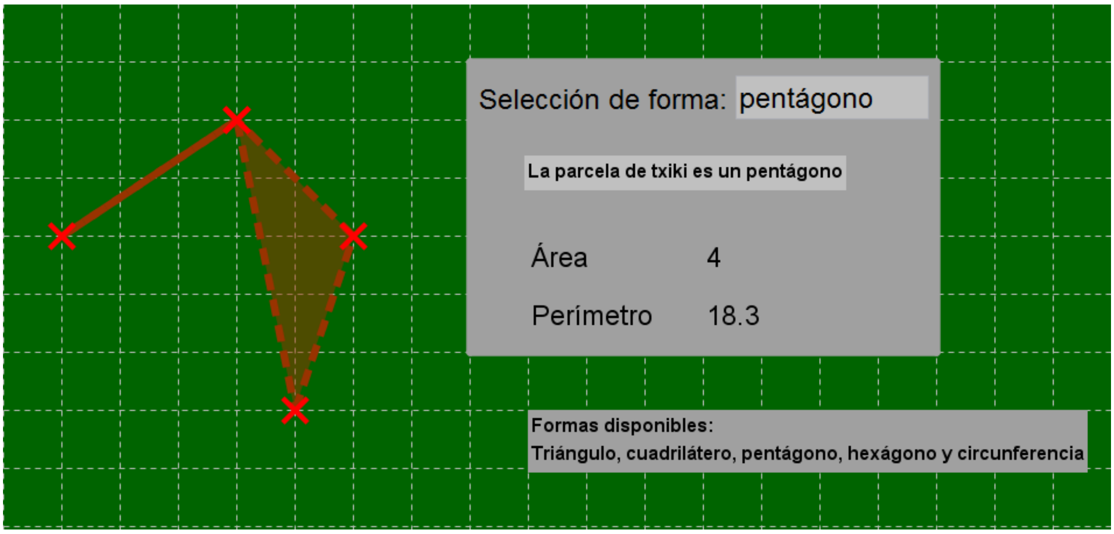
Tabla 4. Propuestas rectangulares o cuadradas.

Ciclo	Total	Cuadrado	Rectángulo	P=A en rectángulos
2	57%	41%	16%	0%
3	78%	63%	15%	13%

En las propuestas de tercer ciclo, los niños que proponen formas rectangulares asignan el mismo valor al área y al perímetro de la figura (figura 6c): ningún niño de segundo ciclo ha incurrido en la identificación P=A, mientras que en tercer ciclo la tasa ha sido del 13%. Tal y como se ha dicho, la principal diferencia entre los niños de segundo y tercer ciclo es que estos últimos trabajan de forma procedimental el cálculo de perímetro y área, por lo que hay indicios para conjeturar que estos procesos generan el obstáculo didáctico "identificación perímetro-área".

Por último, debido al diseño de la construcción, el modelo dinámico permite potencialmente la construcción de formas singulares, tales como figuras que no corresponden a un polígono determinado por tener lados cruzados, o polígonos que colapsan al coincidir dos de sus vértices en un mismo punto (figura 10). A pesar de existir esta posibilidad, los niños proponen formas simples y, por lo tanto, en la actividad los niños no generan *monstruos*, en el sentido de Lakatos (1976).

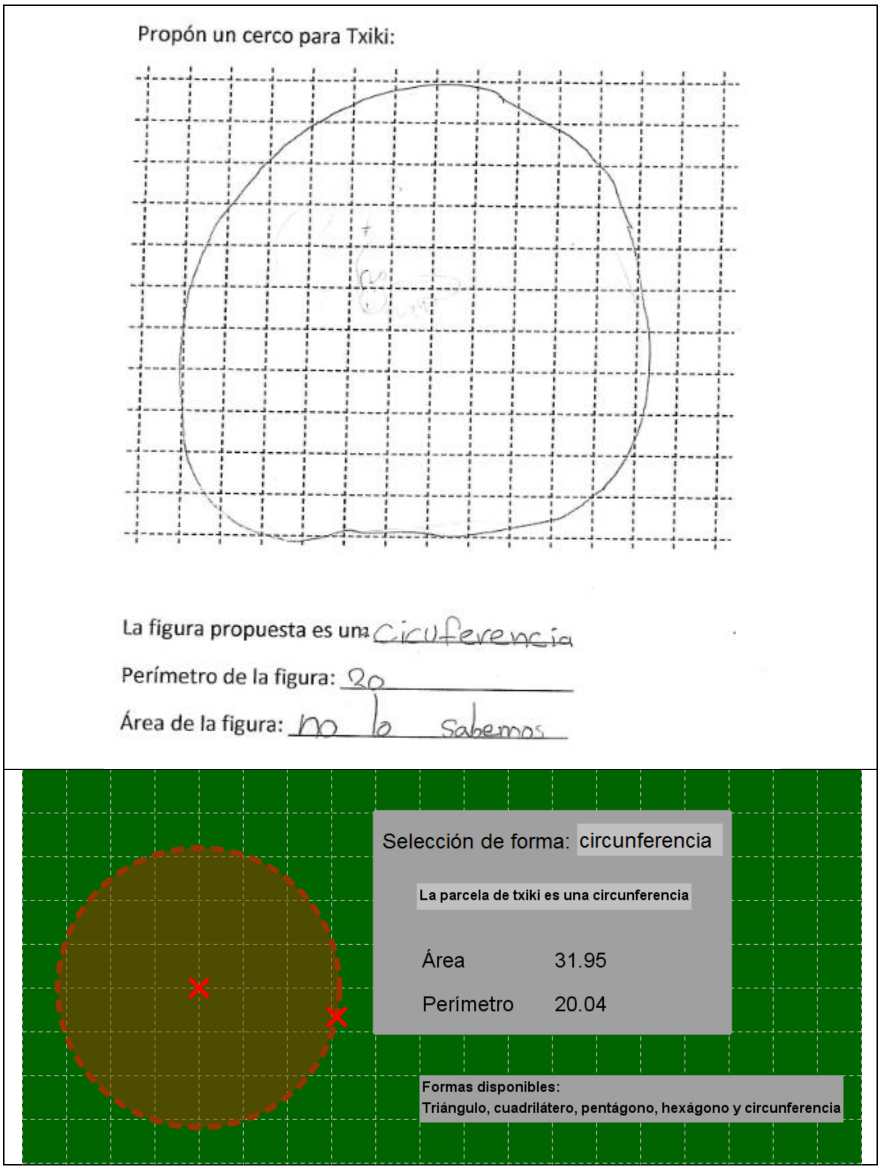
Figura 10. *Monstruo* (Lakatos, 1976) a partir del modelo dinámico.



SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

La elección de la circunferencia como figura óptima pasa de ser anecdótica en las propuestas sobre papel, a ser la propuesta unánime a la hora de realizar la actividad con la asistencia del modelo dinámico (figura 11). Este hecho evidencia que los conocimientos aritméticos y pre-algebraicos de los niños, correspondientes a un *nivel 0 de algebrización*, permiten identificar el cuadrado como la figura óptima, y que la cuadrícula induce también ésta identificación, en consonancia con propuestas de otros autores (p.e., Ribeiro, 2013). Es decir, a pesar de que el umbral aritmético de maestría de los niños marca ésta frontera, el modelo dinámico permite avanzar en la construcción de nuevas figuras inaccesibles a los alumnos desde el punto de vista aritmético-figurativo y pre-algebraico.

Figura 11. La circunferencia: en soporte de papel y en modelo dinámico.



El software dinámico demuestra así su potencial como instrumento de *exploración* (Lasa y Wilhelmi, 2013b) y permite avanzar hacia un nivel incipiente de algebrización, *nivel 1* según Godino et al. (2012, 2014). Así, los valores numéricos variables y los modelos dinámicos de figuras geométricas que participan en la práctica operativa generalizan el uso extensivo del número y del objeto geométrico.

A diferencia del soporte de lápiz y papel, el modelo dinámico presenta distancias y áreas en forma de valores cambiantes. Al manipular el vértice de una figura, el niño se decanta por una localización del punto en previsión del valor que aparecerá en pantalla. Asimismo, el niño advierte que, para obtener un área mayor, se debe incrementar el número de lados del polígono en el modelo dinámico. Por lo tanto, existe un razonamiento que reconoce una regla o patrón, en forma de tendencia, dentro de la actividad matemática.

En particular, una vez las figuras manipuladas en el modelo dinámico se transcriben sobre papel, la secuencia de transcripciones hace ver que a mayor número de lados, se obtiene con frecuencia un área también mayor. Así, los niños adecuan su significado personal al significado institucional pretendido, es decir, aceptan que la circunferencia es la figura que maximiza el área para un perímetro dado.

La Enseñanza basada en modelos, la Educación matemática realista o la Génesis instrumental (Bu y Schoen, 2011) son algunos ejemplos de teorías de la educación interesadas en el software dinámico. En este trabajo, la articulación de estos enfoques con la TSDM y el EOS, ha permitido el diseño de ciertas prácticas operativas y discursivas asistidas mediante el instrumento GeoGebra. El diseño de una situación de optimización (circunferencia como figura de área máxima) ha permitido el uso pertinente de GeoGebra en segundo ciclo de primaria y la justificación de que esta actividad supone el progreso en los niveles de algebrización por los alumnos. Así, se aporta una línea de actuación para la adquisición paulatina por los niños de procedimientos algebraicos.

Es necesario incidir aquí, por un lado, en el análisis de la utilidad de los modelos dinámicos para el progreso en los diferentes niveles de algebrización y, por otro lado, en el uso de las herramientas teóricas aportadas por el EOS para el análisis de la actividad matemática. En concreto, además de las dualidades personal/institucional, intensivo/extensivo y ostensivo/ no ostensivo utilizadas en el análisis de la situación propuesta, son precisas investigaciones que tomen en consideración las dualidades contenido/expresión y sistémico/unitario (figura 1) para el análisis de las prácticas operativas, discursivas y regulativas. Igualmente, se deberían describir configuraciones y trayectorias didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006) en las que el software dinámico, junto con soportes físicos o de otro tipo, participa como instrumento dentro del medio material.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, MINECO.

La experimentación de este trabajo se ha podido realizar gracias a la labor de los docentes: Luis Braco, Mirentxu Conde, Lupe Muxika, Ana Oliver y Ane Yuste.

REFERENCIAS

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientique. Détermination d'un milieu. Connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-194.

Bu, L., Schoen, R. (2011). GeoGebra for model-centered learning in mathematics: an introduction. Model Centered Learning. Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra. Rotterdam: Sense Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.

Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Chamorro, M.C. (2005). *Didáctica de las matemáticas en educación infantil*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Dickson, L., Brown, M., Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: LABOR.

Dienes, Z.P. (1977). *Exploración del espacio y práctica de la medida*. Barcelona: Teide.

Drijvers, P., Godino, J.D., Font, V., Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 23-49.

Duval, R. 1995. Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero C., Contreras, A., Estepa, A. Lacasta, E., Wilhelmi M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2810- 2819). Ankara, TR: Middle East Technical University and ERME. [Recuperable en (08/10/14): http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/index.php?slab=proceedings].

Godino, J. D., Castro, W.F., Aké, L., Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 42(B), 199-219.

Godino, J.D., Contreras, A., Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39–88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006) . Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150. [Recuperable en (08/10/14): http://www.clame.org.mx/relime.htm].

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación matemática*, 19(2), 95–128.

Font, V., Godino, J.D., D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2–7.

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 259-271). Santander: SEIEM. [Recuperable en (08/10/14): http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm].

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J. R., Wilhelmi M. R. (2010). Optimization through measurement situations in grade 2. En M. M. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 3,* pp. 259-271. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. (2013a). GeoGebra en la formación de profesorado de ESO y Bachillerato. *Cónica* 3, 30-32. [Recuperable en (08/10/14): http://acgeogebra.cat/butlleti/conica3/conica3.pdf].

Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013b). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, 2(1), 52-64. [Recuperable en (01/10/2014): http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160/12279].

Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2014 febrero). *Integración de GeoGebra en el diseño de situaciones didácticas en Educación Primaria*. VI Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra. Barcelona: Universidad Pompeu Fabra. [Disponible en (26/03/2014): http://acgeogebra.cat/vi_jornades.html; Enlace a la construcción (26/03/2014): http://www.geogebratube.org/student/mVajSjWVp].

Rabardel, P. (2002). People and technology. And cognitive approach to contemporary instruments. [Recuperable en (26/03/2014): http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr].

Ribeiro, C. M. (2013). Del cero hasta más allá del infinito. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 71-90). Bilbao: Universidad del País Vasco. [Recuperable en (08/10/14): http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm].

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133-170.

Recebido em: 01/10/2014

Aceito em: 01/12/2014