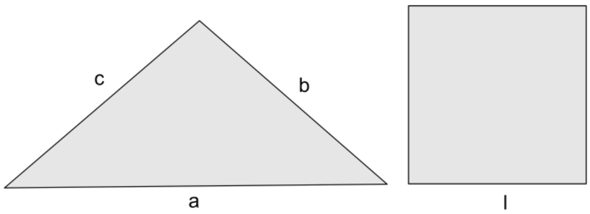
Solução extraída da dissertação de mestrado "Desigualdade das Médias e a resolução de problemas geométricos", autor Mauro Rigodanzo, disponível em http://www.profmat-sbm.org.br.

Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo e l a medida do lado do quadrado, conforme Figura 1.

Figura 1 – Polígonos de áreas iguais.



Fonte: o autor.

Seja p o semiperímetro do triângulo. Assim, o perímetro do triângulo é $a+b+c=2p$. A área do triângulo pode ser determinada pela fórmula de Herão

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

O perímetro e a área do quadrado são, respectivamente,

$$l+l+l+l=4l$$

e

$$l.l=l^2.$$

Como as áreas são iguais, tem-se que:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=l^2,$$

ou seja,

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=l^4.$$

Aplicando, em p, $(p-a)$, $(p-b)$ e $(p-c)$, a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, tem-se:

$$\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p+(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4}=\frac{4p-(a+b+c)}{4}.$$

Como $a+b+c=2p$, então:

$$\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{4p-2p}{4}=\frac{2p}{4}.$$

Substituindo $p(p-a)(p-b)(p-c)=l^4$, obtém-se:

$$\sqrt[4]{l^4} \leq \frac{2p}{4},$$

ou seja,

$$4l \leq 2p.$$

Para a possibilidade de igualdade dos perímetros $4l=2p$, encontrar-se-ia:

$$4l=p+(p-a)+(p-b)+(p-c).$$

A qual seria possível se, e somente se:

$$p=(p-a)=(p-b)=(p-c),$$

o que acarretaria em

$$a=b=c=0.$$

O que é um absurdo, pois a, b e c são as medidas dos lados do triângulo.

Portanto, tem-se que:

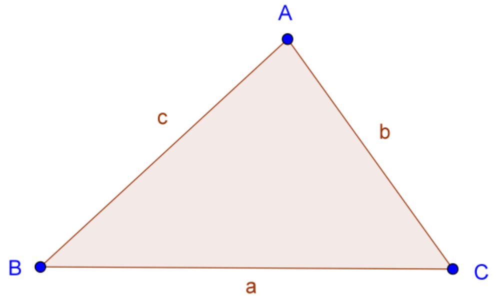
$$4l < 2p,$$

ou seja, o perímetro do triângulo é maior que o perímetro do quadrado.

Explorando no GeoGebra (procedimentos de construção).

Seleciona-se a ferramenta polígono e constrói-se o triângulo ABC de lados a, b e c, conforme Figura 2.

Figura 2 – Triângulo de lados a, b e c.



Fonte: o autor.

Em seguida, no campo de Entrada, digita-se $\frac{a+b+c}{2}$, seguido de um Enter, definindo-se, assim, na Janela de Álgebra, o número d que representa o semiperímetro do triângulo, ou seja,

$$d = \frac{a+b+c}{2}.$$

Logo após, no Campo de Entrada, digita-se:

$$sqrt(d(d-a)(d-b)(d-c)),$$

seguido de um Enter, definindo-se, assim, na Janela de Álgebra, o número e, que representa a área do triângulo, ou seja,

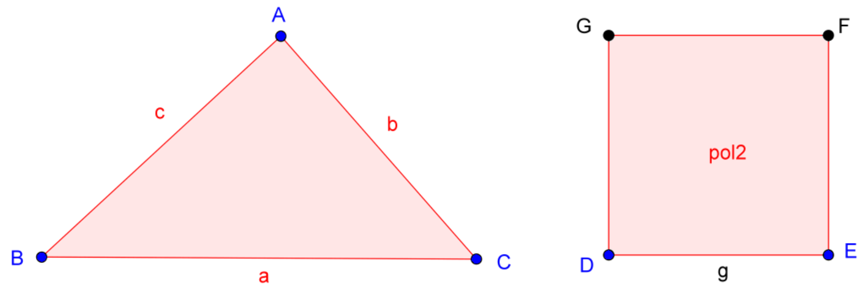
$$e = \sqrt{d(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Agora, deseja-se construir um quadrado com a mesma área e do triângulo. Como a área do quadrado é l^2, tem-se que $l^2 = e$, ou seja, $l = \sqrt{e}$. Assim, a medida do lado do quadrado deve ser $\sqrt{e}$. Então, no campo de Entrada, digita-se $sqrt(e)$, seguido de um Enter, definindo-se assim, na Janela de Álgebra, o número f, que representa a medida do lado do quadrado que se deseja construir, ou seja,

$$f = \sqrt{e}.$$

Logo após, seleciona-se a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo, clica-se na Janela de Visualização e no campo Comprimento digita-se f, definindo-se assim o segmento $DE = g$, com a mesma medida do número f. Seleciona-se, agora, a ferramenta Polígono Regular, clica-se sobre os pontos D e E e no campo Vértices, digita-se 4, definindo-se, assim, o quadrado $DEFG$, conforme Figura 3.

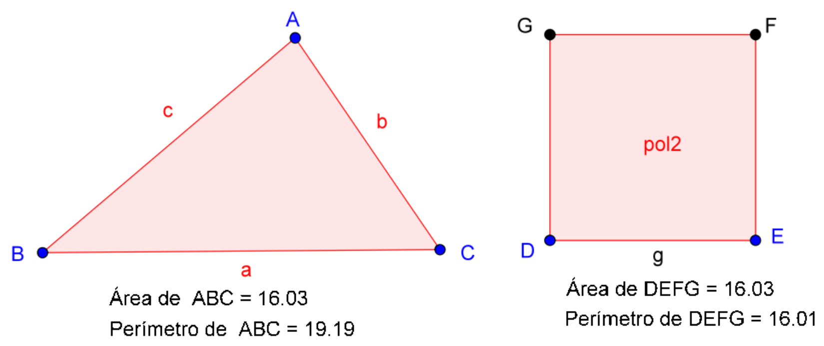
Figura 3 – Quadrado de mesma área.



Fonte: o autor.

Agora, seleciona-se a ferramenta Área, clica-se sobre o Triângulo e sobre o Quadrado, definindo-se, assim, os Textos com as medidas das Áreas de cada Polígono. Percebe-se que as áreas são iguais e, ainda, arrastando-se qualquer um dos vértices do triângulo, observa-se que as áreas sempre serão iguais, ou seja, os polígonos são equivalentes. Falta explorar os perímetros. Então, seleciona-se a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, clica-se sobre o Triângulo e sobre o Quadrado, definindo-se, assim, os Textos com as medidas dos Perímetros de cada Polígono. Percebe-se que o perímetro do triângulo é maior que o perímetro do quadrado. Modifica-se a aparência dos Textos, conforme Figura 4.

Figura 4 – Áreas e perímetros dos polígonos.



Fonte: o autor.

Pode-se arrastar novamente qualquer um dos vértices do triângulo e observar a desigualdade entre os perímetros. Conclui-se que, para quaisquer valores de a, b e c, tem-se $4l < 2p$.

Portanto, entre um quadrado e um triângulo de áreas iguais, o triângulo tem maior perímetro.

A escolha dos procedimentos apresentados nesta construção teve como objetivo apresentar uma funcionalidade diferente, que o aplicativo oferece. Porém, a construção também pode ser explorada utilizando a régua e compasso eletrônicos, em substituição aos convencionais, conforme os procedimentos descritos na sequência.

Sejam b e h, respectivamente, as medidas da base e da altura do triângulo ABC e seja l a medida do lado do quadrado. Como as áreas são iguais, tem-se que:

$$\frac{bh}{2} = l^2,$$

ou seja,

$$l = \sqrt{b.\frac{h}{2}}.$$

Observa-se que l é a média geométrica entre as medidas b e $\frac{h}{2}$.

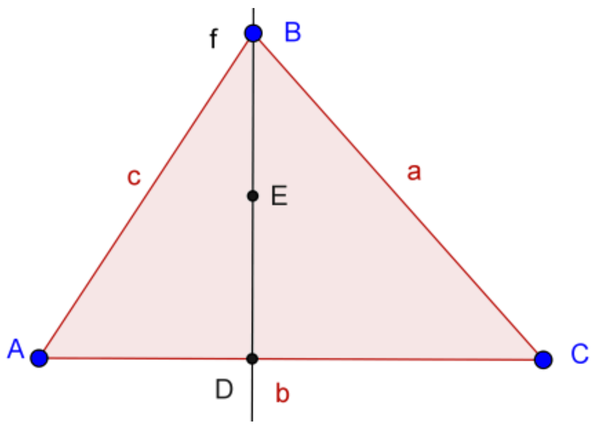
Das relações métricas no triangulo retângulo, tem-se que a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Considerando b e $\frac{h}{2}$ as projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa, tem-se que:

$$l = \sqrt{b.\frac{h}{2}}$$

é a altura relativa à hipotenusa de medida $b + \frac{h}{2}$.

No aplicativo, seleciona-se a ferramenta Polígono e constrói-se um triângulo qualquer ABC, denominando a base de b. Para a construção da altura h, relativa ao lado b, seleciona-se a ferramenta Reta Perpendicular, clica-se sobre o vértice B e sobre o lado AB, definindo-se, assim, a reta f. Seleciona-se a ferramenta Interseção de Dois Objetos, clica-se sobre f e sobre o lado AB, definindo-se assim o ponto D. Para definir a medida $\frac{h}{2}$, seleciona-se a ferramenta Ponto Médio e constrói-se o ponto E, médio do segmento BD, definindo-se assim, $DE = BE = \frac{h}{2}$, conforme Figura 5.

Figura 5 – Triângulo de base $\boldsymbol{b}$.

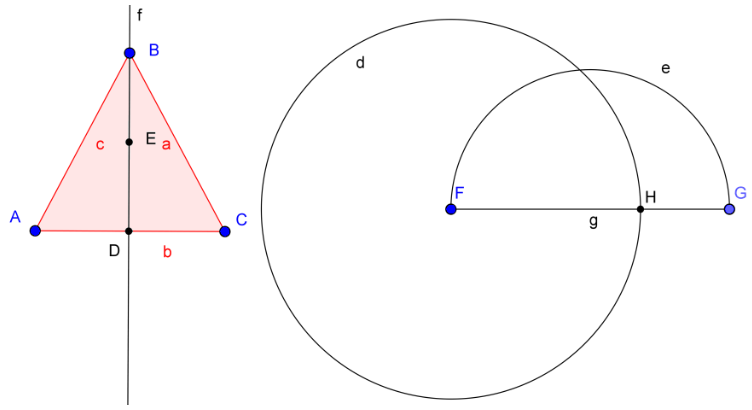


Fonte: o autor.

Em seguida, seleciona-se a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo e constroem-se os segmentos FH de comprimento $AC = b$ e FG de comprimento $AC + DE = b + \frac{h}{2}$. Seleciona-se a ferramenta Círculo dados Centro e Raio e constrói-se a circunferência d, de centro F e raio $AC = b$. Seleciona-se a ferramenta Interseção de dois

Objetos e constrói-se o ponto H, interseção de d com FG. Seleciona-se, ainda, a ferramenta Semicírculo Definido por Dois Pontos, clica-se sobre os pontos F e G, definindo-se assim a semicircunferência e, conforme Figura 6.

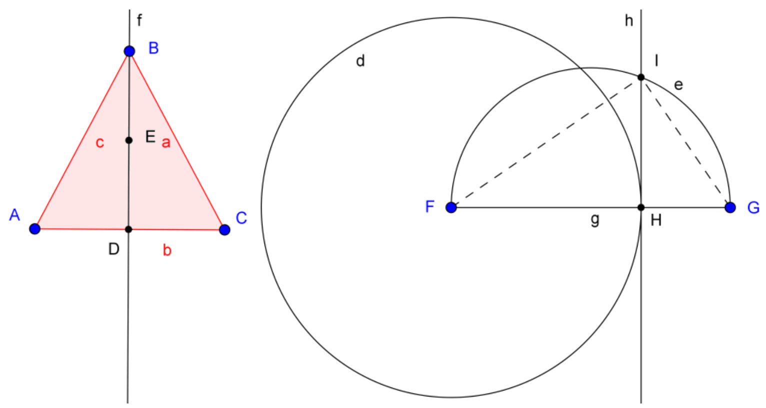
Figura 6 – Construção da semicircunferência.



Fonte: o autor.

Agora, para determinar a altura do triângulo inscrito na semicircunferência e que um dos lados é o diâmetro, seleciona-se a ferramenta Reta Perpendicular e constrói-se, passando por H, a reta h, perpendicular a FG. Seleciona-se a ferramenta Interseção de Dois Objetos e constrói-se o ponto I, interseção do arco e com a perpendicular h, conforme Figura 7.

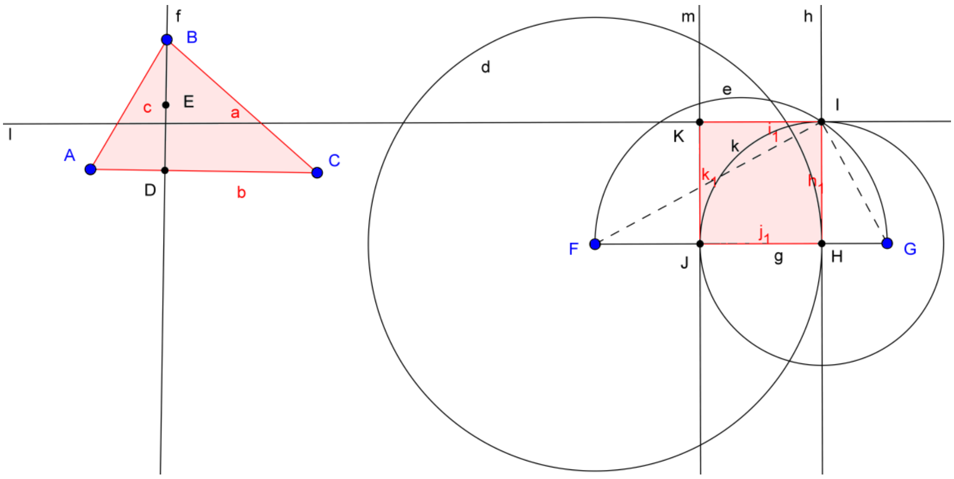
Figura 7 – Construção do triângulo tangente ao semicírculo.



Fonte: o autor.

Observa-se que o segmento HI é a altura do triângulo FGI, retângulo em I. Observa-se, ainda, que os segmentos $FH = AC = b$ e $HG = \frac{h}{2}$ são as projeções dos catetos FI e GI, respectivamente, sobre a hipotenusa $FG = b + \frac{h}{2}$. Assim, tem-se que $l = HI$ é a medida do lado do quadrado de mesma área do triângulo ABC. Falta construir tal quadrado. Para isso, seleciona-se a ferramenta Círculo dados Centro e Raio e constrói-se a circunferência k, de centro H e raio $HI = l$. Seleciona-se a ferramenta Interseção de dois Objetos e constrói-se o ponto J, interseção de k com FG. Seleciona-se a ferramenta Reta Perpendicular, clica-se sobre o ponto I e sobre a reta h, definindo-se, assim, a perpendicular l; clica-se, ainda, sobre o ponto J e sobre o segmento FG, definindo-se, assim, a perpendicular m. Seleciona-se a ferramenta Interseção de Dois Objetos e constrói-se o ponto K, interseção das perpendiculares l e m. Seleciona-se a ferramenta Polígono e constrói-se o quadrado $HIKJ$, conforme Figura 8.

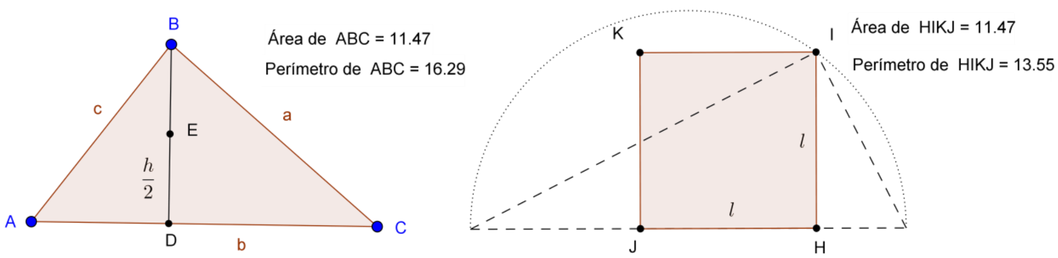
Figura 8 – Construção do quadrado de lado $\boldsymbol{l}$.



Fonte: o autor.

Como sugerido na primeira proposta de construção deste problema, definem-se os Textos com as medidas das Áreas e dos Perímetros de cada Polígono, observando-se que as áreas são iguais. Arrastando-se qualquer um dos vértices do triângulo, observa-se que os polígonos sempre são equivalentes e que o perímetro do triângulo sempre é maior que o perímetro do quadrado. Pode-se ainda modificar a aparência da construção, gerando a imagem, conforme Figura 9.

Figura 9 – Desigualdade entre os perímetros.



Fonte: o autor.

Conclui-se que, para quaisquer valores de a, b e c, tem-se:

$$4l < a + b + c,$$

ou seja, entre um quadrado e um triângulo de áreas iguais, o triângulo tem maior perímetro.