Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Ein kalkülfreier Zugang zu Grundvorstellungen der Analysis[1]

Bei der Einführung in die Differentialrechnung ist im Unterricht immer wieder festzustellen, dass (zu früh) der Kalkül die Oberhand gewinnt. Ohne tragfähiges anschauliches Grundverständnis werden dann z. B. Ableitungen nur mechanisch ermittelt. Mit modernen digitalen Werkzeugen wie z. B. GeoGebra können aber Schüler in der Sekundarstufe II „ohne jeden Kalkül adäquate Grundvorstellungen zum Begriff der Ableitung und des Integrals aufbauen“ (Büchter; Henn 2010). Dabei stehen das Entdecken und die Verständnisförderung im Vordergrund. Wie dies mit dynamischen Arbeitsblättern gelingen kann, soll im Folgenden gezeigt werden.

1. Kovariation

Bei der Betrachtung von Funktionen steht hier der dynamische Kovariationsaspekt im Vordergrund. Zu *einem* x betrachten wir das *zugehörige* y und untersuchen die Auswirkungen der Änderung der unabhängigen Veränderlichen x auf die abhängige Veränderliche y. Ein Funktionsgraph *entsteht* dabei punktweise als Spur bzw. Ortslinie von P(x; y) (Elschenbroich 2003).

2. Von der Sekante zur Ableitung

Man untersucht zunächst klassisch den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Näherungsprozess von Sekanten an der Stelle a. Wird h immer näher an Null angenähert (h = 0,01 reicht für die Bildschirmauflösung), so erkennt man, dass die linksseitige und die rechtsseitige Sekante einander immer näher kommen und anschaulich zur Tangente an den Graphen von f(x) im Punkte A werden. Aus der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigung für ein zunächst festes h kann man nun Punkte D_{re} und D_{li} erzeugen, die die jeweilige Sekantensteigung an der Stelle x = a repräsentieren. Bei Variation von a entstehen dann als Ortslinie die Graphen der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigungs*funktion* (für festes h). Nun kann man das h mittels Schieberegler immer kleiner werden lassen, bis es ‚nahezu Null‘ ist. Dabei lässt sich schön beobachten, dass die Graphen der beiden Sekantensteigungsfunktionen sich immer mehr annähern, bis sie schließlich im Rahmen der Bildschirmauflösung zusammenfallen. Man kommt so zur *anschaulichen* Tangentensteigungsfunktion.

[1] Der Text ist eine gekürzte Fassung von Elschenbroich (2014). Die GeoGebra-Dateien basieren auf Elschenbroich/ Seebach (o.Jg.).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 337–340). Münster: WTM-Verlag

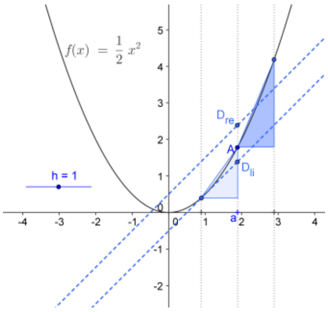

Abb. 1a. Sekantensteigungsfunktionen

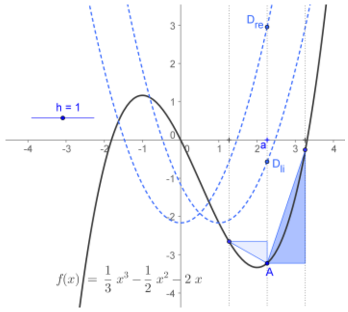

Abb. 1b. Sekantensteigungsfunktionen

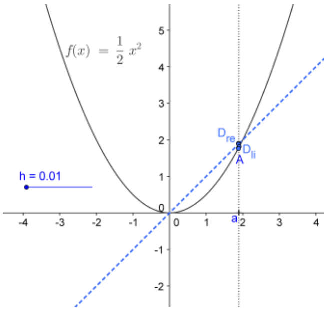

Abb. 2a. anschauliche Tangentensteigungsfkt.

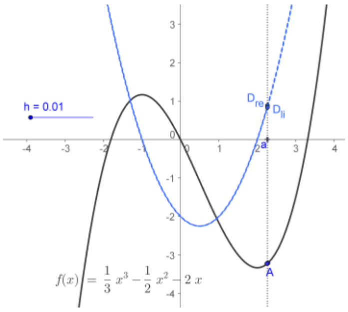

Abb. 2b. anschauliche Tangentensteigungsfkt.

3. Vom Kreis zur Krümmung

So wie der Zugang zur Steigung linear mittels Sekanten über die drei Punkte A(a; f(a)), A_{li}(a-h; f(a-h)) und A_{re}(a+h; f(a+h)) erfolgt, so ist es naheliegend, einen gekrümmten Funktionsgraphen mit der einfachsten gekrümmten Linie durch diese drei Punkte, einem Kreis, anzunähern und sein Verhalten zu untersuchen, wenn h immer mehr an Null angenähert wird. Konstruiert man noch den Mittelpunkt M und den Radius , so wird deutlich, dass der Kreismittelpunkt M und der Radius r sich schließlich nur noch geringfügig ändern, wenn h immer mehr an Null angenähert wird.

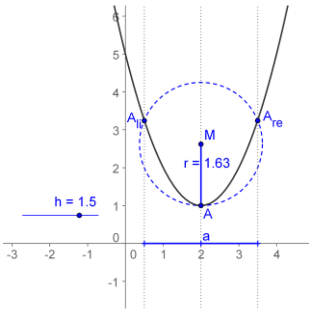

Abb. 3a. Schritt zum Krümmungskreis

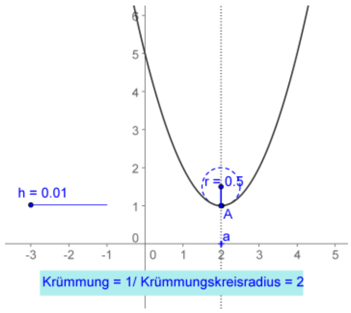

Abb. 3b. anschaulicher Krümmungskreis

Wir erhalten so einen anschaulichen dynamischen Zugang zum Krümmungskreis als Grenzlage und (betraglich) zur Krümmung des Funktionsgraphen an der Stelle a als Kehrwert des Krümmungskreisradius.

4. Von der Unter-/ Obersumme zur Integralfunktion

Das Berechnen von Produktsummen und der Übergang zum bestimmten Integral, dann der Übergang zum unbestimmten Integral und schließlich zur Integralfunktion sind für Schüler konzeptionell wie algebraisch eine Herausforderung. Auch hier ist die Unterstützung durch dynamische Software hilfreich.

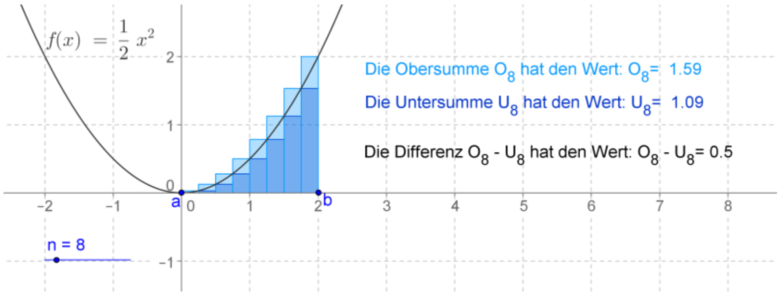

Abb. 4. Unter- und Obersumme

Man beginnt klassisch mit Unter- und Obersummen und kann dann problemlos die Anzahl n der Unterteilungen ändern oder die Lage von b und a. Die Werte von O_n, U_n und deren Differenz liefert hier die Software, und man erkennt ohne mühsame Rechnungen, dass sich für zunehmend größeres n die Werte von O_n und U_n einander annähern und der Unterschied gegen Null geht. Dies ist der Schritt zum bestimmten Integral von f über [a;b]. Nun kann man wieder passend zu b den Wert von U_n und O_n als y-Koordinate in einen Punkt US_n bzw. OS_n einbringen und das Verhalten der beiden Punkte für wachsendes n untersuchen. Erwartungsgemäß nähern sich diese beiden Punkte immer mehr einander an, je größer die Zahl n der Unterteilungen wird (aber deutlich langsamer als bei der Ableitung).

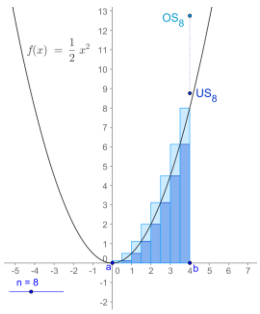

Abb. 5a. Ober-/ Untersumme OS_8, US_8

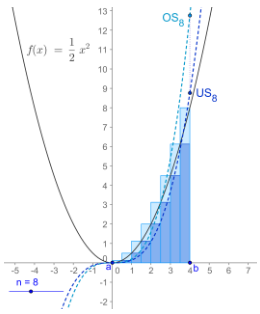

Abb. 5b. Ortslinien von OS_8 und US_8

Es bietet sich nun auch analog zum Vorgehen bei der Ableitung an, das Verhalten dieser beiden Punkte zu untersuchen, wenn b variiert wird, und sie in Abhängigkeit von b Ortslinien zeichnen zu lassen. Man erhält so für festes n eine Untersummen*funktion* und eine Obersummen*funktion*, deren

Graphen eine Art Trichter bilden. Für größeres n nähern sich diese einander immer mehr an und schachteln die *anschauliche* Integralfunktion von f (mit der unteren Grenze a) ein.

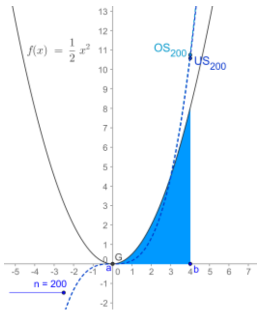

Abb. 6a: Ortslinien von OS_{200} und US_{200}

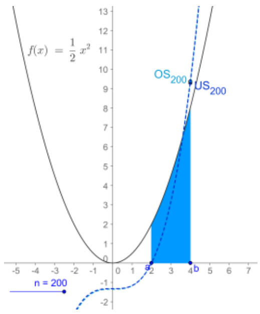

Abb. 6b. Variation von a

Verändert man nun a, so verschieben sich die Graphen der Untersummenfunktion und Obersummenfunktion und der eingeschachtelten anschaulichen Integralfunktion offensichtlich um eine Konstante. Damit ist jetzt das Grundverständnis für die Integralfunktion und den HDI gelegt!

5. Zum Schluss

Ein solch anschaulich dynamischer Zugang ist natürlich nur für hinreichend gutartige Funktionen zulässig (wie sie aber in der Schule fast ausschließlich vorkommen). Er ist enorm hilfreich für den Aufbau von Grundverständnis, weil er der Theorie eine anschauliche Grundlage gibt. Er behindert und ersetzt keine Theoriebildung, sondern bereitet sie vor und gibt ihr eine Basis. Der gezeigte Zugang ist auch nur auf der Oberfläche der Lernumgebung für die Schüler kalkülfrei, im Hintergrund wird von der Software natürlich intensiv gerechnet. Bemerkenswert ist dabei, dass der gezeigte Zugang zur Ableitungsfunktion und zur Integralfunktion durch die Erzeugung von Ortslinien anschaulich und *ohne vorherige Kenntnis* ihrer Funktionsterme erfolgt. Ein schönes Beispiel dafür, dass der Einsatz von digitalen Werkzeugen einen echten Mehrwert liefert und neue Wege zum Verständnis komplexer Begriffsbildungen eröffnet.

Literatur

Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Elschenbroich, H.-J. (2014): Digitale Werkzeuge im Analysis-Unterricht. In: *Blum, W. et al. (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II.* Diesterweg.

Elschenbroich, H.-J; Seebach, G. (o. Jg.): Dynamisch Funktionen entdecken. DZLM

Elschenbroich, H.-J. (2003): Ein dynamischer Zugang zu Funktionen und Gleichungen. In: *MNU 56/8* (S. 454 – 460)