Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jóbson Hugo de Sousa Soares

Função Quadrática

Natal, março de 2013

Jóbson Hugo de Sousa Soares

Função Quadrática

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientadora:
Prof^{a}. Dr^{a}. Viviane Simioli Medeiros Campos

Natal, março de 2013

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Soares, Jóbson Hugo de Sousa.
Função Quadrática / Jóbson Hugo de Sousa Soares. - Natal, 2013.
40 f. il.:

Orientadora: Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Funções reais – Dissertação. 2. Função quadrática – Dissertação. 3. Forma canônica – Dissertação. 4. Forma fatorada – Dissertação. 5. Parábola – Dissertação. I. Campos, Viviane Simioli Medeiros. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 517.51

Jóbson Hugo de Sousa Soares

Função Quadrática

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Viviane Simioli Medeiros Campos
Departamento de Matemática - UFRN
Orientadora

Prof. Dr. Fágner Lemos Santana
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof. Dr. Victor Giraldo
Departamento de Matemática - UFRJ
Examinador Externo

Agradecimentos

- Aos meus pais pelo esforço e dedicação para que eu tivesse a melhor educação possível, por sempre me apoiarem e dar o suporte necessário para minha vida acadêmica. Tenho certeza que sem eles, eu não teria sido capaz de realizar essa etapa da minha formação.

- A minha esposa por estar ao meu lado durante todo o mestrado, nas madrugadas de estudo e me dando apoio nos momentos mais difícies.

- Aos meus amigos da minha cidade Santana do Matos que sempre estiverem comigo, principalmente em minha infância.

- Ao professor José Maria Gomes pelos momentos de discussões e pelo acesso à sua biblioteca pessoal.

- A todos os professores que fizeram parte de minha graduação na UFRN, que contribuiram para minha formação docente.

- Aos colegas de trabalho do IFRN (campus Macau e Pau dos Ferros), em particular aos professores de matemática pelos momentos de discussões e aprendizado.

- Aos professores da Pós-Graduação na UFRN: Viviane Simioli, Débora, André Gustavo, Ronaldo, Fagner e Marcelo Gomes, pelo amadurecimento matemático que eles me proporcionaram durante todo o curso.

- A minha orientadora Viviane Simioli pela excepcional orientação, paciência, ajuda e disponibilidade para que pudessemos concluir esse trabalho.

- Aos colegas do mestrado, pelos momentos de estudo, aprendizado e descontração.

- Enfim a todos que ajudaram, direta ou indiretamente, com a realização esse trabalho.

“ Se as pessoas não acham a Matemática simples é só por que ainda não perceberam o quanto a vida é complicada.”

John von Neumann

Resumo

Em geral, o estudo de funções quadráticas é baseado numa quantidade excessiva de fórmulas, todo conteúdo é abordado sem justificativas. Apresentamos a função quadrática e suas propriedades a partir de problemas envolvendo equações do segundo grau e da técnica de completar quadrado. Partindo das definições mostraremos que o gráfico da função quadrática é a parábola e terminamos nosso estudos verificando que várias propriedades da função podem ser lidas a partir da simples observação do seu gráfico. Dessa forma, construímos todo o assunto justificando cada passo, abandonando o uso de fórmulas decoradas e prezando pelo raciocínio.

Palavras-chave: Função quadrática. Forma canônica. Forma Fatorada. Parábola.

Abstract

In general, the study of quadratic functions is based on an excessive amount formulas, all content is approached without justification. Here is the quadratic function and its properties from problems involving quadratic equations and the technique of completing the square. Based on the definitions we will show that the graph of the quadratic function is the parabola and finished our studies finding that several properties of the function can be read from the simple observation of your chart. Thus, we built the whole matter justifying each step, abandoning the use of decorated formulas and valuing the reasoning.

Keywords: Quadratic function. Canonical form. Factored form. Parable.

Sumário

Introdução

Esse trabalho é destinado para professores do ensino básico e para alunos de licenciatura em matemática, que possuam interesse em modificar o tradicional método de lecionar o conteúdo de funções quadráticas, normalmente ensinado no 9ºdo ensino fundamental e no 1ºdo ensino médio.

Analisando os conteúdos contidos nos currículos do ensino médio, o estudo das funções ocupam um lugar de destaque, visto que, na maioria das escolas, é o assunto de praticamente toda 1ª série do ensino médio, sendo também base para as disciplinas de cálculo das universidades aparecendo naturalmente em situações práticas no cotidiano.

A importância do estudo das funções é enaltecida nos parâmetros curriculares nacionais de matemática para o ensino médio em [2]

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (p.121).

Uma problemática enfrentada no cotidiano dos professores e alunos é a falta de material, de qualidade, para apoio no conteúdo a ser lecionado, uma vez que, a maioria dos livros didáticos deixam a desejar em vários aspectos. Como cita Elon em [5] p. 170.

> (...) os livros didáticos de Matemática usados nas escolas de 5ª à 8ª série apresentam deficiências no que diz respeito à objetividade, às aplicações, à oferta de problemas atraentes e ao uso de raciocínio dedutivo. Mas, de um modo geral, não apresentam graves erros matemáticos.
> Infelizmente não se pode dizer o mesmo a respeito dos livros destinados ao Ensino Médio. Muitos deles apresentam sérios erros. Posso mesmo afirmar que nenhum dos livros que examinei (e foram muitos) estava inteiramente isento de afirmações falsas ou argumentos defeituosos.
> Para ser justo, devo admitir que alguns (lamentavelmente poucos) textos analisados continham um número reduzido de erros matemáticos.

> A maioria porém trazia definições, raciocínios, métodos de resolução de problemas e respostas inteiramente inadequadas e até desprovidas de significado. E o que é mais sério: os livros com maior número de erros são os mais vendidos no país! Uma possível explicação para este paradoxo desagradável é que aqueles livros são simples, não exigem muito raciocínio, não contém problemas difíceis e trazem solução completa de todas as questões propostas, todas rotineiras. Esta possível razão do seu êxito comercial é também um indicador do nível médio dos professores do país, que preferem esses textos por não lhe causarem o embaraço de conterem problemas que não sabem resolver ou argumentos que não sabem explicar.

Neste trabalho buscamos estudar funções quadráticas de uma forma ampla, começando com suas origens na civilização babilônica. Essa antiga civilização resolvia problemas, que podemos expressar hoje em dia por equações do segundo grau, por volta de 1700 anos a.C. com a mesma fórmula, ou no caso deles regra, que é utilizada até hoje em nossa escola básica.

Em geral, o conteúdo de funções quadráticas é apresentado de uma forma mecânica, carregado de fórmulas que os alunos não sabem de onde vem e, algumas vezes, o professor também não.

No primeiro capítulo, para motivar o estudo das funções quadráticas, resgatamos um problema antigo e trabalhamos com outro prático que recaem em equações do segundo grau. Para justificar alguns resultados, utilizamos a técnica de completar quadrado, que costuma não ser apresentado aos alunos da escola básica.

No segundo capítulo, definimos função quadrática e estudamos a *Forma Canônica.* A forma canônica é a representação mais importante da função quadrática, devido ao número de informações que extraímos a partir dela. Infelizmente seu estudo é pouco explorado no ensino básico, os livros tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio, pelo menos a maioria deles, não fazem essa abordagem e os professores ao resolverem segui-los, também não.

Para escrever a função em sua forma canônica é necessário recorrer ao completamento de quadrados, que nada mais é do que obter um trinômio quadrado perfeito e fatorá-lo. Desse modo, tanto no 9º ano do ensino fundamental, como no 1º ano do ensino médio é possível abordar o assunto.

A partir da forma canônica, determinamos: os zeros da função, valor máximo ou mínimo e a influência do coeficiente a na função.

Outra forma de se representar a função quadrática, estudada no segundo capítulo, é a forma fatorada, que nos dá informações sobre as raízes da equação, além de possibilitar, de uma maneira algébrica, o estudo dos sinais que a função pode assumir.

No terceiro capítulo, estudamos o gráfico da função quadrática, definimos inicialmente o que é uma parábola e em seguida mostramos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. No decorrer do capítulo, desenvolvemos o estudo das translações do gráfico e aprendemos como, a partir dele, estudar os zeros e o sinal da função, estudos esses, feitos de maneira algébrica nas seções 2.1 e 2.2, respectivamente. Encerramos o nosso estudo com a seção 4.3 onde mostramos que a parábola possui um eixo de simetria.

O uso de softwares de geometria dinâmica é utilizado ao longo do trabalho como uma ferramenta de auxílio, na construção de gráficos. Sugerimos o uso do software geogebra, distribuído gratuitamente na internet através do endereço eletrônico (www.geogebra.org).

Capítulo 1

Problemas Envolvendo Equações Quadráticas

Começaremos nosso estudo resolvendo um problema histórico e outro prático envolvendo equações do segundo grau, assunto já conhecido pelos alunos e que servirá de motivação para definirmos função quadrática.

Problemas envolvendo equações do segundo grau estão entre os mais antigos: Encontrar dois números a e b, conhecendo sua soma e seu produto, $a + b = s$ e $a.b = p$, que podemos resolver hoje em dia por meio de uma equação do segundo grau, são encontradas em tabletes da Babilônia[1] antiga a quase 4000 anos. Ler Asger Aaboe em [1] p. 24 e p. 30.

Problema 1.1 (Problema histórico). *Encontrar dois números conhecendo apenas a sua soma e o seu produto.*

Solução

Considere a soma como s e o produto como p. Sendo um dos números procurados x o outro será $s - x$ e dessa forma o produto será

$$p = (s - x)x,$$

ou seja,

[1]Quando mencionarmos babilônios ou civilização babilônica estamos nos referindo aos povos que habitaram a região da mesopôtamia, como os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios entre outros povos antigos. Usaremos o termo babilônios, como é comum, (assim como Eves em [4]) por simples conveniência.

$$x^2 - sx + p = 0. \tag{1.1}$$

Um outro enunciado para esse mesmo problema seria determinar os lados de um retângulo cujo o semiperímetro é s e a área é a. Como sugere Paulo Contador em [3].

Vale salientar que representar a solução desse problema por meio de uma equação é como fazemos nos dias atuais, pois os povos antigos não conheciam esse mecanismo de representação, que só começou a ser utilizado por Viète[2], no final do século 16. Para resolver esse tipo de expressão os Babilônios possuiam uma receita, que segundo Elon em [5] era enunciada assim:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raíz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Essa regra nos fornece, em nossa notação atual, os números

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \qquad \text{e} \qquad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \tag{1.2}$$

Os passos para encontrar os valores procurados não eram justificados, pois eles não se preocupavam com demonstrações.

De acordo com os autores de [6] há indícios de que os babilônios chegaram a essas expressões da seguinte maneira:

Considerando α e β os números procurados, são conhecidos dois números s e p, tais que $s = \alpha + \beta$ e $p = \alpha\beta$. Assim, apesar de α e β serem desconhecidos, a média aritmética $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{2}$ é conhecida e possui a propriedade de ser equidistante de α e de β.

Admitindo que $\alpha \leq \beta$, temos que $\frac{s}{2} - \alpha = \beta - \frac{s}{2}$. Chamando esta diferença comum de d, o problema inicial de encontrar os dois números α e β, se reduz a encontrar o único número d, pois $\alpha = \frac{s}{2} - d$ e $\beta = \frac{s}{2} + d$.

[2]Deve-se ao matemático francês François Viète, nascido em 1540, a introdução da prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes como menciona Eves em [4] p.309.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} p &= \alpha\beta \\ &= \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) \\ &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2. \end{aligned}$$

Logo

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p,$$

como d é não negativo,

$$d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Daí

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

e

$$\beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

■

Outra maneira de obter os valores encontrados pelos babilônios é o método de completar quadrado, ao qual daremos ênfase no nosso trabalho, tendo em vista sua importância no estudo das funções quadráticas.

Apesar de todo seu valor, esse tema ainda encontra alguma resistência no ensino básico, pelo menos nas séries iniciais do ensino médio. Sendo apresentado apenas quando se trabalha com equações de circunferência, em geral, no último ano.

Quando trabalhamos com equações quadráticas no 9ºdo ensino fundamental, procuramos inicialmente os valores de x que a resolvam. Começamos sempre com os casos mais simples:

$$ax^2 + c = 0,$$

que pode ser resolvida isolando o valor de x:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Os alunos trabalham com exemplos como esse, porém no caso do trinômio estar em sua forma completa os professores abandonam esse método de resolução e já apresentam as fórmulas resolutivas para resolver as equações.

É interessante que o professor trabalhe casos do tipo:

$$a(x+m)^2 + k = 0,$$

onde podemos usar o mesmo raciocínio anterior e isolando o valor de x, encontramos:

$$x = -m \pm \sqrt{-\frac{k}{a}},$$

ou seja, a idéia é partir de um trinômio completo $(ax^2 + bx + c)$ e chegar a uma expressão conhecida, $a(x+m)^2 + k$, que sabemos como determinar sua solução.

Na próxima seção estudaremos como chegar a essa expressão conhecida partindo de um trinômio do segundo grau completo.

1.1 Método de Completar Quadrado

Temos o trinômio $x^2 - sx + p$ e nosso intuito é escrevê-lo como um quadrado perfeito do tipo $x^2 - 2kx + k^2$. Já possuímos:

$$x^2 - 2\frac{s}{2}x + p,$$

mas falta a parcela $(\frac{s}{2})^2$, então, para não alterarmos o trinômio, somamos e subtraímos essa parcela:

$$x^2 - 2\frac{s}{2}x + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p.$$

Dessa forma:

$$x^2 - sx + p = \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p.$$

Com esse trinômio fatorado, podemos obter facilmente a solução da equação (1.1). De fato:

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p = 0,$$

é equivalente a:

$$x - \frac{s}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

ou seja,

$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Que é a solução trabalhada pelos babilônios a quase 4000 anos.

Exemplo 1.1.

Quais são os números cuja a soma é 8 *e o produto é* 15*?*

Solução

Neste exemplo temos $s = 8$ e $p = 15$, assim, se um dos números é x o outro será $8 - x$, e o produto é $x(8 - x) = 15$, que dá origem a equação do segundo grau:

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Completando quadrado, obtemos:

$$(x - 4)^2 - 16 + 15 = 0,$$

que é equivalente a:

$$(x - 4)^2 = 1.$$

Assim

$$x - 4 = \pm 1,$$

portanto:

$$x = 5 \text{ ou } x = 3.$$

■

Observe que achar dois números cuja a soma é 8 e cujo o produto é 15, não é uma tarefa complicada, e sem grandes dificuldades, poderíamos chegar aos números 3 e 5 por inspeção.

É importante que o professor explore essa prática de resolver problemas por inspeção ou tentativa, dando liberdade para que o aluno procure soluções sem utilizar seu caderno, estimulando assim o raciocínio lógico e o cálculo mental que é de suma importância para a vida acadêmica do aluno. É necessário que o professor acompanhe atentamente esse desenvolvimento, pois nem sempre é tão simples resolver equações por meio desse método.

Por exemplo, se queremos dois números, cuja soma é 1 e cujo produto é -1, a resposta não é tão elementar como no caso anterior. Como veremos, esses números não são inteiros, o que acaba dificultando o cálculo mental.

Para $s = 1$ e $p = -1$, podemos escrever:

$$x(1-x) = -1,$$

ou seja,

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Completando quadrado, temos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0,$$

que é equivalente a

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0.$$

Assim

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2},$$

logo

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

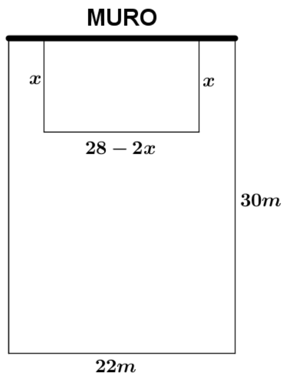
O valor positivo encontrado para x é conhecido como número de ouro.[3]

■

O problema a seguir é uma situação prática, que inicialmente parece ser somente de geometria, mas que recai em uma equação do segundo grau ao buscarmos uma expressão para a área.

Problema 1.2. *Meu avô possui um terreno retangular com dimensões* $22m$ *por* $30m$. *Sabe-se que um dos lados que mede* $22m$ *já possui um muro construído e ele quer utilizar parte desse muro para fazer um cercado retangular de* $48m^2$. *Dispondo de* $28m$ *de tela é possível construir esse cercado? Quais são as medidas dos seus lados?*

[3] O número de ouro é considerado um símbolo de harmonia. Aparece na natureza, na arte, arquitetura, música e nos seres humanos. Por exemplo a razão entre um termo e seu antecessor na sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) converge para o número de ouro.



Solução

Se chamarmos a medida de um dos lados do cercado de x, a outra medida será $(28-2x)$. Admitindo que o lado que mede x é o não paralelo ao muro, a área do cercado é $x(28-2x)$ e podemos escrever:

$$x(28-2x) = 48, \text{ ou seja, } x^2 - 14x + 24 = 0.$$

Completando quadrado:

$$(x-7)^2 - 49 + 24 = 0, \text{ o que nos leva a } (x-7)^2 = 25,$$

e assim

$$x - 7 = \pm 5,$$

ou seja,

$$x = 12 \text{ ou } x = 2.$$

Encontramos duas soluções para a equação $x^2 - 14x + 24 = 0$, porém só uma delas satisfaz nosso problema, pois para $x = 2$, o cercado terá dimensões $24m$ x $2m$, o que não é possível, já que o muro só possui $22m$ de extensão.

Desse modo, a única solução possível para o problema é $x = 12$, teremos assim um cercado com dimensões $4m$ x $12m$, utilizando apenas, $4m$ do muro.

■

Observe que temos duas soluções distintas para a nossa equação, mas uma delas não é solução do nosso problema. É importante que os alunos percebam, através de problemas como este, que nem sempre as raízes da equação são as soluções do problema, cabendo a eles analisar e decidir quais delas se adequam a condição estabelecida inicialmente.

Problemas que possuem mais de uma solução, infelizmente, não são bem explorados em nosso ensino básico, talvez para não haver maiores explicações, visto que situações desse tipo necessitam de uma análise mais complexa e aprofundada, gerando uma maior discussão. Esse tipo de análise acaba desenvolvendo, no aluno, um senso crítico e avaliador, que busca examinar cada solução encontrada e comparar com a realidade do problema.

Capítulo 2

Função Quadrática

Ao definirmos função quadrática, estaremos admitindo que os alunos já conhecem o conceito de função e suas propriedades.

Elon ressalta em [5] a importância de ter objetividade ao se definir o conceito de função:

> Um exemplo flagrante da falta de ojetividade (que persiste até hoje em quase todos os livros didáticos brasileiros) é a definição de função como um conjunto de pares ordenados. Função é um dos conceitos fundamentais da matemática (o outro é conjunto). Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática (...)
> Para um matemático, ou um usuário da Matemática, uma função $f : X \to Y$, cujo o domínio é o conjunto X e contra-domínio o conjunto Y, é uma correspondência (isto é, uma regra, um critério, um algoritmo ou uma série de instruções) que estabelece, sem exceções nem ambiguidade, para cada elemento x em X, sua imagem $f(x)$ em Y.

Definição 2.1. *Chamaremos de função quadrática, ou função polinomial do segundo grau, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o valor $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.*

Algumas vezes, ao longo do texto, vamos nos referir a função quadrática simplesmente por f.

Exemplo 2.1.

i) A função $f(x) = x^2 - 3x + 7$ é uma função quadrática, com $a = 1, b = -3$ e $c = 7$;

ii) A função $f(x) = -9x^2 + 4x$ é uma função quadrática, com $a = -9, b = 4$ e $c = 0$;

iii) A função $f(x) = 5x^2$ é uma função quadrática, com $a = 5, b = 0$ e $c = 0$;

iv) A função $f(x) = 2x - 17$ não é uma função quadrática, pois $a = 0$.

O fato do valor de a ser diferente de zero, garante que exemplos como o (iv), não sejam consideradas funções quadráticas, do contrário teríamos a função afim como um caso particular dessas funções.

2.1 Forma Canônica

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Colocando a em evidência e utilizando a técnica de completar quadrado, temos:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

Podemos assim, reescrever a lei de formação da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte forma:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{2.1}$$

De maneira equivalente:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0, \tag{2.2}$$

onde $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Esta é a chamada forma canônica da função quadrática e a partir da qual, obteremos propriedades importantes da f.

1ª Propriedade: *Valor máximo e valor mínimo*

Definição 2.2. *Dado $m \in \mathbb{R}$, dizemos que $f(m)$ é o valor máximo da função f se $f(x) \leq f(m), \forall x \in \mathbb{R}$ e dizemos que $f(m)$ é o valor mínimo se $f(x) \geq f(m), \forall x \in \mathbb{R}$.*

Note que a forma canônica (2.2) da função f é composta por duas parcelas, a parcela: $a(x-x_0)^2$ que varia com x e a parcela $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$, formada apenas por valores constantes.

Se $a > 0$, então $a(x-x_0)^2 \geq 0$ e

$$a(x-x_0)^2 + y_0 \geq 0 + y_0.$$

Assim:

$$f(x) \geq y_0,$$

ou seja, f atinge o valor mínimo $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou ainda, em $x = x_0$.

Se $a < 0$, então $a(x-x_0)^2 \leq 0$ e

$$a(x-x_0)^2 + y_0 \leq 0 + y_0.$$

Assim:

$$f(x) \leq y_0,$$

ou seja, f atinge o valor máximo $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou ainda, em $x = x_0$.

Sendo assim, o ponto do domínio $x_0 = -\frac{b}{2a}$ é o ponto que maximiza ou minimiza a função, dependendo exclusivamente do sinal de a.

Resumindo:

- Se $a > 0$ a função admite um valor mínimo;
- Se $a < 0$ a função admite um valor máximo.

Desse modo, estando a função em sua forma canônica, determinar os valores máximo ou mínimo (dependendo do sinal de a) é muito simples. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2.

Encontre o valor mínimo da função $f(x) = x^2 - 10x + 21$.

Solução

Escrevendo $f(x)$ em sua forma canônica, temos:
$f(x) = (x-5)^2 - 25 + 21,$ ou seja, $f(x) = (x-5)^2 - 4.$ O valor mínimo da função é -4 que ocorre no ponto do domínio $x = 5$.

Vamos, agora, pensar no Problema 1.2, de uma maneira um pouco diferente.

Problema 2.1. *Meu avô possui um terreno retangular com dimensões 22m por 30m. Sabe-se que um dos lados de medida 22m já possui um muro construído e ele quer utilizar parte desse muro para fazer um cercado retangular. Dispondo de 28m de tela, quais são as medidas dos lados desse cercado para que ele consiga a maior área possível.*

Solução

Considerando x a medida do lado não paralelo ao muro, o lado que é paralelo mede $(28 - 2x)$, dessa forma temos que a área (em m^2) é uma função do lado x, que vamos denotar por $A(x) = x(28 - 2x)$.

Escrevendo a expressão $A(x) = x(28 - 2x)$ em sua forma canônica, obtemos:

$$A(x) = -2(x - 7)^2 + 98,$$

logo, sua área máxima será de $98m^2$, sendo possível quando $x = 7m$ e o lado paralelo ao muro possuir $14m$ de comprimento. ■

2ª Propriedade: *Zeros da função quadrática*

Os zeros da função f são os valores de x para os quais $f(x) = 0$, ou de forma equivalente são as raízes[1] da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Observe que a resolução do Problema 1.2 é na verdade a busca das raízes da equação $x^2 - 14x + 24 = 0$.

Determinar os zeros da função quadrática, estando ela em sua forma canônica, não é uma tarefa complicada. De fato, partindo de $f(x) = 0$, obtemos a equação:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0, \tag{2.3}$$

cuja solução é a "famosa" fórmula[2] apresentada no ensino básico:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.4}$$

[1] Assim como Daniel Cordeiro em [8], chamaremos de raízes os valores de x que resolvem uma equação e usaremos o termo zeros para funções.

[2] De maneira equivocada, essa expressão é conhecida como fórmula de Bhaskara no ensino básico brasileiro. Ao longo do texto vimos que a resolução de equações quadráticas por meio de fórmulas resolutivas já era trabalhada a quase 4000 anos e o matemático Árabe Baskhara é do século 12. Sendo assim, não faz sentido batizar a fórmula com o nome desse matemático.

O termo $b^2 - 4ac$ é representado pela letra grega Δ (delta),

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{2.5}$$

e tem importância fundamental no estudo das raízes da equação do segundo grau.

Com essa nova notação, a equação (2.4) pode ser representada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{2.6}$$

Não vemos motivo para que essa expressão seja apresentada aos alunos como a fórmula para encontrar as raízes da equação do segundo grau, pois o método de completar quadrado cumpre muito bem esta tarefa.

Carregar os alunos com fórmulas que não possuam significado conclusivo, acaba privilegiando o aprendizado mecânico, que não desenvolve o raciocínio do aluno e disperdiça todo potencial que ele possui para buscar o aprendizado.

Contudo, a partir da ánalise da fórmula (2.6) podemos extrair informações importantes sobre o estudo das raízes da equação do segundo grau. Das equações 2.3 e 2.5 obtemos a equação:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

que só ftem solução quando $\Delta \geq 0$, já que o primeiro membro da equação é um número elevado ao quadrado.Dizemos então que:

- Se $\Delta \geq 0$, a função possui zeros reais;
- Caso contrário, ou seja, $\Delta < 0$, a função não possui zeros reais.

Quando $\Delta = 0$, $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ e portanto $x = -\frac{b}{2a}$ é o único zero da função.

■

Quando estamos trabalhando com equações do segundo grau e o valor de Δ é negativo, a equação não possui solução no conjunto dos números reais. Nos próximos capítulos, veremos que mesmo a função não possuindo zeros reais, ainda é possível, por exemplo, esboçar seu gráfico e determinar o ponto de máximo ou de mínimo.

Exemplo 2.3. *Determine os zeros das funções abaixo:*

$a) f(x) = x^2 + 5x + 6$

Do completamento de quadrados temos:

$$x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

que equivale a:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ ou seja, } x = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$x = -2 \text{ ou } x = -3.$$

■

$b) f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Completando quadrado temos:

$$2x^2 - 3x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} = 0,$$

que é equivalente a:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{31}{16}.$$

Logo a função não possui zeros reais, pois o primeiro membro é um termo elevado ao quadrado.

■

$c) f(x) = -x^2 + 2x - 1$

Completando quadrado temos:

$$-x^2 + 2x - 1 = (-1)(x - 1)^2 = 0,$$

que é equivale a:

$$(x - 1)^2 = 0, \text{ ou seja, } x = 1.$$

Neste caso um único valor é zero desta função.

■

2.2 Forma Fatorada

Para escrever a forma fatorada da função quadrática, precisamos das expressões para a soma e o produto das raízes da equação do segundo grau em função apenas de seus coeficientes. Chamando as raízes da equação de $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e denotando por s a soma das raízes obtemos:

$$\begin{aligned} s &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= -\frac{2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Denotando por p o produto das raízes e procedendo de maneira análoga:

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= (-1)\left[\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(b+\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}\right] \\ &= (-1)\left(\frac{-b^2+b^2-4ac}{4a^2}\right) \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sejam α e β as raízes reais da equação $ax^2+bx+c=0$. Colocando a em evidência na lei de formação da função f e usando as equações (2.7) e (2.8) obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta] \\ &= a[x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta] \\ &= a[x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)] \\ &= a[(x-\alpha)(x-\beta)]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

A função polinomial do segundo grau escrita na forma (2.9) é chamada forma fatorada, a partir da qual obteremos mais uma propriedade importante da f:

3ª Propriedade: *Sinal da função*

Estudar o sinal de uma função f é encontrar os valores de x para os quais a imagem

$f(x)$ é um número negativo e os valores de x para os quais a imagem $f(x)$ é um número positivo.

Sejam α e β os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e vamos admitir $\alpha < \beta$.

Para os valores de x que estão entre as raízes $(\alpha < x < \beta)$, o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é negativo, assim pela equação (2.9) o sinal de f será contrário ao de a.

Para os valores $(x < \alpha$ ou $x > \beta)$ de x que estão nas extremidades de α e β , o produto $(x - \alpha)(x - \beta)$ é positivo e pela equação (2.9) o sinal de f é o mesmo de a.

Caso α seja igual a β, pela equação (2.9) temos $f(x) = a(x - \alpha)^2$, neste caso a função se anula apenas para $x = \alpha$ e terá o mesmo sinal de a para os demais valores reais de x, visto que $(x - \alpha)^2$ é sempre positivo, se $x \neq \alpha$.

No caso da função não possuir zeros reais, não podemos escrevê-la em sua forma fatorada, porém o estudo de seus sinais pode ser analisado através do valor máximo ou mínimo que a função assume. Vejamos:

Da seção 2.1 sabemos que se $a > 0$ a função possui valor mínimo $-\frac{\Delta}{4a}$, como a função não possui zeros, ou seja, $\Delta < 0$, esse seu valor mínimo será positivo e portanto $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De maneira análoga, se $a < 0$ a função possui valor máximo $-\frac{\Delta}{4a}$, como a função não possui zeros, ou seja, $\Delta < 0$, esse seu valor máximo será negativo e portanto $f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Gráfico da Função Quadrática

No ensino de funções quadráticas é comum o professor construir uma tabela com alguns valores para x, encontrar os valores correspondentes para $f(x)$, marcar esses pontos no plano cartesiano, uni-los seguindo os traços de uma parábola e enunciar: "Vejam esse gráfico representa uma parábola".

E assim é dada a definição de parábola para os alunos:

"Parábola é o gráfico de uma função quadrática"

Com essa definição o aluno acaba associando a parábola, de forma equivocada, a qualquer gráfico ou figura que possua o formato similar ao dela.

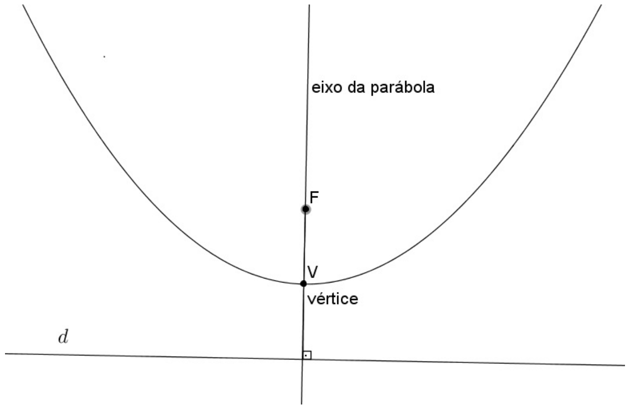
Para evitar confusões desse tipo é importante definir corretamente a parábola e o gráfico de uma função quadrática e mostrar que esses conjuntos são iguais.

Neste capítulo nosso objetivo é explicar o significado matemático da frase: O gráfico da função quadrática é uma parábola.

Inicialmente apresentaremos as definições de parábola e de gráfico da função quadrática .

Definição 3.1. *Dada uma reta d chamada de diretriz e um ponto F, que não pertence a reta dada, chamado de foco, chamamos de parábola o conjunto de pontos do plano que equidistam do foco F e da diretriz d.*

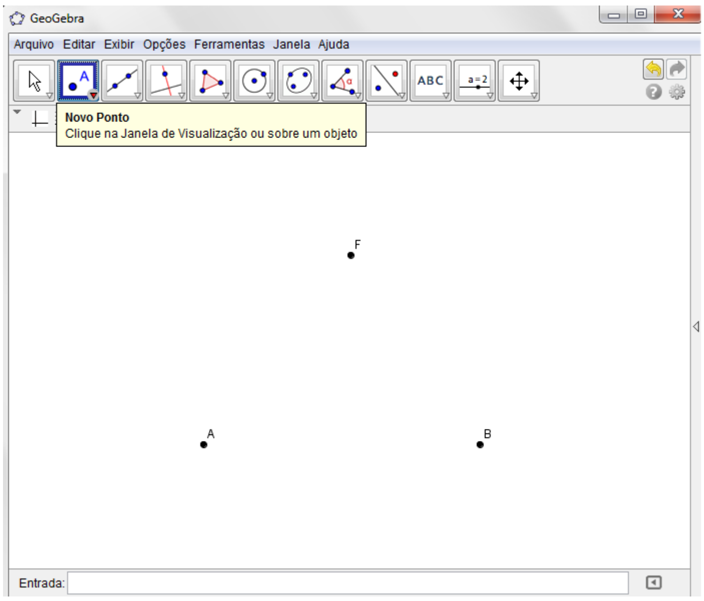
A reta perpendicular à diretriz passando por F será chamada de eixo da parábola e o ponto V, que é o ponto médio do segmento com extremidades em F e na intersecção da diretriz com o eixo da parábola, será chamado de vértice.



Vamos utilizar um software de geometria dinâmica para visualizar a construção da parábola passo a passo a partir da definição.

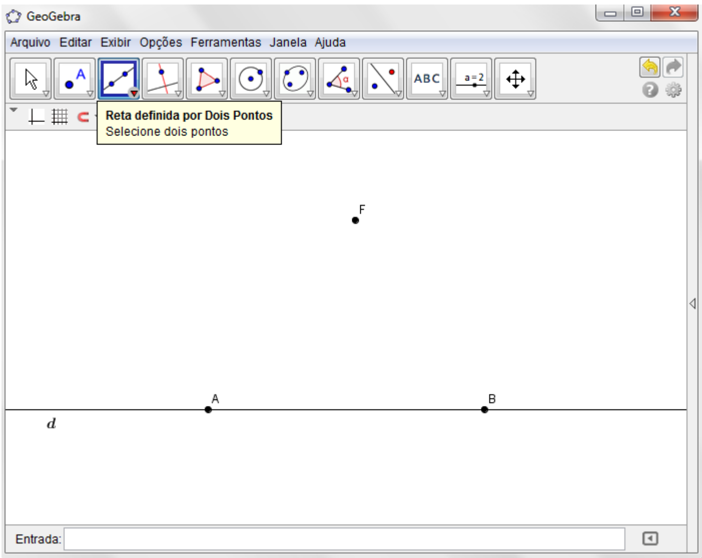
Primeiro passo:

Marcar dois pontos, A e B, no plano para definir a reta diretriz d. Em seguida marcar um ponto que não pertence a reta, esse será nosso foco F, para isso usaremos a ferramenta **Novo Ponto** .



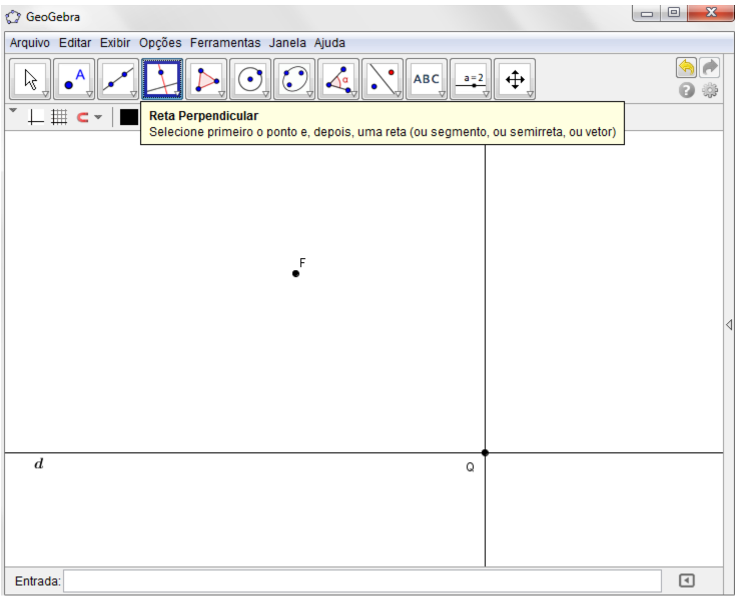
Segundo passo:

Usando a ferramenta **Reta definida por Dois Pontos** e selecionando os pontos A e B contruímos a reta diretriz d.



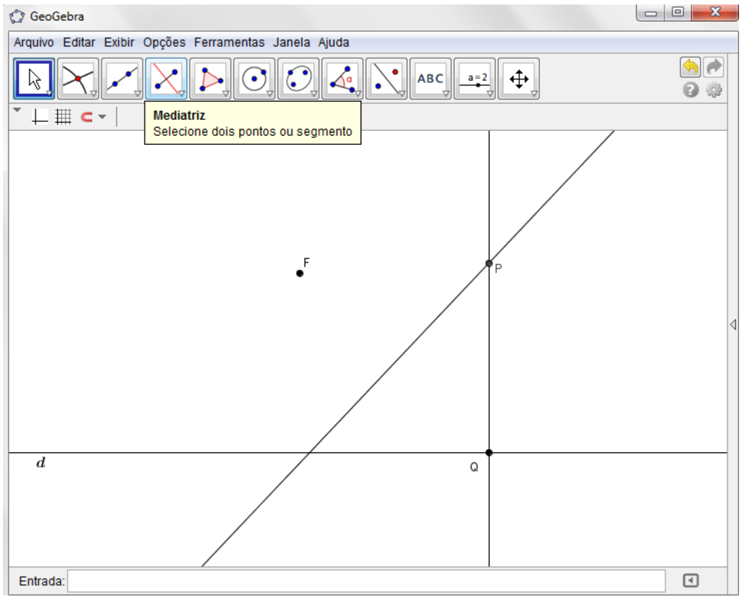
Terceiro passo:

Marcar um ponto Q com a ferramenta **Novo Ponto** que pertença a reta d e que se movimenta livremente. Por esse ponto passar uma reta que seja perpendicular a diretriz com a ferramenta .



Quarto passo:

Marcar um ponto que seja equidistante do foco F e da diretriz d. Para isso trace a reta mediatriz com a ferramenta entre o foco F e o ponto Q. Utilizando a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos** encontramos o ponto P procurado.

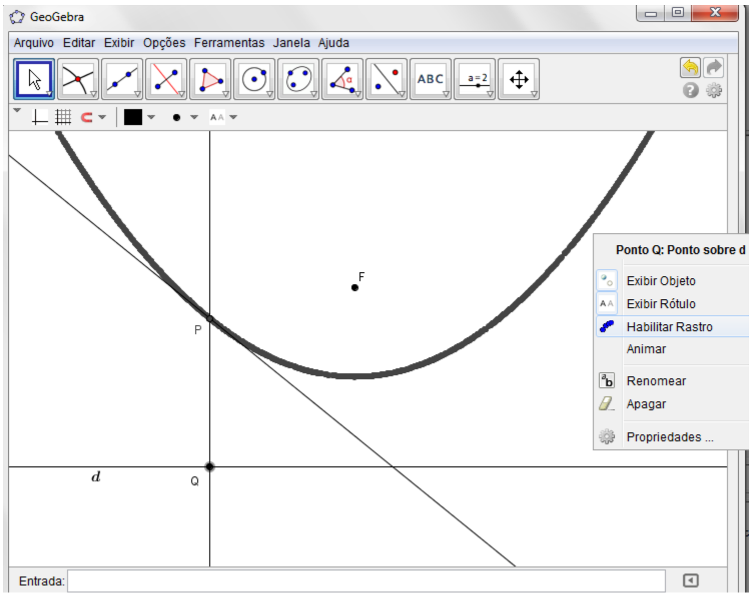


Quinto passo:

Ao movimentar o ponto Q percebemos que o ponto P percorre um caminho mantendo a propriedade de ser equidistante do ponto F e da reta diretriz d. Esse conjunto de pontos é o que chamamos de parábola.

Daí, temos duas opções a fazer:

1ª) Usar a ferramenta **Habilitar Rastro** que pode ser ativida clicando com o botão direito do mouse.



2ª) Usar a ferramenta **Lugar Geométrico** .

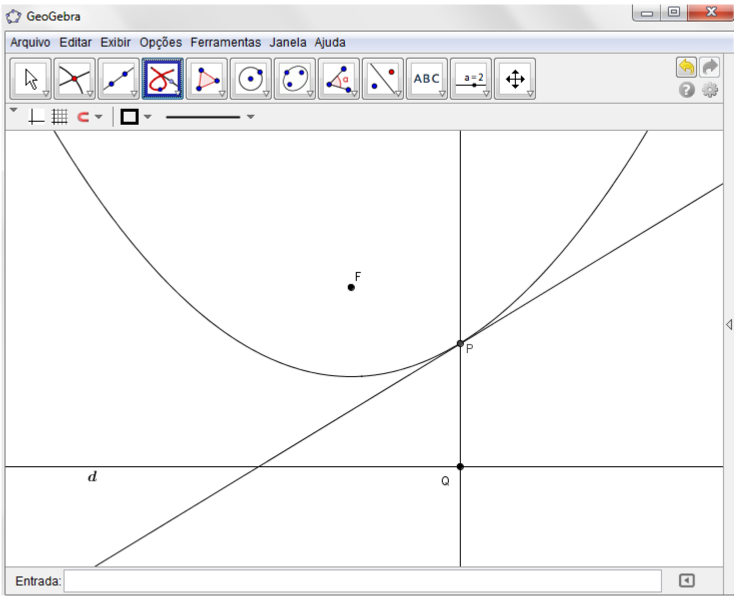


Figura 3.1: Parábola de foco F e diretriz d

Se quisermos visualizá-la sem os objetos auxiliares que utilizamos basta clicar com o botão direito e escolher a opção exibir objeto.

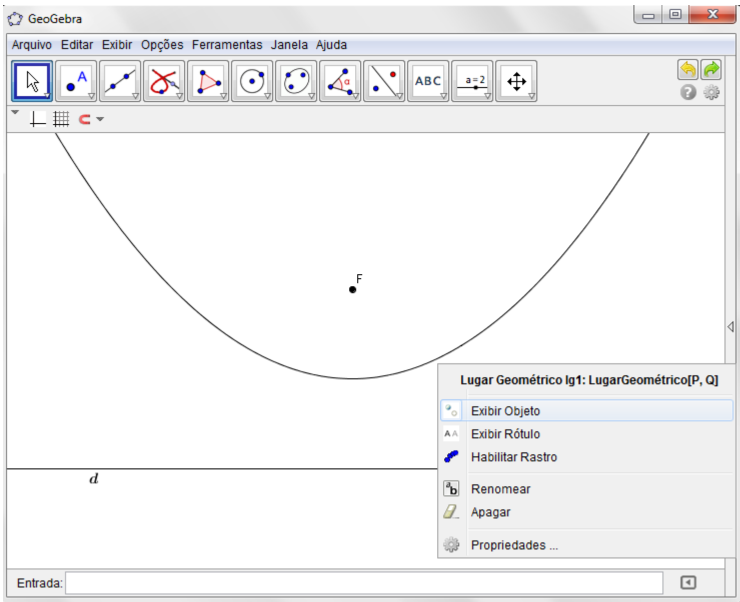


Figura 3.2: Parábola de foco F e diretriz d

Definição 3.2. *O gráfico da função quadrática* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*;* $f(x) = ax^2 + bx + c$*,* $a \neq 0$ *é o conjunto de pares ordenados da forma* $(x, f(x))$*.*
Resumidamente: $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = ax^2 + bx + c\}$

Estamos trabalhando, portanto, com subconjuntos de pontos do plano. A estratégia será então mostrar que os pontos da parábola cuja a diretriz é horizontal pertencem ao gráfico de uma função quadrática e que os pontos do gráfico da função quadrática pertencem a uma parábola.

Começaremos com a função quadrática mais simples $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ e em seguida usando translações horizontais e verticais obteremos o gráfico da função quadrática $f(x) = = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

3.1 O gráfico de $f(x) = ax^2$

O gráfico da função $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$ é a parábola de foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e diretriz d: $y = -\frac{1}{4a}$.

Vamos considerar o vértice V da parábola coincidindo com a origem do plano cartesiano e o foco sendo o ponto de coordenadas $(0, p)$. Dessa forma a diretriz d será a reta $y = -p$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola. Sabemos pela definição (3.1), que P é equidistante do foco F e da diretriz d, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p, \tag{3.1}$$

onde o primeiro membro da equação representa a distância entre os pontos P e F, enquanto o segundo membro representa a distância entre o ponto P e a diretriz d. Conforme a figura 3.3.

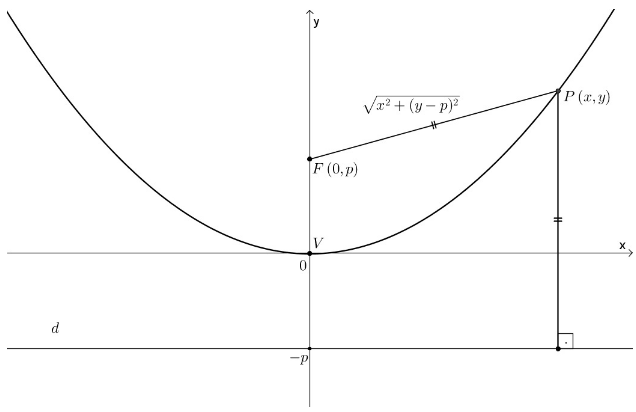


Figura 3.3: Representação da distância entre o foco F e o ponto P

Elevando ao quadrado os dois lados da equação (3.1), obtemos

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2,$$

que é equivalente a:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2,$$

de onde, segue:

$$4py = x^2,$$

ou ainda:

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

Logo os pontos da parábola de foco $F(0, p)$ e diretriz d: $y = -p$ satisfazem a equação $y = \frac{x^2}{4p}$, ou seja, pertencem ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ com $a = \frac{1}{4p}$.

Agora vamos mostrar que os pontos do gráfico da função $f(x) = ax^2$ pertencem a parábola de foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e diretriz d: $y = -\frac{1}{4a}$.

Seja $P(x, ax^2)$ um ponto do gráfico da função f. A distância entre P e F é dada por $\sqrt{x^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2}$.

Note que:

$$\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}}$$

$$= \sqrt{a^2x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

Que nada mais é do que a distância entre P e a diretriz. Como a igualdade é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$ isso mostra que os pontos do gráfico de $f(x) = ax^2$ coincidem com os da parábola de foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e de diretriz d: $y = -\frac{1}{4a}$.

$\blacksquare$

Definição 3.3. *Considere uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Se aplicarmos a translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + y_0)$ a qual leva o eixo horizontal $y = 0$ na reta horizontal $y = y_0$, o gráfico da nova função é obtido a partir do gráfico da função g, deslocando-o verticalmente y_0 unidades acima ou abaixo, conforme $y_0 > 0$ ou $y_0 < 0$.*

Definição 3.4. *Considere uma função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Se aplicarmos a translaçao horizontal* $(x, y) \mapsto (x + x_0, y)$ *a qual leva o eixo vertical* $x = 0$ *na reta vertical* $x = x_0$, *então o gráfico da nova função é obtido a partir do gráfico da função* g, *deslocando-o horizontalmente* x_0 *unidades, para a direita ou para esquerda, conforme* $x_0 > 0$ *ou* $x_0 < 0$.

Mais detalhes sobre translações podem ser encontrados em [6] pp. 130-131.

3.2 O gráfico de $f(x) = ax^2 + y_0$

O gráfico da função $f(x) = ax^2 + y_0$, onde $a, y_0 \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma parábola de foco $F(0, y_0 + \frac{1}{4a})$ e diretriz $y = y_0 - \frac{1}{4a}$.

Com efeito, observe que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + y_0$ resulta do gráfico da função $g(x) = ax^2$ pela translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + y_0)$ a qual leva o eixo OX na reta $y = y_0$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = y_0 - \frac{1}{4a}$. Figura 3.4.

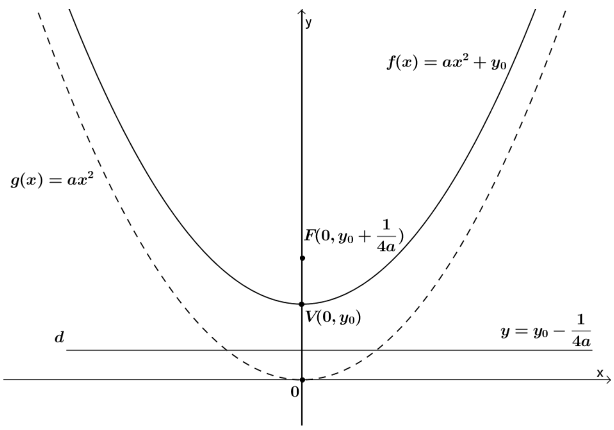
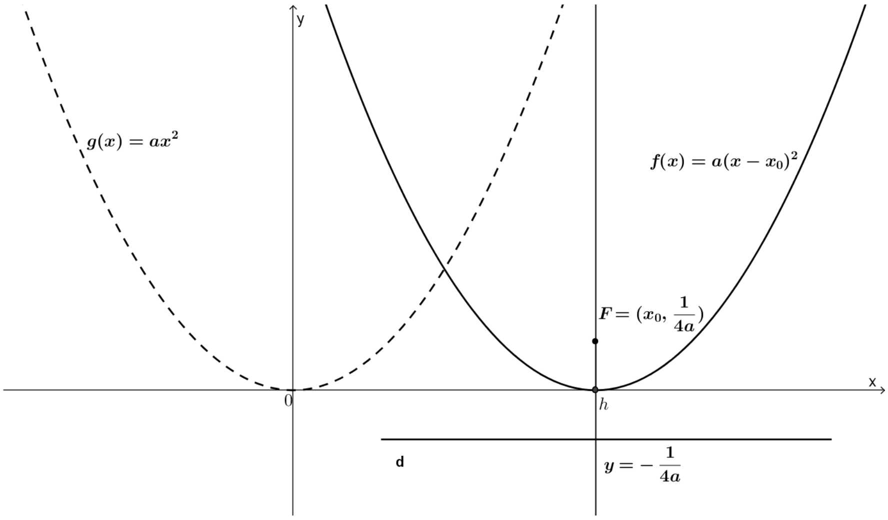


Figura 3.4: Translação vertical da parábola $g(x) = ax^2$

3.3 O gráfico de $f(x) = a(x - x_0)^2$

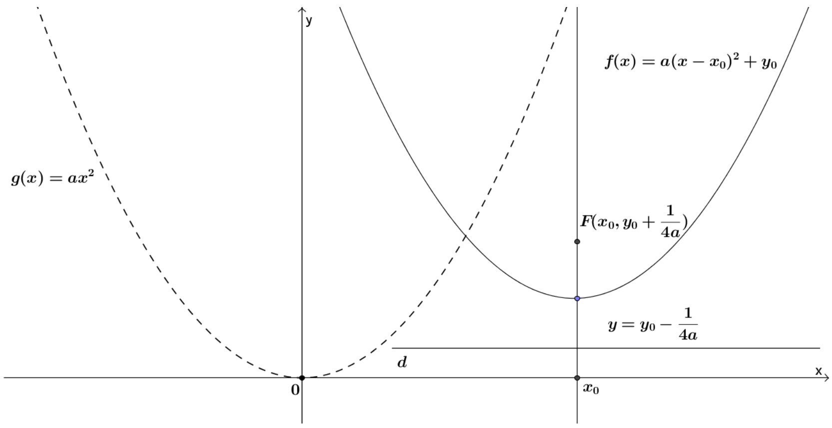
O gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2$, onde $a, x_0 \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma parábola de foco $F(x_0, \frac{1}{4a})$ e diretriz $y = -\frac{1}{4a}$.

De fato, observe que o gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2$ resulta do gráfico da função $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + x_0, y)$ a qual leva, por exemplo, o ponto $(0, 0)$ no ponto $(x_0, 0)$ e de maneira mais geral o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = x_0$.



3.4 O gráfico de $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

Ao transladarmos horizontalmente e verticalmente a função $g(x) = ax^2$, teremos a função $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, que possui foco $F(x_0, y_0 + \frac{1}{4a})$ e diretriz $y = y_0 - \frac{1}{4a}$, visto que o foco da função g deslocou-se x_0 unidades horizontalmente e y_0 unidades verticalmente, enquanto a diretriz, que não sofre deslocamento horizontal, se deslocou y_0 unidades verticalmente.



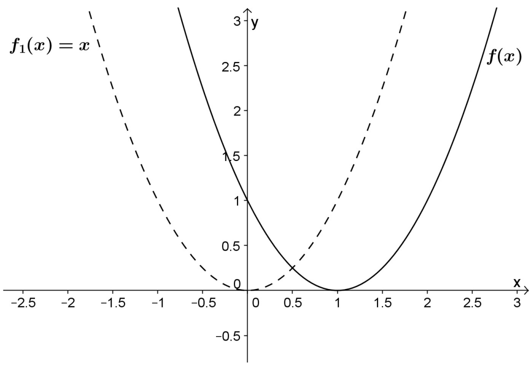
Note que a função quadrática transladada horizontalmente x_0 unidades e vertcialmente y_0 unidades, nada mais é do que a função quadrática escrita em sua forma canônica (2.2). Como toda função quadrática pode ser escrita como a equação (2.2), logo o gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola.

Vemos assim que a forma canônica facilita o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Basta tomar uma função do tipo $f(x) = ax^2$ e a partir dela realizar as translações necessárias, que ficam evidentes estando f em sua forma canônica.

Exemplo 3.1. *Construir o gráfico de cada uma das funções que seguem:*

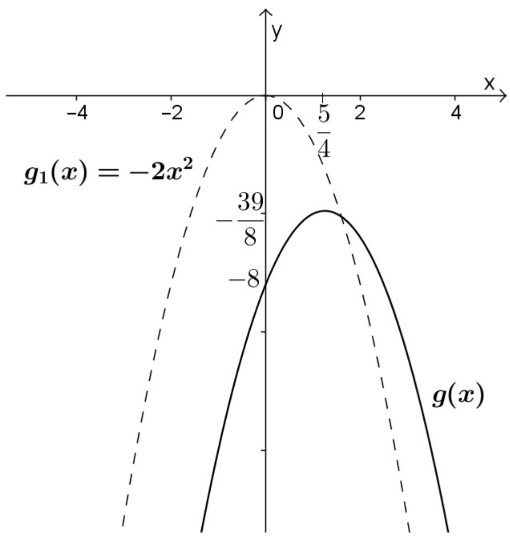
a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Escrevendo a função em sua forma canônica $f(x) = (x-1)^2$. Aplicando a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ na função $f_1(x) = x^2$ obtemos o gráfico da função $f(x) = = (x-1)^2$.



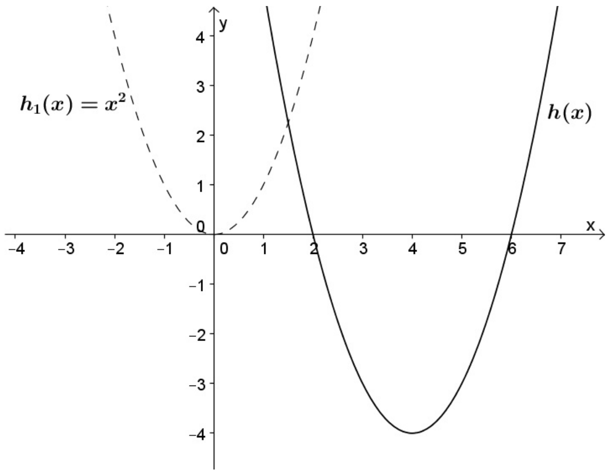
b) $g(x) = -2x^2 + 5x - 8$

Escrevendo a função em sua forma canônica $g(x) = -2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{39}{8}$. A partir da função $g_1(x) = -2x^2$, aplicamos a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + \frac{5}{4}, y)$ e a translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y - \frac{39}{8})$, obtendo o gráfico da função $g(x) = -2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{39}{8}$.



c) $h(x) = x^2 - 8x + 12$

Escrevendo a função na forma canônica $h(x) = (x - 4)^2 - 4$. A partir da função $h_1(x) = x^2$ aplicamos a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + 4, y)$ e a translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y - 4)$, obtendo o gráfico da função $h(x) = (x - 4)^2 - 4$.



Capítulo 4

Estudo do Gráfico da Função Quadrática

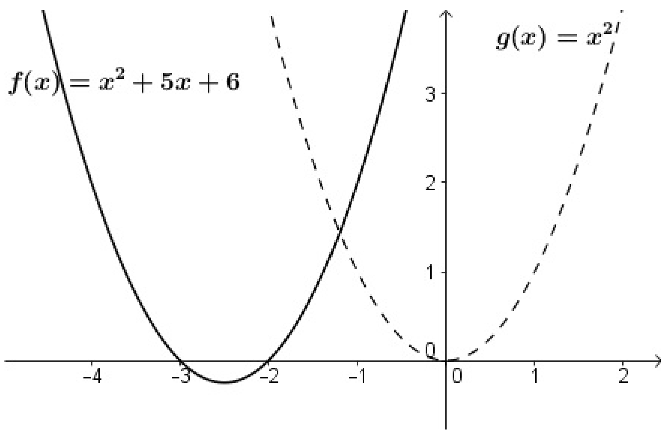
Conhecido o gráfico, ou seja, tendo a parábola, podemos extrair várias informações a respeito da função, como, por exemplo, o estudo dos zeros e do sinal da função, feitos de maneira algébrica nas seções 2.1 e 2.2, respectivamente.

Encerramos o nosso estudo com a seção 4.3 onde mostramos que a parábola é simétrica em relação a reta $x = -\frac{b}{2a}$.

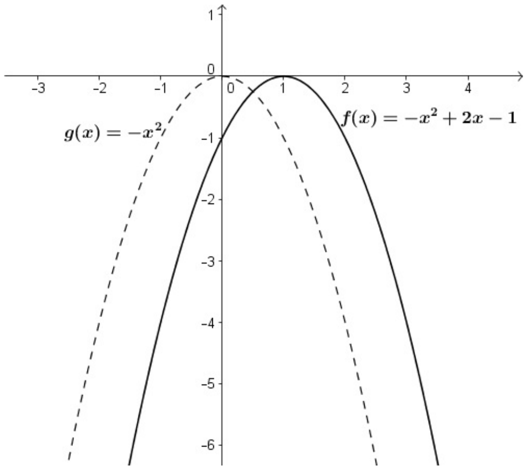
4.1 Zeros da função

No que diz respeito aos zeros temos:

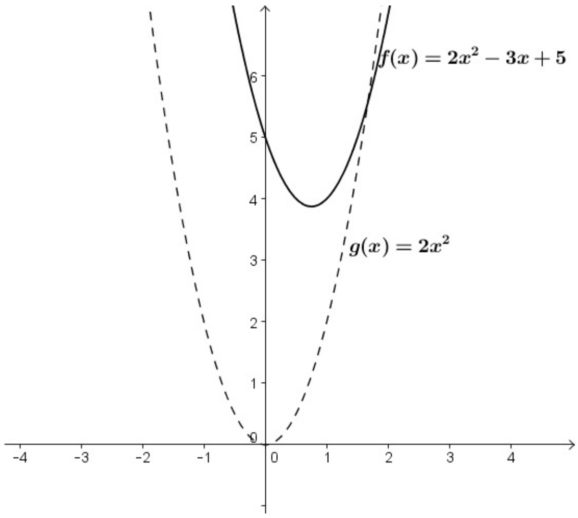
- O gráfico toca o eixo das abscissas em dois ponto distintos, quando a função possui zeros diferentes. Assim como no exemplo 2.3 item a;



- O gráfico toca o eixo x num único ponto, quando a função possui zeros iguais. Assim como no exemplo 2.3 item c;



- Se a função não possui zeros reais, então o gráfico não toca o eixo das abscissas. Como no exemplo 2.3 item b.



4.2 Estudo do sinal

Já estudamos os sinais da função de uma maneira algébrica a partir da forma fatorada, agora faremos esse estudo observando o gráfico.

Ao esboçar o gráfico da função temos alguns casos a analisar, conforme $a > 0$ ou $a < 0$.

Se $a > 0$ a função possui um valor mínimo e, portanto, a concavidade (abertura) da parábola é voltada para cima. Temos três casos para analisar:

1º) A parábola não toca o eixo x, ou seja, $\Delta < 0$ e dessa forma a função só assume valores positivos para todo $x \in \mathbb{R}$. Figura 4.1.

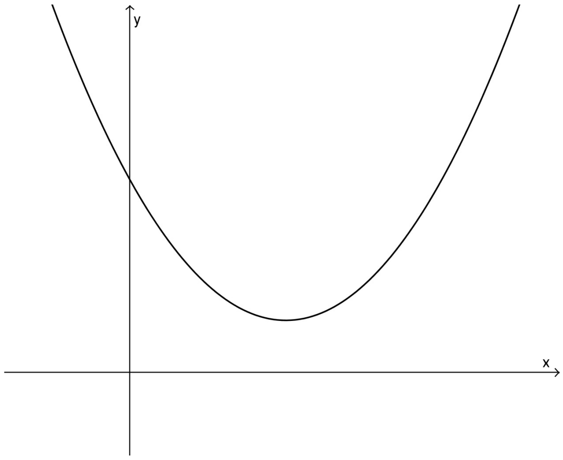


Figura 4.1: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta < 0$

2º) A parábola toca no eixo x em apenas um ponto, isto é, $\Delta = 0$, neste caso a função será zero quando x for raíz da equação e será positiva para qualquer outro valor de x. Figura 4.2.

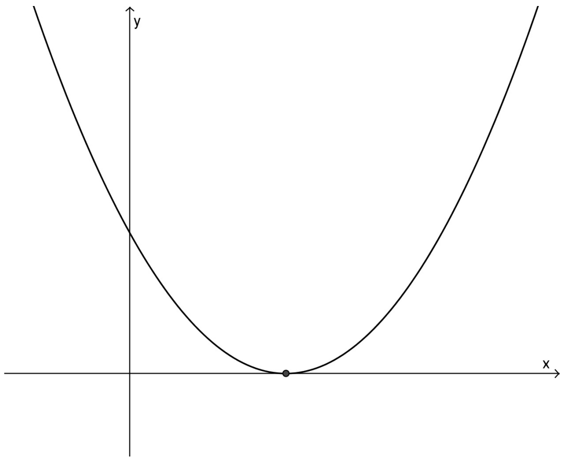


Figura 4.2: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta = 0$

3º) A parábola corta o eixo x em dois pontos distintos, ou seja, $\Delta > 0$. Este é o caso mais interessante a ser considerado, pois requer uma análise mais detalhada a respeito do gráfico. Como $\Delta > 0$ a função possui dois zeros reais diferentes. Considerando que α e β são os zeros da função e que $\alpha < \beta$, a função será positiva quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$ e será negativa quando $\alpha < x < \beta$. Como mostra a figura 4.3.

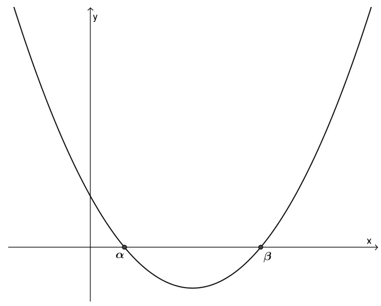


Figura 4.3: Função quadrática com $a > 0$ e $\Delta > 0$

Se $a < 0$ a função possui um valor máximo e, portanto, a concavidade (abertura) da parábola é voltada para baixo. Temos três casos para analisar:

1º) A parábola não toca no eixo x, ou seja, $\Delta < 0$ e dessa forma a função só assume valores negativos para todo $x \in \mathbb{R}$. Figura 4.4.

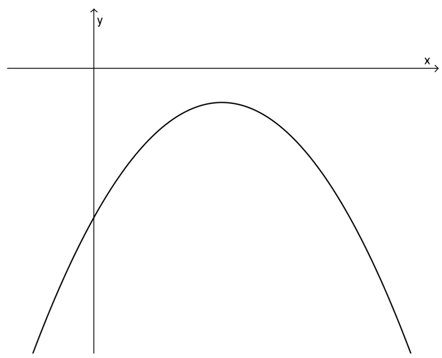


Figura 4.4: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta < 0$

2º) A parábola toca no eixo x em um único ponto, isto é, $\Delta = 0$, neste caso a função é zero quando x for raíz da equação e será negativa para qualquer outro valor de x. Figura 4.5.

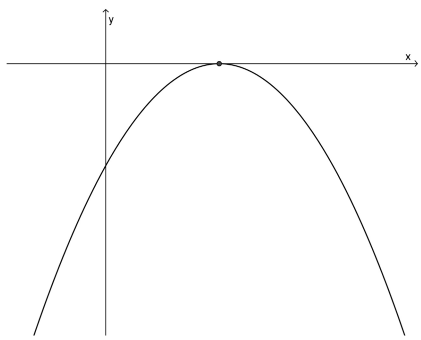


Figura 4.5: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta = 0$

3º)Por fim o caso mais interessante, quando a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos, ou seja, $\Delta > 0$. Consequentemente a função possui dois zeross reais e diferentes, digamos α e β, com $\alpha < \beta$, então a função será positiva quando $\alpha < x < \beta$ e será negativa quando $x < \alpha$ ou $x > \beta$. Figura 4.6.

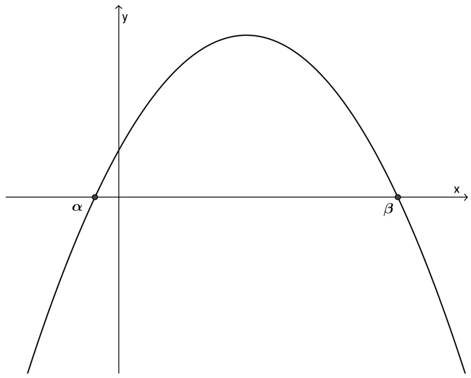
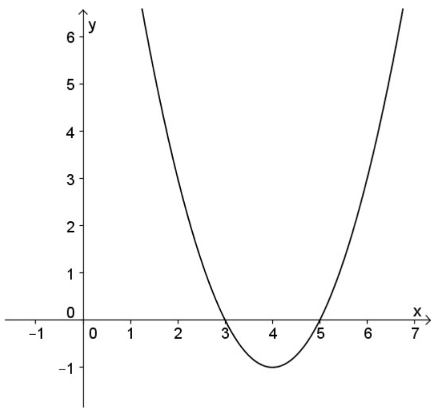


Figura 4.6: Função quadrática com $a < 0$ e $\Delta > 0$

Exemplo 4.1. *Estudar os sinais das funções:*

a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$. Escrevendo a função na forma canônica temos: $f(x) = (x-4)^2 - 1$.

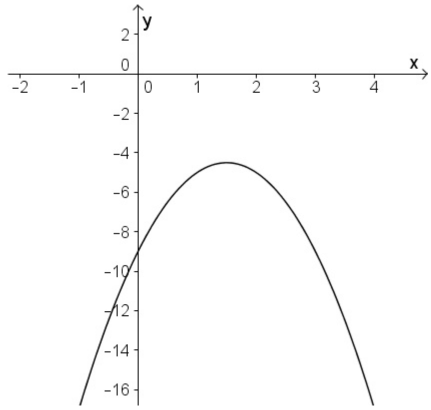
Esboçando o gráfico:



Assim, para $3 < x < 5$, $f(x) < 0$ e para $x < 3$ ou $x > 5$, $f(x) > 0$.

b) $f(x) = -2x^2 + 6x - 9$. Escrevendo a função na forma canônica temos:
$f(x) = -2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2}$.

Esboçando o gráfico:



A função é sempre negativa para todo $x \in \mathbb{R}$

4.3 Eixo de simetria da função quadrática

Ao verificar o gráfico de uma função quadrática, observamos que há uma certa simetria em seu formato. Mostraremos que $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se, os pontos x_1 e x_2 são simétricos em relação a reta vertical $-\frac{b}{2a}$, ou seja, $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ para todo x_1 e x_2 reais. Isto significa que a reta $-\frac{b}{2a}$ é o eixo de simetria da parábola.

Demonstração: Se $f(x_1) = f(x_2)$, então $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

De fato, sejam x_1 e x_2 reais com $x_1 \neq x_2$ e tais que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja,

$$ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

Agrupando os termos de maneira conveniente:

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0,$$

e fatorando a diferença $(x_1^2 - x_2^2)$ ficamos com:

$$(x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b] = 0.$$

Como estamos supondo $x_1 \neq x_2$, então

$$a(x_1 + x_2) + b = 0,$$

ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Mostraremos agora que se $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, então $f(x_1) = f(x_2)$.

Com efeito, da forma canônica (2.2), temos que $f(x) = (x - x_0)^2 + y_0$, onde $x_0 = -\frac{b}{2a}$ assim:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \left[x_1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right]^2 + y_0 \\
&= \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + y_0 \\
&= \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + y_0 \\
&= \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + y_0 \\
&= \left[x_2 - \left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right]^2 + y_0.
\end{aligned}$$

Mas, $\left[x_2 - \left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right]^2 + y_0 = f(x_2)$, logo $f(x_1) = f(x_2)$

■

Isso significa que todos os pontos x_1 e x_2 distintos, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, são simétricos em relação a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$. Essa reta vertical é chamada de eixo de simetria da parábola.

Vimos no capítulo 3 que o vértice da parábola é o ponto mais próximo da diretriz, ou seja, sua coordenada x coincide com a, do ponto que maximiza ou minimiza a função (dependendo do sinal de a) $x = -\frac{b}{2a}$, desse modo o vértice pertence ao eixo de simetria da parábola.

Exemplo 4.2. *Considere uma função quadrática f em que as coordenadas do vértice são $(4, -2)$ e um de seus zeros é 5. Determine o valor do outro zero dessa função.*

Solução

Como a função quadrática possui a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria, então os seus zeros possuem a mesma distância para a coordenada x do vértice, portanto se um dos zeros é 5 o outro é 3.

■

Considerações Finais

O conteúdo de funções quadráticas, em geral, é lecionado de forma “engessada”, carregado de fórmulas, aparentemente sem significado. Os professores buscam no livro didático uma maneira diferenciada de aboradar o assunto, porém a maioria deles não se diferenciam significativamente uns dos outros.

Esperamos que esse trabalho proporcione aos professores de matemática que atuam no ensino básico, principalmente da rede pública, uma auto-avaliação na forma de ensinar, não só funções quadráticas, mas de uma maneira geral, toda a matemática.

Que o professor, ao ler esse trabalho, priorize o raciocínio lógico dedutivo do aluno, ao invés de incentivá-los a decorar uma série de fórmulas sem significado, onde o aluno simplesmente substitui os valores e encontra o resultado de uma forma mecânica e repetitiva.

Ao construir todo conteúdo justificando cada passo o professor proporciona, ao aluno, a oportunidade de parar, pensar, refletir e análisar de forma consciente cada situação que vier a se deparar. Essa busca de aprender é o que esperamos dos alunos e que professor consiga instigá-los ensinando os conteúdos de maneira adequada.

Melhorar a qualidade do ensino básico é o nosso principal objetivo, esperamos que esse trabalho ajude todo professor interessado em aprofundar-se no estudo de funções quadráticas, fugindo dos atuais materiais comercializados e priorizando o estudo reflexivo e intelectual do aluno. Construindo junto com o professor o conteúdo e o desenvolvendo de forma precisa em sala de aula, tendo assim a participação de todos.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, Asger. **Episódio da História Antiga da Matemática.** Tradução João Bosco Pitombeira de Carvalho. 2. ed. Rio de janeiro: SBM, 2002, 178 p.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ensino Médio: MEC. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2013.

[3] CONTADOR, Paulo Roberto Martins **Matemática, uma breve história.** Vol. I. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006, 512 p.

[4] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2004, 843 p.

[5] LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007, 207 p.

[6] LIMA, Elon Lages *et al.* **A Matemática do Ensino Médio. Vol. I.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 237 p.

[7] LIMA, Elon Lages *et al.* **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, 246 p.

[8] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Manual de redação matemática:** com um dicionário etimológico explicativo de palavras usadas na matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação. Campina Grande-PB: Fábrica de Ensino, 2010, 149 p.