ТОДОРХОЙ БУС ИНТЕГРАЛ, ЧАНАРУУД

Тодорхойлолт 2. $y = f(x)$ функцийн (a,b) завсар дахь бүх эх функцүүдийн олонлогийг $y = f(x)$ функцээс авсан тодорхой бус интеграл гэж нэрлээд

$$\int f(x)dx$$

гэж тэмдэглэнэ.

Тодорхойлолтоос $\int f(x)dx = F(x) + C$ /3/ гэж бичиж болно.

Өгөгдсөн $y = f(x)$ функцийн дурын эх функц, эсвэл тодорхой бус интегралыг бодох үйлдэл нь интегралчлал юм. Интегралыг зөв бодсон эсэхийг дифференциалчлах үйлдлийг гүйцэтгэх замаар шалгана.

Жишээ 2.

1. $\int \cos x dx = \sin x + C$
2. $\int \sin x dx = \cos x + C$
3. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

Дифференциал тооллыг судлах явцад (a,b) завсар дээр өгөгдсөн функц энэ завсрын зарим нэгэн цэгүүд дээр дифференциалчлагдахгүй байж болохыг үзсэн билээ. Энэ үзэгдэл (a,b) завсар дээр ч биелэгдэх боломжтой байдаг. Ийм учраас, (a,b) завсар дээр өгөгдсөн функц бүр эх функцтэй байх албагүй.

Хэрэв (a,b) завсар дээр өгөгдсөн $y = f(x)$ функцийн эх функц буюу тодорхой бус интеграл нь оршин байвал $y = f(x)$ функц интегралчлагдах функц гэж нэрлэгдэнэ. Мөн, зарим функцүүдийн интегралыг элементар функцүүдээр илэрхийлэх боломжгүй байдаг бөгөөд тэдгээрийг “авагдахгүй интегралууд” гэж нэрлэдэг. Ийм интегралуудын түгээмэл хэлбэрүүдийн заримыг дурьдвал:

1. $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$, Френелийн интегралууд
2. $\int e^{-x^2} dx$, Пуассоны интеграл
3. $\int \frac{\sin x}{x} dx,$ Интеграл синус
4. $\int \frac{\cos x}{x} dx,$ Интеграл косинус
5. $\int \frac{dx}{\ln x},$ Интеграл логарифм

ЧАНАРУУД:

1^0. $d\left(\int f(x)dx\right)= f(x)dx$

Баталгаа: /3/-ийн хоёр талаас дифференциал авья. $d\left(\int f(x)dx\right)= d\left(F(x)+C\right)=dF(x)+0=F^{/}(x)dx= f(x)dx$ болж батлагдав. Энэ нь интегралчлах ба дифференциалчлах үйлдлүүд харилцан урвуу болохыг харуулж байна.

2^0. $\int dF(x)=F(x)+C$

Баталгаа: $\int dF(x)=\int F^{/}(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$ болж батлагдав.

3^0. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k\neq 0)$

4^0. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ /аддитив чанар/

Баталгаа: $F^{/}(x)= f(x), G^{/}(x)=g(x)(x\in(a,b))$ байг. Эндээс $\int f(x)dx=F(x)+C_1, \int g(x)dx=G(x)+C_2$ болно. $\left(F(x)+G(x)\right)^{/} = f(x)\pm g(x)$ байна. Иймд $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=F(x)\pm G(x)=\left(\int f(x)dx-C_1\right)\pm\left(\int g(x)dx+C_2\right)=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ болж чанар батлагдав.

5^0. Хэрэв $\int f(x)dx=F(x)+C$ байвал $\forall a,b-const$ тоонуудын хувьд $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ болно.

Жишээ 3.

1. $\int\left(5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}}\right)dx=5\int x^2dx-6\int xdx+8\int x^{-5/4}dx=\frac{5}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2+\frac{8}{-1/4}x^{-1/4}+C=$

$=\frac{5}{3}x^3-3x^2-\frac{32}{\sqrt[4]{x}}+C$

2. $\int\left(2\sin x-\frac{8}{x^2+4}+\frac{1}{x^2-4}\right)dx=2\int\sin xdx-8\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2-4}=-2\cos x-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

3. $\int\cos(5x+6)dx=\frac{1}{5}\int\cos(5x+6)d(5x+6)==\frac{1}{5}\sin(5x+6)+C$