



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

PRODUTO EDUCACIONAL

**FUNÇÕES REAIS DE DUAS VARIÁVEIS E
GEOGEBRABOOK: recursos dinâmicos para
o ensino de Cálculo.**

RAIANE LEMKE

JOINVILLE, SC
2017

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Tecnologias Educacionais

Título: Funções reais de duas variáveis e GeoGebraBook: recursos dinâmicos para o ensino de Cálculo

Autora: Raiane Lemke

Orientadora: Ivanete Zuchi Siple

Data (defesa): 03/07/2017

Produto Educacional: GeoGebraBook

Nível de ensino: Ensino Superior

Área de Conhecimento: Matemática

Tema: Funções reais de duas variáveis, derivadas parciais e algumas de suas aplicações

Resumo do Produto Educacional:

O produto educacional é um livro dinâmico construído na opção de book no site do GeoGebra. Aborda os conteúdos de funções de duas variáveis, derivadas parciais, interpretação geométrica de derivadas parciais e derivada parcial como taxa de variação.

Biblioteca Universitária UDESC: <http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria>

Publicação Associada: [Funções reais de duas variáveis e GeoGebra: um livro dinâmico para o ensino de Cálculo]

URL: <http://www.cct.udesc.br/?id=1636>

Arquivo	*Descrição	Formato	
0012017.pdf	Texto completo	Adobe PDF	Visualizar/abrir

Licença de uso:



Esse trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

APRESENTAÇÃO

Caro(a) colega Professor(a),

Esse Produto Educacional é resultado do desenvolvimento da pesquisa intitulada “Funções reais de duas variáveis e GeoGebra: um livro dinâmico para o ensino de Cálculo” realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade Estadual de Santa Catarina (UDESC), sob a orientação da Profa. Dra. Ivanete Zuchi Siple.

O objetivo desse produto educacional é proporcionar uma abordagem dinâmica para ensinar cálculo, tendo como alvo Professores de Cálculo II e Professores de Matemática que queiram inserir noções de Cálculo para o Ensino Médio.

O produto educacional¹ é um GeoGebraBook que permite criar um livro on-line no próprio site do GeoGebra², com as opções de inserir links, imagens, vídeos, textos, animações, objetos de aprendizagem (OAs³) desenvolvidos no GeoGebra, slides, arquivos em pdf, questões abertas e questões de múltipla escolha, dentre outras.

Por uma questão de limite de caracteres, o GeoGebraBook ficou com o título: “F2V⁴: recursos dinâmicos para o Cálculo”, no qual são abordadas funções reais de duas variáveis, com sua definição, exemplo, discussão do domínio, curvas de nível, representação gráfica e algumas aplicações. Também abordamos alguns tópicos de derivadas parciais, como interpretação geométrica e taxa de variação, investigando as potencialidades de diferentes registros de representação, de simulação e de interações dinâmicas presentes no GeoGebra.

O GeoGebraBook é disponibilizado on-line, para acessá-lo clique no link do produto educacional ou pesquise no site do GeoGebra pelo nome do produto educacional, ou palavras-chave como produto educacional Raiane, GeoGebraBook cálculo, ensino de cálculo, F2V, recursos dinâmicos cálculo. Recomendamos o uso on-line do GeoGebraBook, apesar de ser compatível com smartphones, pensamos que um uso mais proveitoso possa ser feito acessando-o em um desktop ou tablet, principalmente por causa do tamanho da tela. Apesar de ser um livro digital on-line, é possível fazer o download de slides em PowerPoint e arquivos em pdf

¹ Disponível em: < <https://ggbm.at/GdZ9wzW8>>. Acesso em: 08 jun. 2017.

² É um software de geometria dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Disponível em: <<https://www.geogebra.org>>. Acesso em: 08 jun. 2017.

³ Corroborando com Santos (2007) entendemos como OA, qualquer recurso como maquetes, fotos, imagens, vídeos, arquivos de texto, páginas de internet, quando utilizadas como recursos que apoiam processos de ensino e aprendizagem.

⁴ Funções reais de duas variáveis reais.

que propusemos para algumas atividades, bem como OAs feitos no GeoGebra. Além disso, também há a opção de baixar o arquivo para uso off-line, que vai gerar uma pasta compactada em zip e um html⁵.

O professor/usuário ao acessar o livro encontrará uma página inicial e poderá se direcionar ao capítulo desejado. A maneira de utilizar/explorar os recursos não precisa ser necessariamente feita de forma linear e sequencial, o usuário pode escolher como navegar no livro. Em termos de implementação, o produto foi dividido em 18 capítulos:

Capítulo 1 – Apresentação.

Capítulo 2 – Sistema de coordenadas retangulares no espaço.

Capítulo 3 – Funções de duas variáveis: introdução.

Capítulo 4 – Funções de duas variáveis: domínio, gráfico e curvas de nível.

Capítulo 5 – Funções de duas variáveis no GeoGebra.

Capítulo 6 – Parabolóide hiperbólico.

Capítulo 7 – Funções de duas variáveis: algumas aplicações.

Capítulo 8 – Garrafa de Klein.

Capítulo 9 – Quádricas no GeoGebra.

Capítulo 10 – Arquitetura e funções de duas variáveis.

Capítulo 11 – Derivadas parciais: introdução.

Capítulo 12 – Interpretação geométrica de derivadas parciais.

Capítulo 13 – Derivada parcial como taxa de variação.

Capítulo 14 – Sugestões de avaliação.

Capítulo 15 – Conexões com o ensino médio.

Capítulo 16 – Manuais.

Capítulo 17 – Algumas considerações e perspectivas.

Capítulo 18 – Deixe sua opinião.

Inicialmente vamos dar algumas dicas em relação ao GeoGebraBook e depois explicaremos a disposição de cada capítulo.

Esperamos que esse material possa trazer contribuições para a sua prática docente.

Raiane Lemke

⁵ Linguagem de Marcação de Hipertexto

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tela inicial do GeoGebraBook: “F2V: recursos dinâmicos para Cálculo”	7
Figura 2 – Opção de compartilhar no GeoGebra	8
Figura 3 – Capítulo 1: Apresentação.....	10
Figura 4 – TPACK	11
Figura 5 – Capítulo 2: Sistema de coordenadas retangulares no espaço	12
Figura 6 – Ponto P(3,-2).....	13
Figura 7 – Sistema de eixos 3D	13
Figura 8 – OA: Representação do ponto P(2,3,4).....	15
Figura 9 – OA: Sistema de coordenadas retangulares no espaço.	16
Figura 10 – Atividade de pontos no sistema de eixos 3D.....	17
Figura 11 – Exercício de um ponto no espaço	17
Figura 12 – Slides capítulo 2.....	18
Figura 13 – Capítulo 3: Funções de duas variáveis: introdução	19
Figura 14 - Parque Oceanográfico de Valência	20
Figura 15 – Maquete do Parque Oceanográfico de Valência.....	20
Figura 16 – Pavilhão de São Cristóvão.....	21
Figura 17 - Capela da Paróquia São Felipe de Jesus.....	21
Figura 18 – Dorton Arena	22
Figura 19 – Restaurante Los Manantiales.....	22
Figura 20 – Slides sobre introdução de F2V	23
Figura 21 – Capítulo 4: F2V: domínio, gráfico e curvas de nível.	23
Figura 22 - Curvas de nível da função $f(x, y) = 4/(x + y^2 + 1)$	24
Figura 23 – OA: curvas de nível.....	24
Figura 24 – Capítulo 5: F2V no GeoGebra.....	25
Figura 25 – Função de duas variáveis no GeoGebra	25
Figura 26 – Opção de exibir os rótulos dos eixos no GeoGebra.....	26
Figura 27: Função $a(x, y) = 2x/\sqrt{x - y^2}$ e seu domínio – representação algébrica e gráfica no GeoGebra	26
Figura 28 – Slides de F2V no GeoGebra	27
Figura 29 – Capítulo 6: Parabolóide hiperbólico	27
Figura 30 – Sela de cavalo	28
Figura 31 – OA: batata Pringles.....	29

Figura 32 – Slides do capítulo 6: parabolóide hiperbólico.....	29
Figura 33 – Capítulo 7: F2V: algumas aplicações.....	30
Figura 34 – OA: Área do retângulo.....	31
Figura 35 – OA: IMC.....	32
Figura 36 – Capítulo 8: Garrafa de Klein.....	32
Figura 37 – Felix Klein e sua garrafa.....	33
Figura 38 – OA: Garrafa de Klein: animação.....	33
Figura 39 – OA: Ponto na garrafa de Klein.....	33
Figura 40 – Capítulo 9: Quádricas no GeoGebra.....	34
Figura 41 – OAs de quádricas centradas e paraboloides.....	35
Figura 42 – OAs de superfícies cilíndricas e superfícies cônicas.....	36
Figura 43 – Capítulo 10: Arquitetura e F2V.....	37
Figura 44 – Capítulo 11: Derivadas parciais: introdução.....	38
Figura 45 – OAs: calculadoras de derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem.....	38
Figura 46 – Capítulo 12: Interpretação geométrica de derivadas parciais.....	39
Figura 47 – OA: plano tangente.....	40
Figura 48 – Capítulo 13: Derivada parcial como taxa de variação.....	41
Figura 49 – OA: monte cônico.....	42
Figura 50 – Capítulo 14: sugestões de avaliação.....	43
Figura 51 – Capítulo 15: Conexões com o ensino médio.....	43
Figura 52 – OA: volume da esfera.....	43
Figura 53 – Capítulo 16: manuais.....	44
Figura 54 – Capítulo 17: Algumas considerações e perspectivas.....	45
Figura 55 – Capítulo 18: Deixe sua opinião.....	45
Figura 56 – Formulário no Google Docs.....	45
Figura 57 – Nuvem de palavras sobre esse GeoGebraBook.....	47

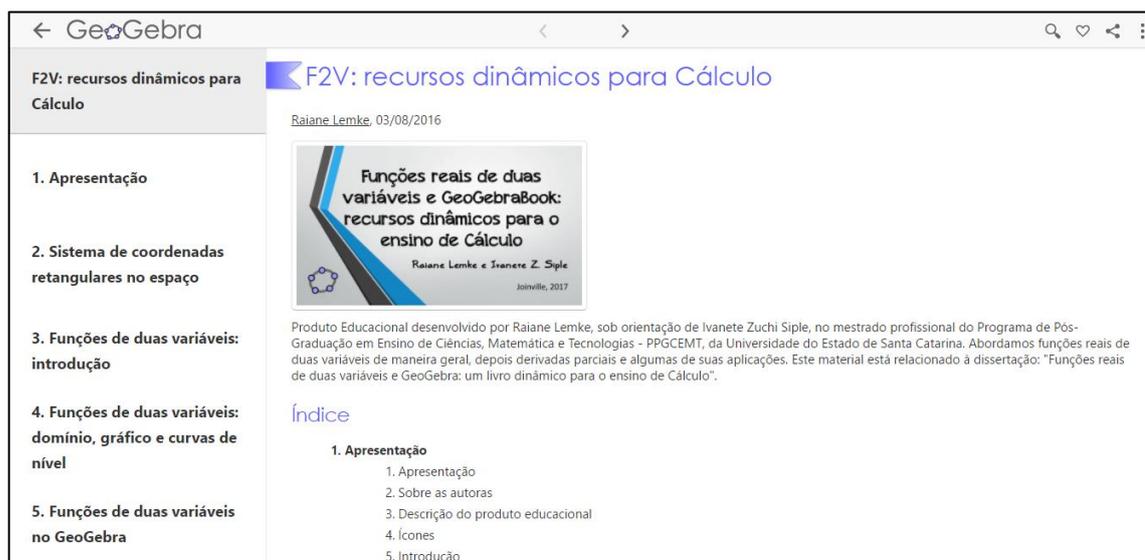
LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Alguns ícones de um GeoGebrabook.....	7
Quadro 2 – Como baixar um material no GeoGebraBook.....	8
Quadro 3 – Setas no GeoGebraBook	9
Quadro 4 – Ícones do produto educacional.....	11
Quadro 5 – Origem da palavra abscissa, ordenada e cota.....	14
Quadro 6 – Feedback em questões de múltipla escolha no GeoGebraBook.	18
Quadro 7 – Comentários sobre o produto educacional em 2016	46

ALGUMAS DICAS

Ao abrir o link do nosso produto educacional, aparecerá a tela inicial, conforme ilustra a Figura 1:

Figura 1 – Tela inicial do GeoGebraBook: “F2V: recursos dinâmicos para Cálculo”



Fonte: Produção própria, 2017.

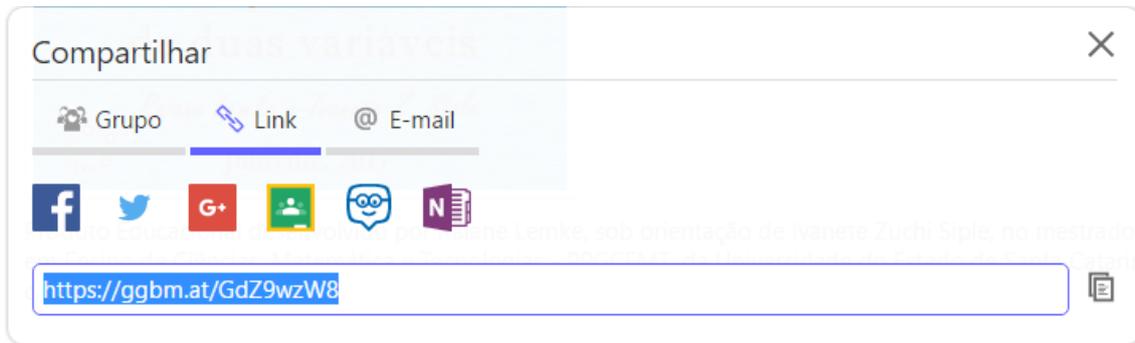
Na parte superior da página aparecem alguns ícones. O quadro 1 explica a funcionalidade dos ícones do canto superior direito. O quadro 2 explica como baixar um material do GeoGebra.

Quadro 1 – Alguns ícones de um GeoGebrabook

	Explicação de cada ícone
	Ao clicar na lupa, o usuário será direcionado para a página de busca de materiais do GeoGebra.
	Opção para quem tem uma conta no GeoGebra, podendo favoritar um material.
	Compartilhar uma material. Há as opções de compartilhar em um grupo do GeoGebra, compartilhar em redes sociais e por e-mail (vide Figura 2).
	Exibe mais detalhes do material e outras opções como compartilhar e baixar.

Fonte: Produção própria, 2017.

Figura 2 – Opção de compartilhar no GeoGebra



Fonte: Produção própria, 2017.

Quadro 2 – Como baixar um material no GeoGebraBook

	<p>Clicando em detalhes é possível ver ou escrever comentários sobre o material, podem ser vistas as palavras-chave e o número de visitas ao material.</p>
	<p>Para baixar um material do GeoGebra, concorde com os termos de licença não-comercial. Os arquivos no formato .ggb são os OAs construídos no GeoGebra. É possível baixar o arquivo no formato .zip, que vai gerar um arquivo em html.</p>

Fonte: Produção própria, 2017.

No quadro 3 explicamos os ícones de seta e de exibição/ocultação do sumário.

Quadro 3 – Setas no GeoGebraBook

Sobre as setas destacadas em vermelho: < direciona à seção anterior e > direciona à próxima seção.



Esse ícone esconde ou exhibe o sumário.

Ao clicar em GeoGebra, você será direcionado a página inicial do GeoGebra ou à página inicial do seu perfil. Ao clicar na seta de voltar, o GeoGebraBook será fechado. Para voltar utilize a seta do navegador ou a seta junto ao número das seções.



Fonte: Produção própria, 2017.



Nota sobre o GeoGebraBook:

O GeoGebraBook⁶ é uma coleção de materiais e folhas de trabalho baseados no GeoGebra. Ele permite que você organize seus próprios *Applets* do GeoGebra e/ou seus materiais favoritos do GeoGebra em livros on-lines dinâmicos e interativos para aprendizagem e ensino em todos os níveis de ensino.

O editor online *GeoGebraBook* permite facilmente criar um livro online no GeoGebra. Basta acessar www.geogebra.org, entrar na sua conta: [GeoGebra Account](#), e clicar em New GeoGebraBook para começar a criar.

O produto educacional aqui descrito é um exemplo de GeoGebraBook.

⁶ Manual disponível em: <https://www.geogebra.org/manual/en/The_GeoGebraBook_Editor>. Acesso em: 08 jun. 2017.

CAPÍTULO 1: Apresentação

O Capítulo 1 traz uma sucinta apresentação do produto educacional, com informações sobre as autoras e descrição desse produto educacional (disponível em pdf no tópico 3). Além disso, temos a explicação dos ícones, uma introdução que traz referências sobre o ensino de Cálculo, a visualização e o TPACK⁷. Também apresentamos algumas charges com reflexão da inserção ou não de tecnologias em sala de aula. A Figura 3 ilustra o capítulo de apresentação no GeoGebraBook. O professor/usuário pode seguir a sequência proposta ou clicar no ícone que desejar.

Figura 3 – Capítulo 1: Apresentação

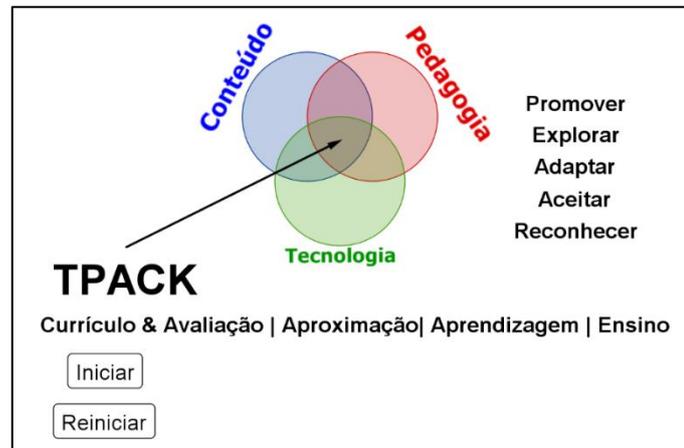


Fonte: Produção própria, 2017.

Quanto ao uso do GeoGebra em sala de aula entendemos que não basta apenas o professor saber manipular a ferramenta, além disso é necessário que o professor tenha o domínio do conteúdo e tenha uma preocupação pedagógica, pensando em como a utilização do GeoGebra pode ajudar na aprendizagem. O vínculo entre esses três aspectos, o conhecimento tecnológico, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico, está presente no quadro teórico do “conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo” - TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge). Para ilustrar a inserção da tecnologia a partir do TPACK, adaptamos uma animação, cuja tela final está representada na Figura 4.

⁷ Conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo.

Figura 4 – TPACK



Fonte: TAMOSINUAS, Rokas. **Migrating from PCK to TPACK**. 2015. Disponível: <<https://ggbm.at/Vu3pKWAg>>. Acesso em: 08 jun. 2017. (Adaptado)

Nesse GeoGebraBook, utilizamos alguns ícones⁸ para facilitar a visualização das atividades propostas. Segue explicação dos ícones mais utilizados (quadro 4):

Quadro 4 – Ícones do produto educacional

Ícone	Explicação
	Objetivos: apresenta os objetivos de cada capítulo.
	Relembrando: traz conteúdos de cálculo 1 ou de sessões anteriores.
	Definições: traz o conteúdo matemático. (Definições, conceitos e exemplos).
	Exercícios: atividades propostas para serem resolvidas no ambiente do lápis e do papel. Temos algumas questões de múltipla escolha que são corrigidas pelo próprio GeoGebraBook. As questões abertas não têm um feedback automático. Em alguns casos a sugestão é resolver primeiro no lápis e papel, para depois confrontar com o ambiente computacional.
	Perguntas: indica que há perguntas ou questionamentos. Sugere-se que o professor faça essas perguntas para a sua turma e que dê um tempo para pensarem nas respostas. O objetivo é introduzir ou discutir o assunto em questão e despertar o interesse.
	Imagens: imagens para serem observadas. São imagens que vão estar relacionadas à um determinado conteúdo matemático.
	Para saber mais: indica a opção de saber mais sobre o assunto em questão. Fica a critério de o professor usar isso em sala de aula ou indicar para os alunos olharem depois.

⁸ Esses ícones foram retirados do banco de imagens disponível gratuitamente para reutilização em: <https://pixabay.com/pt/>, no perfil IO-Imagens: <https://pixabay.com/pt/users/IO-Images-1096650/>. Acesso em: 03 jun. 2017.

	Vídeos: vídeos sobre o conteúdo, ou sobre curiosidades, ou ainda, explicação dos OAs.
	Situação-problema: indica sugestão de situação problema para ser resolvida em classe ou extraclasse.
	GeoGebra: apresenta objetos de aprendizagem (OAs) feitos no GeoGebra ou instruções de como utilizar o GeoGebra para determinado conteúdo.
	Atividades computacionais: sugestões de atividades para serem resolvidas no ambiente computacional, usando o próprio GeoGebra ou os OAs. Podem ser feitas em classe ou extraclasse.
	Outros questionamentos e simulações no GeoGebra: aparece depois da situação-problema, com outros questionamentos e simulações que podem ser discutidos em classe ou extraclasse.
	Comentários: comentários sobre alguma atividade ou situação problema.
	Materiais: Slides em PowerPoint ou arquivos em pdf sobre o conteúdo em questão.

Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 2: Sistema de coordenadas retangulares

Como funções de duas variáveis envolvem representações tridimensionais, buscamos trabalhar com conceitos básicos como de sistemas de coordenadas retangulares no espaço. É um material que também pode ser explorado em um curso de Geometria Analítica. A Figura 5 ilustra sua tela inicial.

Figura 5 – Capítulo 2: Sistema de coordenadas retangulares no espaço



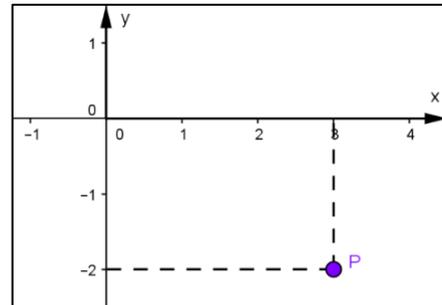
Fonte: Produção própria, 2017.

2.1 – Objetivo: Representar um ponto, em coordenadas retangulares, no espaço tridimensional.

2.2 – Relembrando... Trazemos conteúdo da Educação

Básica ou do Cálculo 1, pois quando trabalhamos com funções de uma variável real, usávamos apenas o plano xy para representar um ponto $P(x,y)$ em coordenadas cartesianas. (x é a abscissa e y é a ordenada). Por exemplo, na Figura 6 temos a representação do ponto $P(3,-2)$

Figura 6 – Ponto $P(3,-2)$



Fonte: Produção própria, 2017.

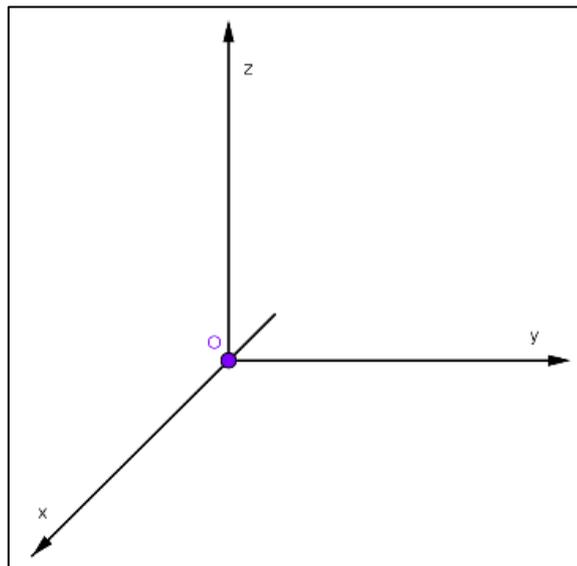
2.3 – Pergunta 1: Como representar um ponto da forma $P(x,y,z)$ no espaço tridimensional?

2.4 – Sistema de eixos 3D: Explicação dos eixos ordenados em um sistema tridimensional:

Os 3 valores de um ponto no espaço são dados por meio de um sistema tridimensional de eixos ortogonais entre si, passando por um ponto O (origem), que são os eixos coordenados, os quais denotaremos por eixo x , eixo y e eixo z .

Para fazermos uma representação de no plano, a maneira canônica é traçar os eixos z e y perpendiculares, sendo o eixo z na vertical apontando para cima como na Figura 7.

Figura 7 – Sistema de eixos 3D



Fonte: Produção própria, 2017.

No espaço tridimensional, em coordenadas retangulares um ponto é dado por (x,y,z) . x é a abscissa, y é a ordenada e z é a cota.

2.5 – Origem da palavra abscissa, ordenada e cota: curiosidades sobre a origem destas palavras (ver quadro 5).

Quadro 5 – Origem da palavra abscissa, ordenada e cota

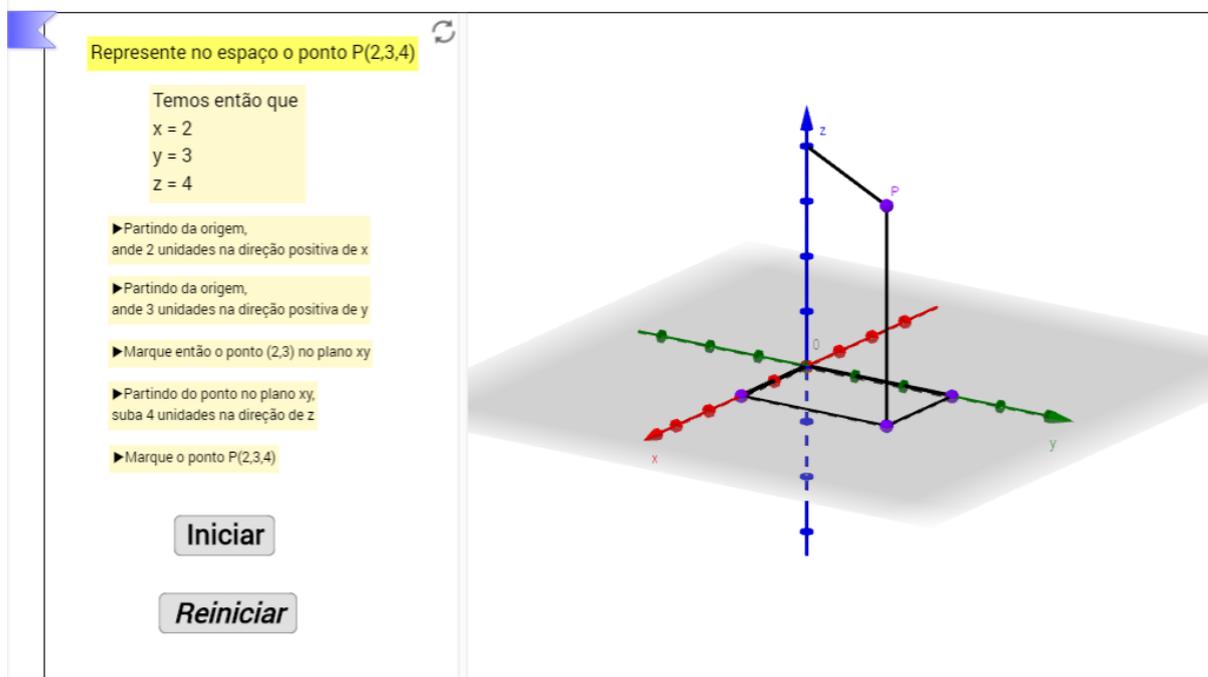
Origem da palavra abscissa	<p>Do latim abscissa provém do verbo <i>abscindere</i> que conjuga a ação de cortar (<i>scindere</i>) alguma coisa. No gráfico, o eixo horizontal corta o eixo vertical. A palavra abscissa aparece na Matemática em 1659 no livro <i>Geometriae Speciosae Elementa</i>, escrito em Bolonha por Pietro Mengoli no qual na página 53, ele escreveu: <i>Omnibus abscissis</i> (Soma das abscissas).</p> <p>Fonte: https://www.dicionarioetimologico.com.br/abscissa/ Acesso em: 27 mai. 2017.</p>
Origem da palavra ordenada	<p>A palavra ordenada vem do verbo ordenar, que vem do latim <i>ordinare</i>. Em latim, <i>ordinare</i> significa organizar ou administrar alguma coisa com ordem. Também podia ter o sentido de escrever um relato ordenado ou governar com regras organizadas. A palavra <i>ordinare</i> vem da raiz <i>ordo</i>, que significa ordem, organização, coisas alinhadas ou planeadas, coisas que sucedem umas às outras de acordo com certas regras ou um grupo social ou militar organizado. Assim, <i>ordinare</i> significa literalmente “colocar em ordem”. Originalmente, <i>ordo</i> significava um conjunto de fios organizados em um tear. Esses fios tinham uma ordem específica, que permitia tecer pano. Por causa disso, <i>ordo</i> ficou associado a ordem e organização. Na matemática, a palavra ordenada ganhou outro significado, ligado a gráficos cartesianos. A ordenada é a linha vertical do gráfico. Essa linha se chama ordenada porque organiza e diferencia os pontos do gráfico. Apenas com a informação da linha horizontal (o eixo das abscissas), o gráfico fica incompleto e não tem muita utilidade. O eixo das ordenadas completa a informação e dá ordem ao gráfico.</p> <p>Fonte: https://www.dicionarioetimologico.com.br/ordenada/ Acesso em: 27 mai. 2017.</p>
Origem da palavra cota	<p>Do latim <i>quota</i>, feminino de <i>quotus</i>, significa em que número? De que número? Qual?</p> <p>Na matemática é a terceira coordenada cartesiana de um ponto do espaço.</p> <p>Fonte: Dicionário Priberam da Língua Portuguesa. Disponível em: https://www.priberam.pt/dlpo/cota Acesso em: 20. Mai. 2017.</p>

Fonte: Produção própria, 2017.

2.6 – Exercício 1: Propomos o seguinte exercício: no ambiente do lápis e do papel, represente o ponto $P(2,3,4)$.

2.7 – OA: Representação do ponto $P(2,3,4)$. Na Figura 8, temos a tela final do objeto de aprendizagem, uma vez que é uma animação, e a partir dos botões é possível iniciar, parar ou reiniciar a construção. O passo a passo traz explicações por escrito na janela de visualização bidimensional juntamente com a representação no ambiente tridimensional. Pensamos que a ideia de uma animação passo a passo possa ser implementada para outros conteúdos.

Figura 8 – OA: Representação do ponto $P(2,3,4)$



Fonte: Produção própria, 2017.

2.8 – Como representar um ponto no espaço: apresentamos um vídeo⁹ de minha autoria. Utilizando os recursos do gravador de tela aTube Catcher¹⁰, gravei a explicação da representação do ponto $P(2,3,4)$ a partir do OA desenvolvido no GeoGebra.

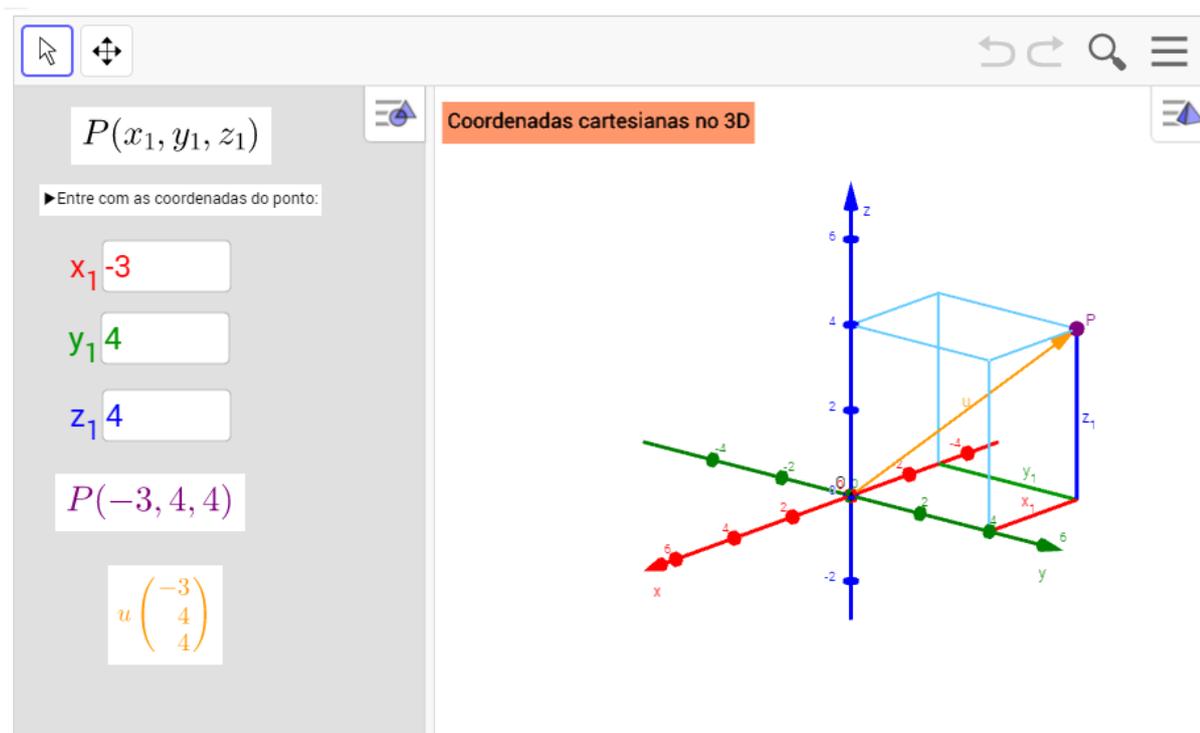
2.9 – OA: Sistema de coordenadas retangulares no espaço. Na Figura 9, temos a tela inicial do OA, com a representação do ponto $P(-3,4,4)$. Na janela de álgebra (fundo cinza), o usuário pode alterar os valores da abscissa, ordenada e da cota, obtendo sua representação algébrica e

⁹ LEMKE, Raiane. **Representando um ponto no espaço**. 2017. Disponível em: <<https://youtu.be/888LsNTUJIE>>. Acesso em: 08 jun. 2017.

¹⁰ Disponível em: <<http://www.atube.me/pt-br/>>. Acesso em: 09 jun. 2017.

gráfica. Além da representação do ponto, traçamos segmentos de reta e um vetor, com a intenção de auxiliar na visualização. Na janela de visualização 3D (fundo branco), é possível acessar a barra de ferramentas e mover, girar, reduzir ou ampliar a construção.

Figura 9 – OA: Sistema de coordenadas retangulares no espaço.



Fonte: Produção própria, 2017.

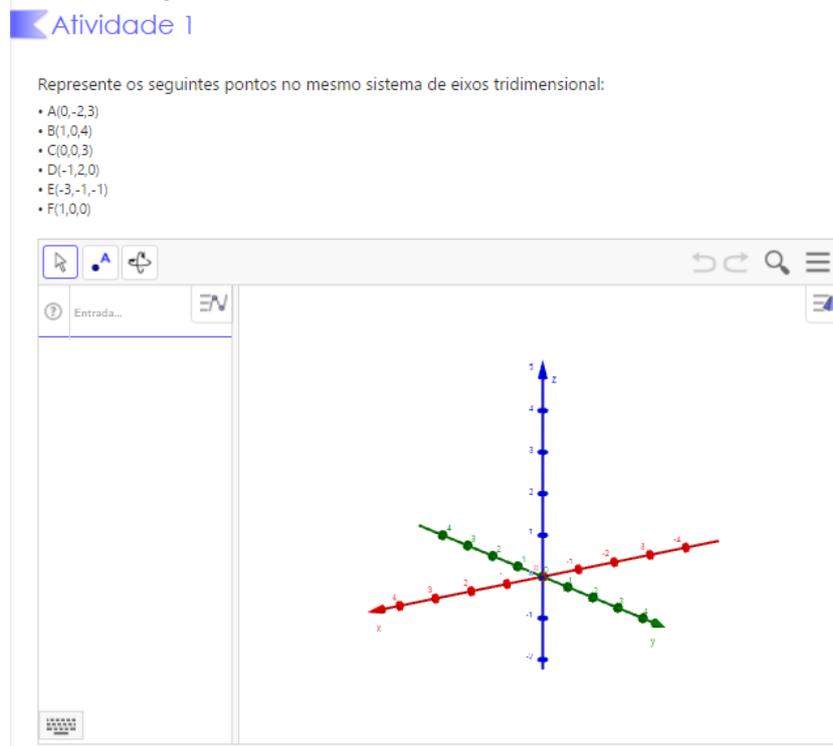
2.10 – Como inserir um ponto no GeoGebra. Explicamos como inserir um ponto no GeoGebra.

A Seleccione esta opção na barra de ferramentas e clique no plano xy para depois arrastar o ponto, escolhendo o valor da sua cota. Usando este recurso também é possível marcar um ponto ao longo dos eixos coordenados, clicando no local desejado.

Outra forma é digitar no campo de entrada o ponto desejado, por exemplo, (2,1,3). Na janela de álgebra aparecerá "Ponto" e $A=(2,1,3)$ e na janela 3D aparecerá a representação do ponto. Observação: No GeoGebra, o eixo **vermelho** representa o **eixo x**, o eixo **verde** representa o **eixo y** e o eixo **azul** representa o **eixo z**.

2.11 – Atividade 1: Propomos a seguinte atividade: representar pontos no sistema de eixos 3D. Propomos que esses pontos sejam representados no GeoGebra, conforme ilustra a Figura 10.

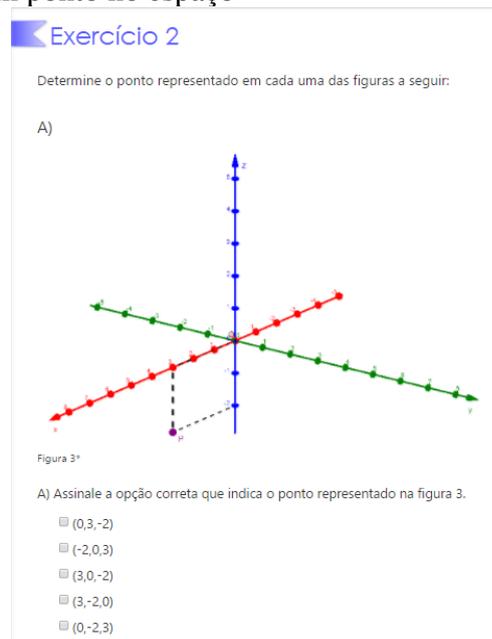
Figura 10 – Atividade de pontos no sistema de eixos 3D



Fonte: Produção própria, 2017.

2.12 – Exercício 2. Relacionar a representação gráfica com a algébrica. A Figura 11 exibe a questão A). A ordem das alternativas muda, pois o GeoGebra faz automaticamente uma troca na ordem.

Figura 11 – Exercício de um ponto no espaço



Fonte: Produção própria, 2017.

Após clicar em verificar as respostas, o GeoGebra retorna com a resposta correta. No caso do exercício A), assinalamos uma alternativa errada. O GeoGebra faz um x em vermelho da questão que você assinalou de maneira errada, e destaca em azul a opção certa. Caso você tenha acertado, o GeoGebra mostrará um símbolo de certo verde e destacará a resposta em azul, conforme retratado no quadro 6.

Quadro 6 – Feedback em questões de múltipla escolha no GeoGebraBook.

GeoGebra – Raiane Lemke

Get feedback on your answers. You can try again later if you like.

✓ Verificar respostas

A) Assinale a opção correta que indica o ponto representado na figura 3.

(0,3,-2)

✗ (-2,0,3)

✗ (3,0,-2)

(3,-2,0)

(0,-2,3)

A) Assinale a opção correta que indica o ponto representado na figura 3.

(0,3,-2)

(-2,0,3)

✓ (3,0,-2)

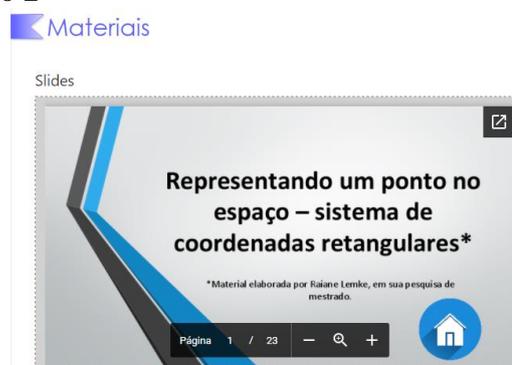
(3,-2,0)

(0,-2,3)

Fonte: Produção própria, 2017.

2.13 – Materiais: para esse capítulo elaboramos uma apresentação de slides no PowerPoint, que está disponível no próprio GeoGebraBook (vide Figura 12) e em um link¹¹ do meu google drive.

Figura 12 – Slides capítulo 2



Fonte: Produção própria, 2017.

¹¹ Disponível em: <<https://goo.gl/aNVQxr>>. Acesso em: 09 jun. 2017.

Observação: Esse capítulo 2 foi explicado detalhadamente, os próximos capítulos têm ideias semelhantes, para não ficar exaustivo, vamos apenas salientar os objetivos, objetos de aprendizagem, vídeos (de nossa autoria), slides em PowerPoint e algumas imagens de cada capítulo.

CAPÍTULO 3: Funções de duas variáveis: introdução

A tela inicial desse capítulo pode ser vista na Figura 13.

Figura 13 – Capítulo 3: Funções de duas variáveis: introdução



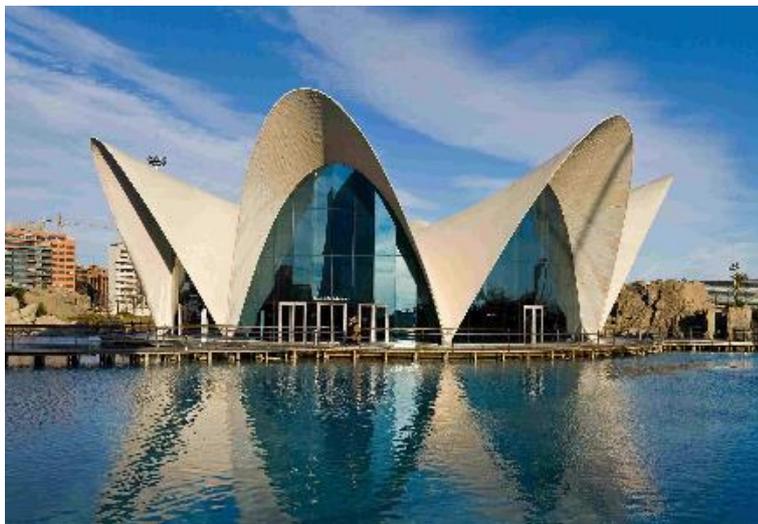
Fonte: Produção própria, 2017.

Apresentamos os objetivos do capítulo que são definir funções de duas variáveis e dar exemplos práticos; observar paraboloides hiperbólicos em obras arquitetônicas. Relembramos o conceito de função de uma variável real, definimos funções reais de duas variáveis. Questionamos se os alunos conhecem exemplos de F2V e sugerimos que pensem em situações em que uma grandeza depende simultaneamente de outras grandezas. Apresentamos alguns exemplos de F2V, como a área de um retângulo, a lei de um gás ideal, o volume de um cilindro, entre outros. Trazemos imagens de obras arquitetônicas que possuem em seu formato o parabolóide hiperbólico. Um parabolóide hiperbólico pode ser descrito como uma função de duas variáveis. Citamos outras construções que apresentam formato de parabolóide hiperbólico em sua construção, bem como indicamos vídeos (nenhum de nossa autoria), sobre paraboloides hiperbólicos em construções. Indicamos um material sobre modelagem 3D no GeoGebra.

Finalizamos com o questionamento de como representar graficamente um parabolóide hiperbólico. Sobre esse capítulo, elaboramos uma apresentação de Slides em PowerPoint.

3.6 – Observe as imagens a seguir....

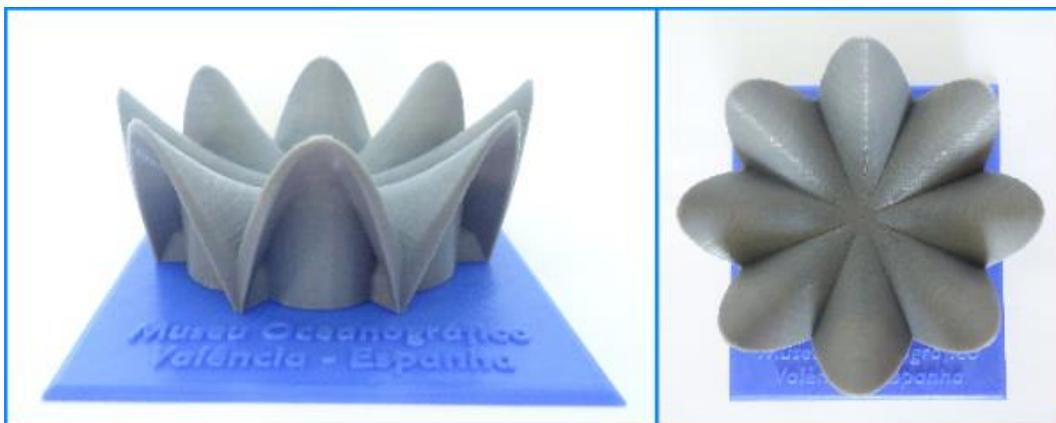
Figura 14 - Parque Oceanográfico de Valência



Fonte: <https://goo.gl/kX3E0Q> Acesso em: 28 mai. 2017.

O Parque Oceanográfico de Valência localizado em Valência, na Espanha, na Cidade das Artes e da Ciência é o maior aquário da Europa, e nele se encontram os principais ecossistemas marinhos. Cada edifício é identificado com os diferentes ambientes aquáticos. O restaurante submarino e a construção de acesso, que recebe os visitantes se destacam por seus telhados espetaculares concebidos por Felix Candela. Na Figura 15 temos uma maquete¹² com uma visão lateral e superior do museu. Localização no Google Maps.

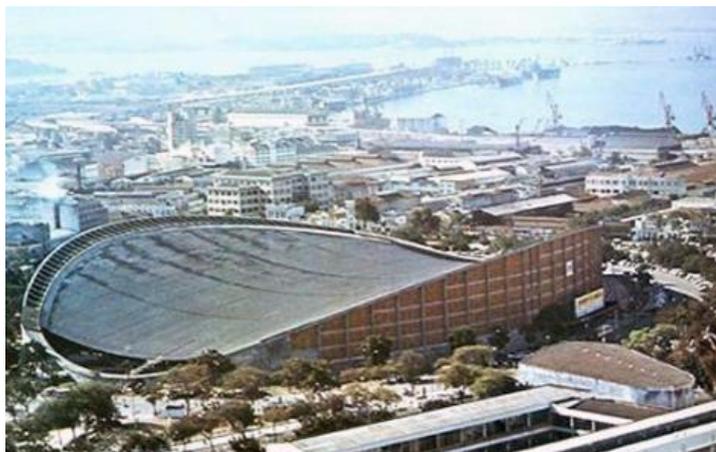
Figura 15 – Maquete do Parque Oceanográfico de Valência



Fonte: Produção própria, 2017.

¹² Essa maquete foi impressa numa impressora 3D do Departamento de Matemática do CCT – UDESC e adaptada do modelo disponível em <https://www.thingiverse.com/thing:241986>. Acesso em: 28 mai. 2017.

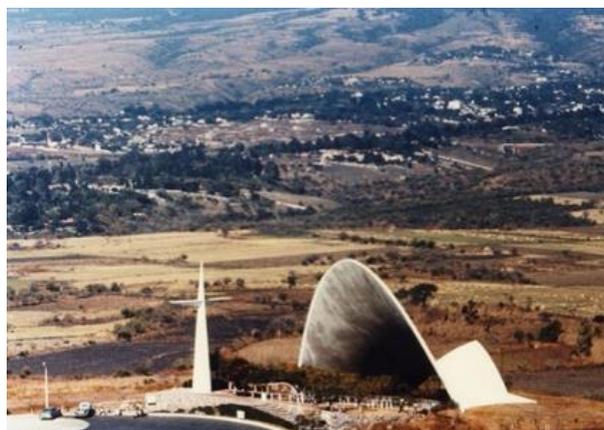
Figura 16 – Pavilhão de São Cristóvão



Fonte: <https://goo.gl/jftecq> Acesso em: 23 mai 2017.

O Pavilhão de São Cristóvão projetado por Sérgio Bernardes, foi inaugurado no início dos anos 1960. Por volta de 1988, um forte vendaval destruiu pela segunda vez a cobertura do pavilhão. A partir desta data o pavilhão ficou fechado e em desuso por longos anos, até que em 2003 passou a ser utilizado pela Feira de São Cristóvão. Na imagem acima, um registro do pavilhão coberto. Atualmente sem cobertura, se tornou sede da Feira de São Cristóvão. (Localização no Google Maps).

Figura 17 - Capela da Paróquia São Felipe de Jesus



Fonte: <https://goo.gl/hp2NdG> Acesso em: 23 mai 2017.

A Capela da Paróquia de São Felipe de Jesus, na cidade de Lomas de Cuernavaca, no México teve seu projeto realizado com participação dos arquitetos Guillermo Rosell, Manuel Larrosa e Félix Candela em 1958. No projeto da capela a harmonia é muito interessante, pois o interior e o exterior se dissolvem integrados a estrutura, sua forma é extremamente delicada e harmoniosa. Localização no Google Maps.

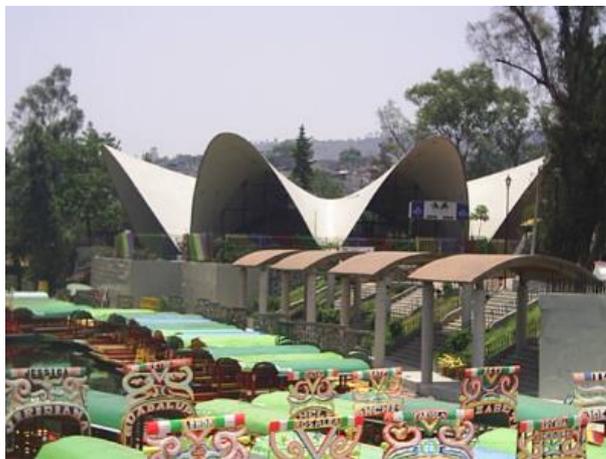
Figura 18 – Dorton Arena



Fonte: <http://www.ncmodernist.org/nowicki.htm> Acesso em: 23 mai 2017.

A Dorton Arena da cidade de Raleigh na Carolina do Norte – EUA foi concebida por Mathew Nowicki. Esta Arena foi construída para servir a agricultura, indústria, comércio e bem-estar geral da Carolina do Norte. Ela ganhou uma reputação internacional desde a sua construção em 1951. O edifício é ideal para diversos eventos. [Localização no Google Maps](#).

Figura 19 – Restaurante Los Manantiales



Fonte: <https://goo.gl/7r9bJ8> Acesso em: 23 mai 2017.

O Restaurante Los Manantiales se encontra na Cidade do México – México e foi projetado por Félix Candela. Esta construção é considerada um lugar muito significativo por ter suas origens no período pré-hispânico. O lugar se caracteriza por ter um dos mananciais mais importantes para abastecimento de água doce da cidade. [Localização Google Maps](#).

Slides¹³ em PowerPoint (Figura 20).

Figura 20 – Slides sobre introdução de F2V



Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 4: Funções de duas variáveis: domínio, gráfico e curvas de nível

A tela inicial desse capítulo está ilustrada na Figura 21.

Figura 21 – Capítulo 4: F2V: domínio, gráfico e curvas de nível.



Fonte: Produção própria, 2017.

Esse capítulo tem por objetivos construir o gráfico de uma função de duas variáveis; determinar curvas de nível à superfície e identificar e representar geometricamente o domínio de funções reais de duas e três variáveis. Trazemos novamente as definições de F2V, destacando o que é o domínio. Definimos curvas de nível e apresentamos alguns exemplos. Elaboramos um OA adaptando ideias de BEIER (2016)¹⁴. Definimos gráfico de F2V. Explicamos como construir um gráfico de F2V no ambiente do lápis e do papel. Propomos um exercício para identificar qual representação gráfica corresponde ao domínio de uma dada função. Mostramos

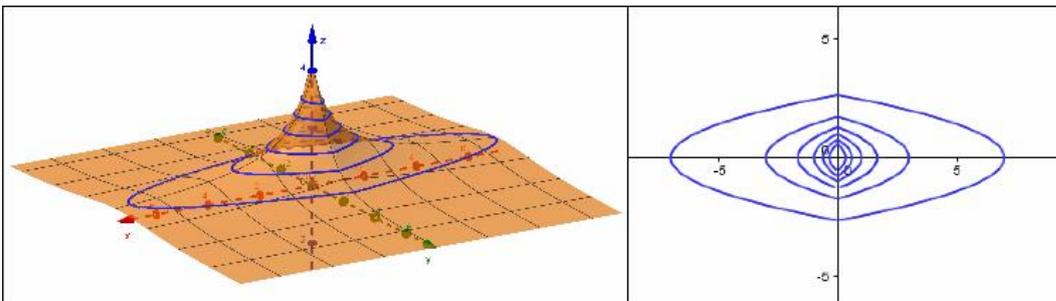
¹³ Disponíveis em: <<https://goo.gl/gPliOi>>. Acesso em: 09 jun. 2017.

¹⁴ BEIER, Gustav Eckard Gorniski (2016). Disponível em: <<https://ggbm.at/TySN6895>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

alguns gráficos e solicitamos a função correspondente e em outra questão é dada a função e é solicitado seu respectivo gráfico.

Na Figura 22 temos um exemplo de uma função com algumas de suas curvas de nível.

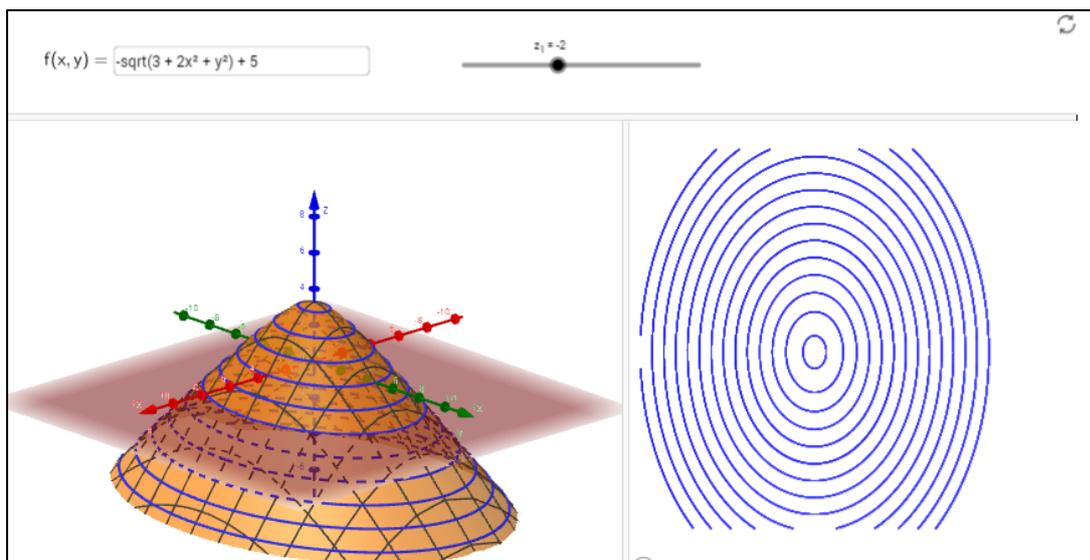
Figura 22 - Curvas de nível da função $f(x, y) = \frac{4}{|x|+y^2+1}$



Fonte: Produção própria, 2017.

Na Figura 23, temos uma imagem do OA: curvas de nível. No caso está representada a parte inferior de um hiperboloide de uma folha. O usuário pode alterar a função no campo de entrada $f(x,y)$ e pode arrastar o controle deslizante z_1 para modificar o plano que corta a superfície. Sugerimos clicar com o lado direito do mouse e selecionar a opção de habilitar rastro, selecionando a curva na janela 2D, assim, ao arrastar o controle deslizante z_1 , obtemos um conjunto de curvas de nível, representadas tanto no próprio gráfico tridimensional como no ambiente bidimensional.

Figura 23 – OA: curvas de nível



Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 5: Funções de duas variáveis no GeoGebra

A tela inicial do capítulo está representada na Figura 24.

Figura 24 – Capítulo 5: F2V no GeoGebra

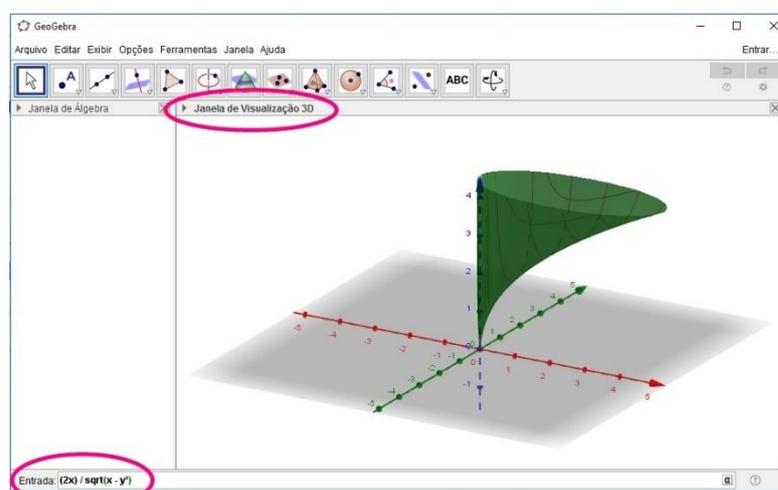


Fonte: Produção própria, 2017.

Esse capítulo tem como objetivos construir o gráfico de funções de duas variáveis e descrever e representar geometricamente o domínio de funções de duas variáveis. Trazemos novamente as definições de F2V e de gráfico de F2V. Explicamos como construir o gráfico de uma F2V no GeoGebra. Propomos uma atividade na qual devem ser representadas, no GeoGebra, o domínio e o gráfico de cada função. Disponibilizamos slides em PowerPoint sobre esse capítulo.

No GeoGebra 3D com apenas alguns cliques podemos representar uma função real de duas variáveis, basta digitar a função desejada no campo de entrada. Por exemplo, caso desejemos representar a função $f(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{x-y^2}}$, podemos digitar no campo de entrada $(2x)/(\text{sqrt}(x-y^2))$, conforme destacado na Figura 25. O GeoGebra já fornece uma visualização gráfica do que foi digitado no campo de entrada antes mesmo de “dar enter”. Esta funcionalidade está disponível desde 2016.

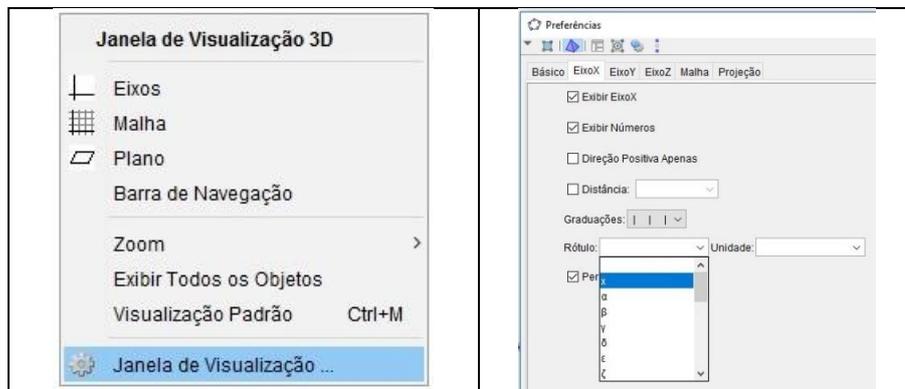
Figura 25 – Função de duas variáveis no GeoGebra



Fonte: Produção própria, 2017.

No GeoGebra o eixo vermelho é o eixo x , o verde é o eixo y e o azul é o eixo z . É possível exibir os rótulos dos eixos, para fazer isso, acesse as preferências da janela de visualização, clicando com o lado direito do mouse sobre a janela 3D, selecionando a opção “Janela de Visualização” conforme ilustra a Figura 26. Ou então no menu vá em “Opções”, depois clique em “Avançado” e selecione a janela na qual se deseja modificar alguma configuração. Além disso, também há a opção de ocultar ou exibir os eixos, a malha e o plano xy .

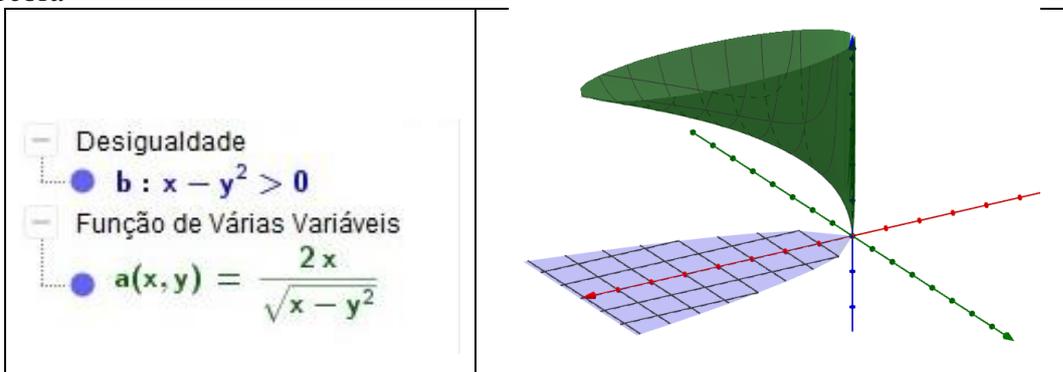
Figura 26 – Opção de exibir os rótulos dos eixos no GeoGebra



Fonte: Produção própria, 2017.

Depois de “dar enter” na janela de álgebra aparecerá “Função de Várias Variáveis” e $a(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{x-y^2}}$. No caso desta função seu domínio é $x - y^2 > 0$, para obter sua representação, digite $x-y^2>0$ no campo de entrada e “dê enter¹⁵”. Assim, irá aparecer a desigualdade na janela de álgebra e sua representação geométrica na janela de visualização 3D, conforme podemos observar na Figura 27.

Figura 27: Função $a(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{x-y^2}}$ e seu domínio – representação algébrica e gráfica no GeoGebra

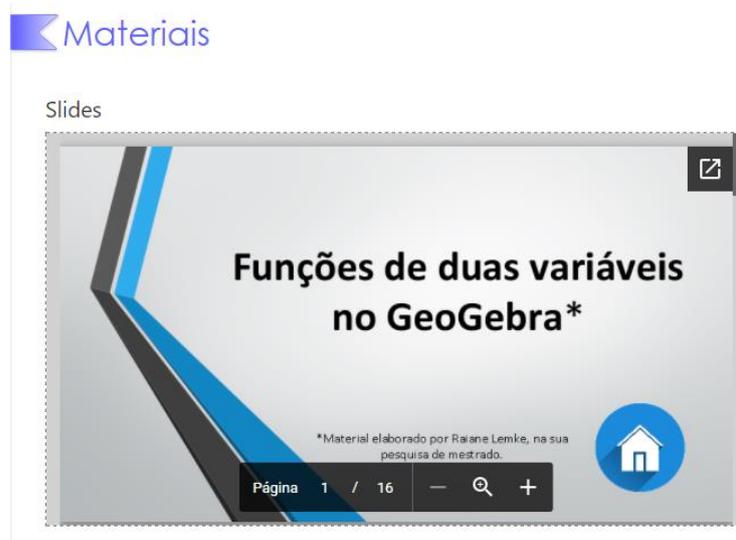


Fonte: Produção própria, 2017.

¹⁵ Para qualquer comando que você digitar no campo de entrada dê enter caso queira efetuar o comando.

Slides¹⁶ em PowerPoint (Figura 28).

Figura 28 – Slides de F2V no GeoGebra



Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 6: Paraboloides hiperbólicos

Na Figura 29 está registrada a tela inicial do capítulo 6.

Figura 29 – Capítulo 6: Paraboloides hiperbólicos



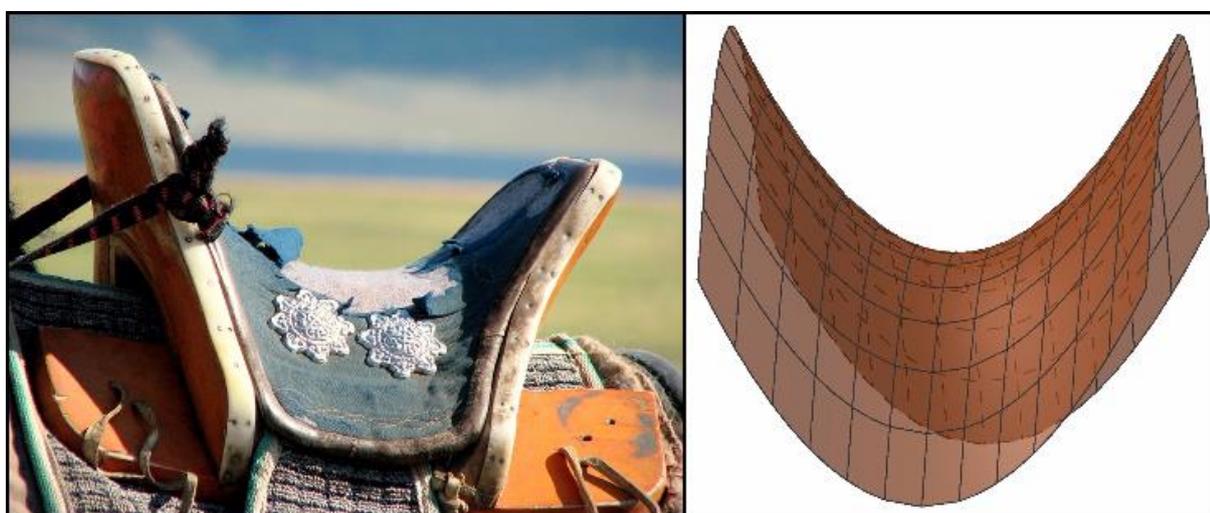
Fonte: Produção própria, 2017.

Os objetivos desse capítulo são dar exemplos práticos de funções de duas variáveis e explorar os coeficientes de um paraboloides hiperbólicos. Apresentamos algebricamente o paraboloides hiperbólicos na sua forma explícita e paramétrica. Mostramos que uma batata Pringles pode ser descrita por um paraboloides hiperbólicos e comentamos e ilustramos (vide

¹⁶ Disponíveis em: <<https://goo.gl/f28ez1>>. Acesso em: 09 jun. 2017.

Figura 30) que o parabolóide hiperbólico também é chamado de sela devido à sua semelhança com uma sela de cavalo. Propomos um objeto de aprendizagem sobre batata Pringles. Sugerimos uma atividade para encontrar uma função que descreve uma batata Pringles. Explicamos como construir um parabolóide hiperbólico no GeoGebra. Propomos uma questão onde é dado um gráfico de uma sela e é solicitada sua respectiva representação algébrica. Explicamos, com um vídeo, o OA da batata Pringles. Por fim, disponibilizamos slides em PowerPoint sobre o capítulo.

Figura 30 – Sela de cavalo

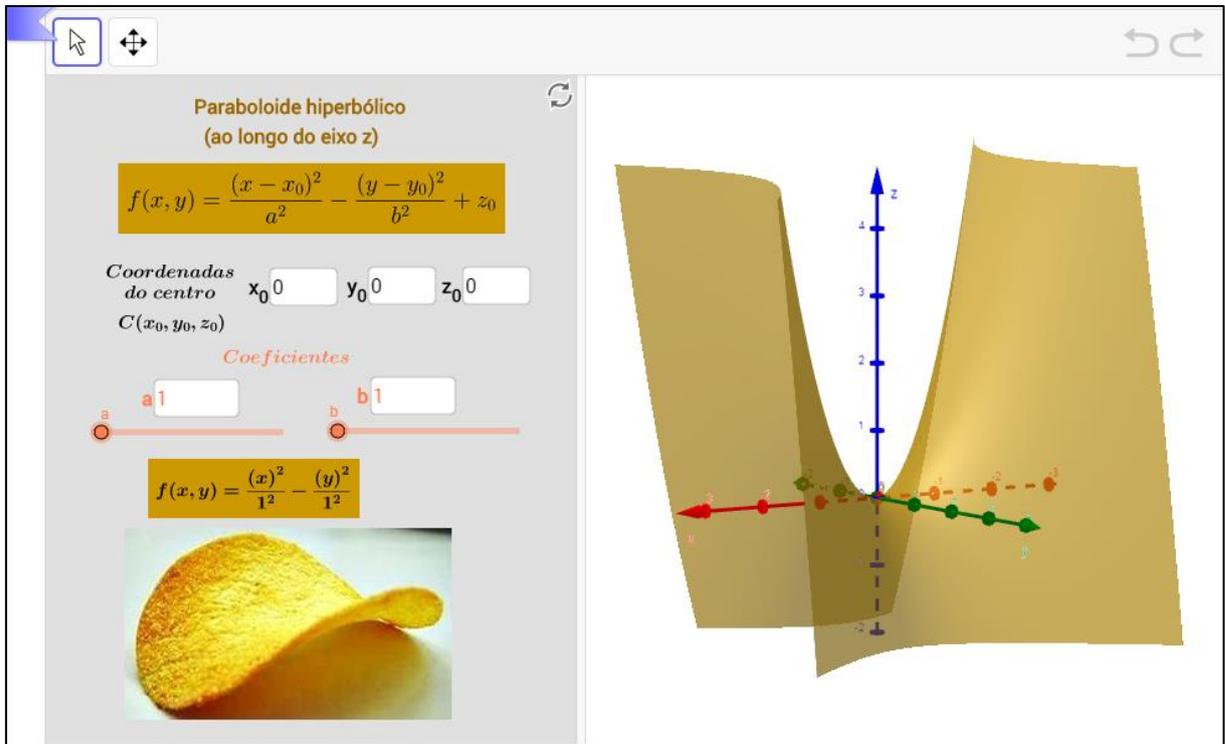


Fonte: <https://goo.gl/kU0QIq> Acesso em: 22 mai. 2017. Sela de cavalo (GeoGebra): Produção própria, 2017.

Na Figura 31, temos a tela inicial do OA: batata Pringles. A atividade proposta é encontrar uma função que descreva um parabolóide hiperbólico. Na janela algébrica (fundo cinza), o usuário pode alterar os valores das coordenadas do centro, bem como alterar os valores dos coeficientes a e b , arrastando o controle deslizante ou digitando o valor desejado no campo de entrada. Conforme esses valores são alterados, simultaneamente ocorrem mudanças na representação algébrica e gráfica do parabolóide hiperbólico. Existem diversas possibilidades de respostas, vai depender do ponto de vista de cada um. Pensamos em uma resposta como sendo o parabolóide hiperbólico dado por $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} + 1$. Para explicar esse OA também fiz um vídeo¹⁷ que disponibilizei no meu canal do YouTube.

¹⁷ LEMKE, Raiane. **Batata Pringles e o parabolóide hiperbólico**. 2017. Disponível em: <<https://youtu.be/rFRVylv24uc>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

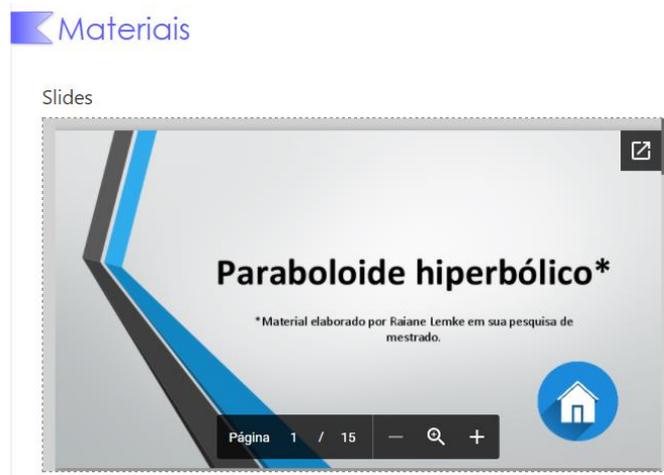
Figura 31 – OA: batata Pringles



Fonte: Produção própria, 2017.

Slides¹⁸ em PowerPoint (Figura 32).

Figura 32 – Slides do capítulo 6: parabolóide hiperbólico



Fonte: Produção própria, 2017.

¹⁸ Disponíveis em: <<https://goo.gl/t0n8yz>>. Acesso em: 09 jun. 2017.

CAPÍTULO 7: Funções de duas variáveis: algumas aplicações

A tela inicial do capítulo 7 está ilustrada na Figura 33.

Figura 33 – Capítulo 7: F2V: algumas aplicações



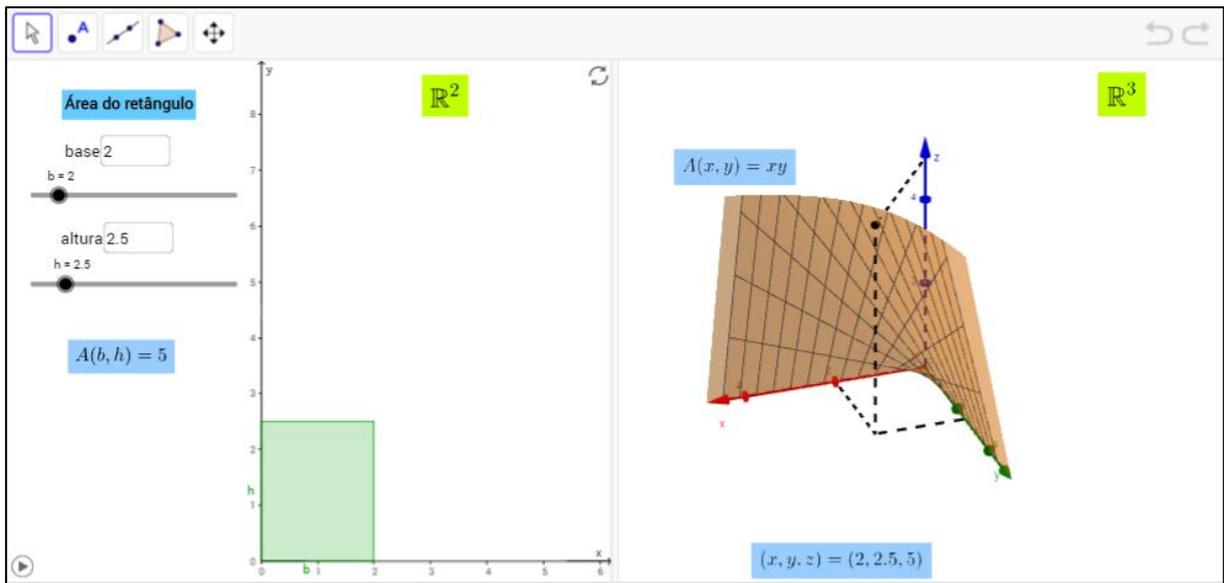
Fonte: Produção própria, 2017.

O objetivo do capítulo 7 é mostrar algumas aplicações de funções reais de duas variáveis. Citamos alguns exemplos de F2V, como a área de um retângulo, a pressão de um gás ideal, a emissão de um poluente, e o índice de massa corporal.

A Figura 34 ilustra o OA da área do retângulo. Na janela algébrica e gráfica bidimensional, o usuário pode modificar os valores da base e da altura, entrando com o valor desejado no respectivo campo de entrada ou arrastando o controle deslizante, obtendo a partir das dimensões escolhidas, o valor da área e a representação bidimensional desse retângulo. Na janela de visualização 3D, o usuário pode observar o gráfico de $A(x, y) = xy$, bem como o ponto pertencente ao gráfico da função que contém os valores da base, da altura e da área.

Sugere-se que cada estudante, ou dupla, tenha acesso a um computador com internet ou o GeoGebra 5.0 instalado. Nesse OA temos a função $A(x, y) = xy$ e sua representação algébrica e gráfica. Solicite aos estudantes que calculem $A(3, 1.5)$; $A(4, 5)$ e $A(2, 0.5)$. É trivial, mas o objetivo é lembrar que numa função de duas variáveis, temos duas variáveis independentes, no caso a base (x) e a altura (y) do retângulo, e uma variável dependente, a área. Comente novamente a definição de gráfico de funções de duas variáveis, que é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em \mathbb{R}^3 tal que $z = f(x, y)$ e pertença ao domínio D . O OA mostra um ponto do gráfico. Clicando com o botão direito do mouse no ponto, selecione a opção **habilitar rastro**.

Figura 34 – OA: Área do retângulo



Fonte: Produção própria, 2017.

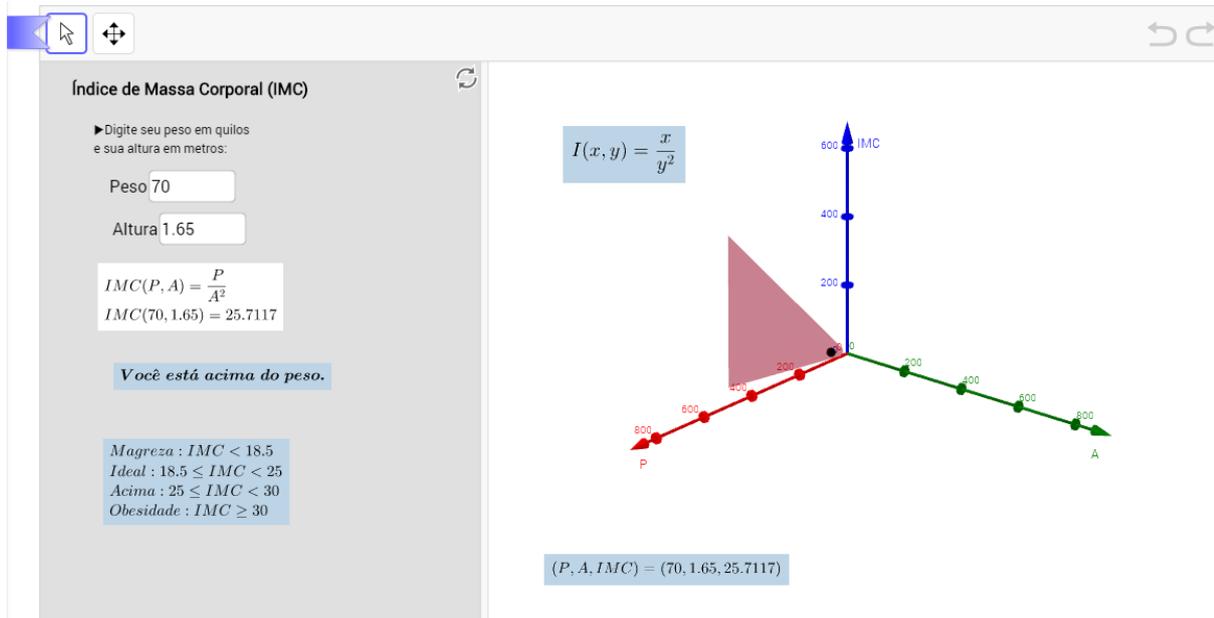
Deixe os alunos arrastarem os controles deslizantes da base e da altura. Vão aparecer alguns conjuntos de pontos na tela. Comente que se tomarmos todas as bases e alturas possíveis, e sua área correspondente, anotando todos esses pontos no espaço tridimensional, teremos o gráfico da função $A(x, y) = xy$.

Questione aos estudantes: qual é o **domínio** da função? Qual é a sua **imagem**? Ora, não faz sentido grandezas de medida serem nulas ou negativas, então $x > 0 \wedge y > 0$, ou $D(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) > 0\}$ e a imagem, como $x > 0$ e $y > 0$ e o produto de fatores positivos é positivo, então $Im(A) = \mathbb{R}_+^*$. Vale destacar que o gráfico é parte de um parabolóide hiperbólico (a equação está diferente pois está rotacionada).

No capítulo 15 inserimos esse OA, pois ele pode ser aplicado no ensino médio, inclusive na educação básica.

A Figura 35 mostra o OA do IMC. Na janela algébrica (fundo cinza), o usuário pode entrar com um peso (em kg) e uma altura (em metros), obtendo o índice de massa corporal, e conforme a tabela proposta pela OMS, aparecerá uma das mensagens: “Você está abaixo do peso.”, “Seu peso está ideal.”, “Você está acima do peso.” ou “Você é obeso.” Semelhantemente ao OA do retângulo, temos na janela tridimensional a representação gráfica da situação, só que agora a função é dada por $IMC(P, A) = \frac{P}{A^2}$. Caso houver curiosidade dos extremos reais da função descrita pelo IMC, indicamos alguns links. Para o domínio de , isto é, do peso, peças mais pesadas do mundo, pessoa mais magra do mundo. Para analisar os valores de , peças mais altas da história e peças mais baixas da história.

Figura 35 – OA: IMC



Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 8: Garrafa de Klein

Na Figura 36 temos a ilustração da tela inicial do capítulo 8.

Figura 36 – Capítulo 8: Garrafa de Klein

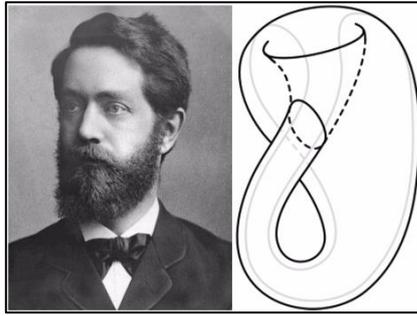


Fonte: Produção própria, 2017.

Esse capítulo tem por objetivo trazer outra superfície que normalmente não é abordada nos currículos de Cálculo: a garrafa de Klein (ver Figura 37). Apresentamos algumas curiosidades sobre a garrafa de Klein, bem como alguns vídeos (nenhum de nossa autoria) sobre a garrafa.

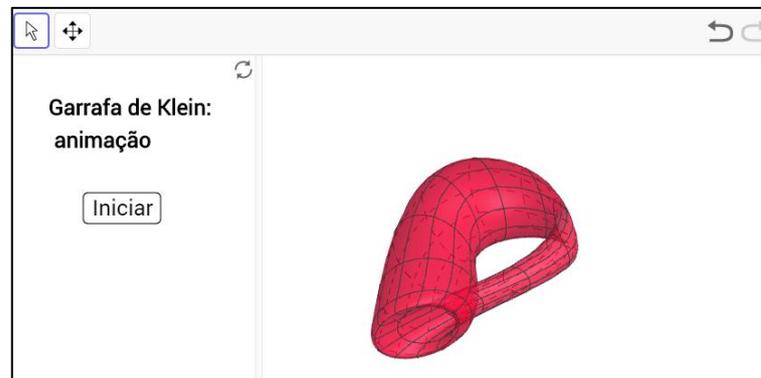
Elaboramos dois OAs sobre a garrafa de Klein, um abordando uma animação da representação gráfica da garrafa de Klein (ver Figura 38), na qual o usuário pode iniciar ou pausar a animação. O usuário também pode mover, girar, reduzir ou ampliar o gráfico para obter diferentes ângulos de visualização.

Figura 37 – Felix Klein e sua garrafa.



Fontes: <https://goo.gl/oX4Mcw> e <https://goo.gl/NkmUkD>. Acesso em: 31 mai. 2017.

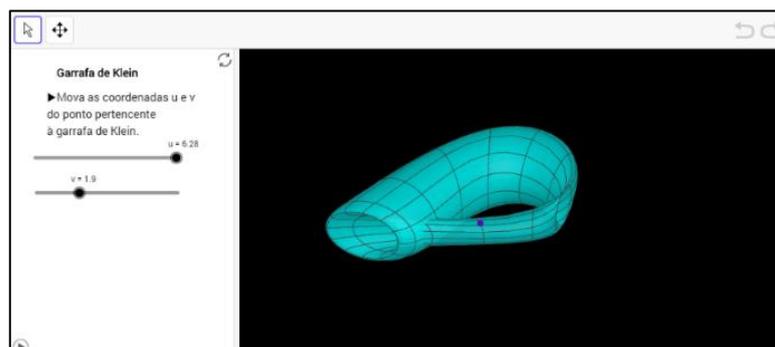
Figura 38 – OA: Garrafa de Klein: animação



Fonte: Produção própria, 2017.

O outro OA sobre a garrafa de Klein (ver Figura 39), exibe a representação gráfica da garrafa de Klein com um ponto (em roxo) pertencente à garrafa. O usuário pode mover o ponto a partir da janela algébrica, arrastando os controles deslizantes u e v . Ao arrastar o controle deslizante u , pode-se observar a peculiaridade dessa garrafa que possui apenas uma superfície e nenhuma borda. A garrafa possui um lado interno, mas nenhum externo; ela atravessa a si própria. Não tem capacidade de armazenar qualquer líquido; se lançássemos líquido sobre ela, ele sairia pelo mesmo buraco!

Figura 39 – OA: Ponto na garrafa de Klein



Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 9: Quádricas no GeoGebra

Os objetivos desse capítulo são relacionar quádricas com funções de duas variáveis e representar algumas quádricas. Cabe ressaltar que a representação geométrica de uma quádrica nem sempre é o gráfico de uma função de duas variáveis, como por exemplo se considerarmos um elipsoide, no entanto a parte superior de um elipsoide é uma função de duas variáveis assim como a sua parte inferior. A tela inicial do capítulo 9 está representada na Figura 40.

Figura 40 – Capítulo 9: Quádricas no GeoGebra



Fonte: Produção própria, 2017.

Trazemos a definição de quádricas, citando as quádricas centradas (elipsoide, hiperboloide de uma folha e hiperboloide de duas folhas), quádricas não centradas (paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico), superfícies cilíndricas e superfícies cônicas. Como curiosidade, apresentamos algumas informações sobre a relação entre um GPS e uma esfera. Questionamos como representar uma esfera e propomos 5 maneiras de fazê-lo no GeoGebra. Indicamos o capítulo 10 para mostrar relações das quádricas com obras arquitetônicas. Elaboramos OAs sobre as quádricas (ver Figuras 41 e 42), que já foram propostos em um trabalho anterior (LEMKE¹⁹, 2015), mas que passaram por algumas modificações. Cada um desses OAs é semelhante. Na janela algébrica (fundo cinza), o usuário pode selecionar a superfície desejada, aparecendo sua representação algébrica e a representação gráfica aparece na janela de visualização 3D (fundo branco). Na outra janela algébrica (fundo verde), o usuário pode entrar com os valores das coordenadas do centro da superfície e alterar os coeficientes,

¹⁹ LEMKE, Raiane. **Objetos de aprendizagem para o ensino de funções de duas variáveis**: um diferencial dinâmico. 2015. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2015.

digitando o valor desejado no campo de entrada ou arrastando o controle deslizante. Interessante ressaltar que ao mudar algum valor na janela de fundo verde, simultaneamente ocorrerão as devidas mudanças nas outras duas janelas.

Figura 41 – OAs de quádricas centradas e paraboloides

The figure displays two screenshots of a software interface for visualizing 3D quadrics and paraboloids. The interface is divided into three main sections: a list of options on the left, a 3D plot in the center, and a control panel on the right.

Top Screenshot: Quádricas centradas

- Quádricas centradas**
 - Elipsóide
 - Hiperbolóide de uma folha**
 - Hiperbolóide de uma folha eixo x
 - Hiperbolóide de uma folha eixo y

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{[x-(0)]^2}{1^2} - \frac{[y-(0)]^2}{1^2} + \frac{[z-(0)]^2}{1^2} = 1$$
 - Hiperbolóide de uma folha eixo z
 - Hiperbolóide de duas folhas**
 - Hiperbolóide de duas folhas eixo x
 - Hiperbolóide de duas folhas eixo y
 - Hiperbolóide de duas folhas eixo z

Control Panel (Right):

- Entre com os dados da equação geral da quádrica centrada
- coordenadas do centro $C(x_0, y_0, z_0)$
 - x_0 0
 - y_0 0
 - z_0 0
- Coefficientes
 - a 1
 - b 1
 - c 1

Fonte: Produção própria, 2017.

Figura 42 – OAs de superfícies cilíndricas e superfícies cônicas

Superfície cilíndrica

Curva diretriz

Elipse

Parábola

Hipérbole

Equação geral

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{[x - (0)]^2}{1^2} - \frac{[z - (0)]^2}{1^2} = 1$$

Geratriz

eixo x

eixo y

eixo z

Entre com os dados da equação geral do cilindro

Centro da curva diretriz

x_0 0

y_0 0

z_0 0

Coefficientes

a 1

a = 1

b 1

b = 1

Superfície cônica

Cone eixo x

Cone eixo y

Cone eixo z

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{[x - (0)]^2}{1^2} + \frac{[y - (0)]^2}{1^2} - \frac{[z - (0)]^2}{1^2} = 0$$

Entre com os dados da equação geral do cone

Coordenadas do centro $C(x_0, y_0, z_0)$

x_0 0

y_0 0

z_0 0

Coefficientes

a 1

a

b 1

b

c 1

c

Fonte: Produção própria, 2017.

Além disso, explicamos como construir quádricas no GeoGebra. Em Materiais, disponibilizamos um arquivo²⁰ em pdf com as equações paramétricas das principais quádricas.

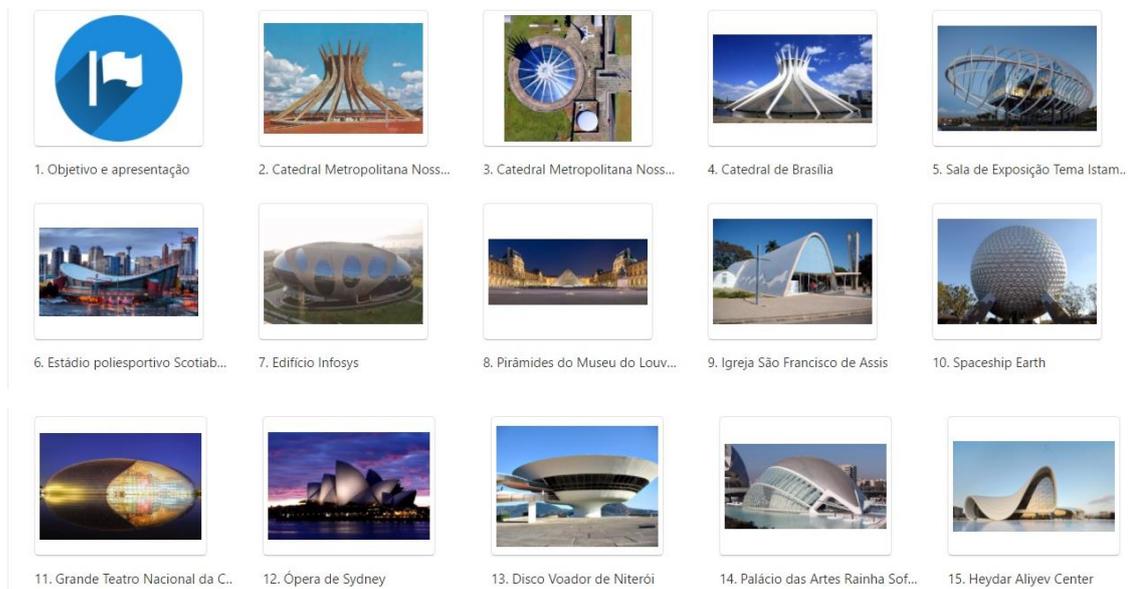
²⁰ Disponível em: < <https://goo.gl/cHkXLn> >. Acesso em: 09 jun. 2017.

CAPÍTULO 10: Arquitetura e funções de duas variáveis

O objetivo desse capítulo são relacionar funções de duas variáveis com obras arquitetônicas. Na minha pesquisa, em uma turma de CDI 2, propusemos uma atividade que solicitava que os alunos escolhessem uma construção que possuísse em sua estrutura o gráfico de uma função real de 2 variáveis reais e redigissem um texto sobre a construção pesquisada, abordando os seguintes itens: sua história, criador, localização, imagens, e se possível, utilizassem algum software para representar a superfície encontrada.

As respostas foram bem variadas com construções em diversos países e abordando diferentes funções de duas variáveis, quase todas quádricas. Com a forma de esfera, tivemos a Spaceship Earth na Flórida, nos EUA e a Ópera de Sydney em Sydney, na Austrália. Envolvendo elipsoide, apresentaram a sala de exposição tema de Istambul, em Istambul, na Turquia; o Grande Teatro Nacional da Cinha, em Pequim, na China; o Edifício Infosys, em Hinjewadi, Pune, na Índia e o Palácio das Artes Rainha Sofia, em Valência, na Espanha. Abrangendo parabolóide hiperbólico, redigiram sobre o Estádio poliesportivo Scotiabank Saddledome em Calgary, Alberta, no Canadá; a Igreja São Francisco de Assis em Belo Horizonte, Minas Gerais, no Brasil e o Heydar Aliyev Center - Baku, Azerbaijão. Sobre hiperboloide de uma folha, três equipes apresentaram a Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida em Brasília – DF. Envolvendo parabolóide circular, tivemos o Disco Voador de Niterói em Niterói, no Rio de Janeiro. Com pirâmides, exibiram as Pirâmides do Museu do Louvre em Paris, na França. A Figura 43 ilustra o capítulo 10 com essas respostas.

Figura 43 – Capítulo 10: Arquitetura e F2V



CAPÍTULO 11: Derivadas parciais: introdução

O capítulo 11 tem por objetivos definir e calcular derivadas parciais. A Figura 44 mostra a sua tela inicial. Trazemos a definição de derivada no cálculo 1. Definimos derivadas parciais, propomos um exercício sobre derivadas parciais e definimos derivadas parciais de ordem superior. Elaboramos dois OAs para calcular derivadas parciais. Além disso, explicamos como calcular derivadas parciais diretamente no GeoGebra.

Figura 44 – Capítulo 11: Derivadas parciais: introdução



Fonte: Produção própria, 2017.

Elaboramos um OA para calcular derivadas parciais de primeira e segunda ordem, cujas telas iniciais podem ser vistas na Figura 45. O usuário digita a função desejada no campo de entrada $f(x,y)$. Vale lembrar que para assegurar que o GeoGebra interprete corretamente a função, se faça uso de parênteses. Por exemplo, a função $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y)}{\cos(x-y^3)}$, pode ser digitada como $(\ln(x^2+y))/(\cos(x-y^3))$.

Figura 45 – OAs: calculadoras de derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem

Calculadora de derivadas parciais

▶ Digite a função de duas variáveis reais:

$f(x, y) = \cos(x y)$

▶ Derivadas parciais de primeira ordem:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin(x y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(x y)$

▶ Derivada parcial aplicada em um ponto (a,b): a 1.57 b 1

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(1.57, 1) = -1$

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(1.57, 1) = -1.57$

Calculadora de derivadas parciais

▶ Digite a função de duas variáveis reais:

$f(x, y) = \cos(x y)$

▶ Derivadas parciais de primeira ordem:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin(x y)$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(x y)$

▶ Derivada parcial aplicada em um ponto (a,b): a 2 b 1

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = -0.91$ $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1.82$

▶ Derivadas parciais de segunda ordem:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \cos(x y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \cos(x y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x y \cos(x y) - \sin(x y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -x y \cos(x y) - \sin(x y)$

Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 12: Interpretação geométrica de derivadas parciais

Os objetivos do capítulo 12 são interpretar geometricamente as derivadas parciais; ilustrar geometricamente e algebricamente a construção de um plano tangente a uma dada superfície, possibilitando as conexões com as derivadas parciais. Na Figura 46 temos ilustrada a tela inicial do capítulo 12. Trazemos o conceito de reta tangente do cálculo 1. Apresentamos o conteúdo de interpretação geométrica de derivadas parciais. Elaboramos um OA para abordar, de forma dinâmica, o plano tangente, trazendo alguns comentários. Além disso, indicamos um vídeo²¹ (que não é de nossa autoria) e propomos algumas atividades para serem resolvidas com o OA do plano tangente.

Figura 46 – Capítulo 12: Interpretação geométrica de derivadas parciais



Fonte: Produção própria, 2017.

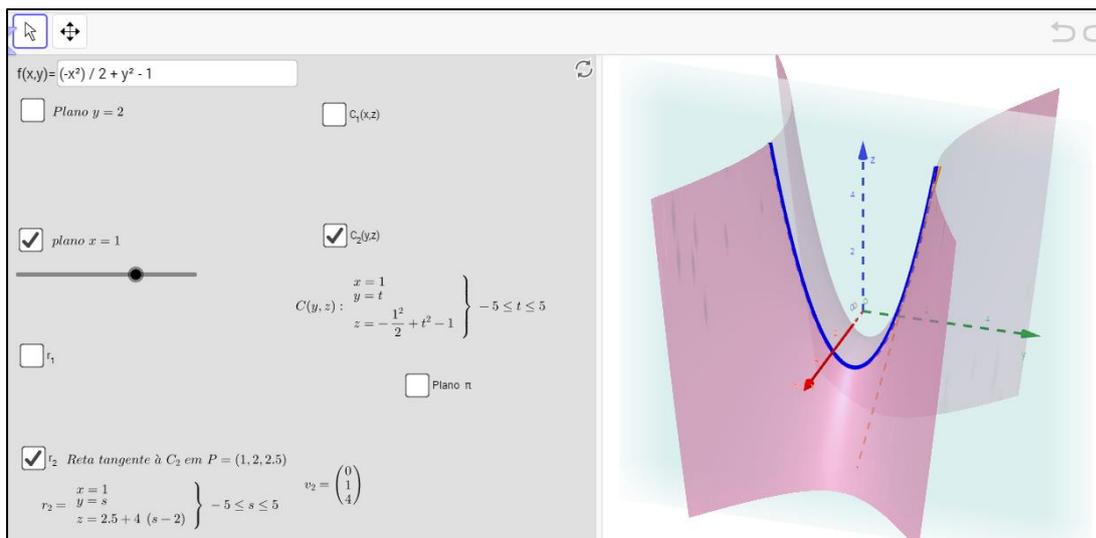
A Figura 47 ilustra o OA do plano tangente. Dada uma superfície de duas variáveis na forma explícita, o professor/aluno poderá fazer as interseções da referida superfície com os planos paralelos a xz e yz , sendo possível tanto visualizar a curva de interseção como a equação algébrica dessa curva.

Dado um ponto pertencente à superfície, poderá traçar retas tangentes à curva nesse referido ponto, obtendo assim duas retas concorrentes. Por meio do produto vetorial dessas retas poderá encontrar o vetor normal do plano tangente à superfície dada.

Esse OA pode ser utilizado para o professor introduzir a aula uma vez que os alunos de CDI 2 já tem os conhecimentos de Geometria Analítica necessários para o entendimento dessa construção. Também pode ser utilizado após o professor ter formalizado a interpretação geométrica das derivadas parciais, com o objetivo de explorar graficamente a compreensão da formalização matemática.

²¹ MORO, Graciela; AGUIAR, Rogério. **Derivadas Parciais**. UDESC/CCT: 2016. Disponível em: < <https://goo.gl/Ydv1Jl>>. Acesso em: 09 jun. 2017.

Figura 47 – OA: plano tangente



Fonte: Produção própria, 2017.

No que tange à organização da sala de aula, tanto para esse OA quanto para os demais, caso o professor seja o único a utilizar um equipamento com o software, é interessante que ele projete a tela para os alunos visualizarem, com o auxílio, por exemplo, de um projetor. Assim, o OA será visto por todos, permitindo a participação dos alunos e uma maior exploração de possíveis simulações. Outra situação recomendada para organização é deixar os alunos explorarem o aplicativo; para isso, todos deveriam ter acesso a equipamentos, que podem ser em uma sala de laboratório equipada com computadores, ou mesmo em sala de aula usando dispositivos móveis. (LEMKE²², 2015).

CAPÍTULO 13: Derivada parcial como taxa de variação

O capítulo 13 tem como objetivos definir regra da cadeia; resolver problemas que envolvam derivadas parciais como taxa de variação e visualizar o aspecto dinâmico do conceito de derivadas parciais como taxa de variação. A Figura 48 apresenta a tela inicial desse capítulo. Relembramos o conceito de taxa de variação no cálculo 1. Propomos um exercício de derivadas parciais. Definimos regra da cadeia. Fizemos um vídeo²³ sobre o diagrama da regra da cadeia. Definimos, a partir do cálculo 2, taxa de variação. Propomos alguns exercícios sobre taxa de variação. A fim de contextualizar a situação problema, mostramos o processo de produção de

²² LEMKE, Raiane. **Objetos de aprendizagem para o ensino de funções de duas variáveis**: um diferencial dinâmico. 2015. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2015.

²³ LEMKE, Raiane. Exemplo de regra da cadeia com função de duas variáveis. 2017. Disponível em: <https://youtu.be/Jc_kT5g9RQk>. Acesso em: 08 jun. 2017.

areia. Trazemos uma situação problema para ser discutida inicialmente no ambiente do lápis e do papel, para depois ser confrontada com o OA do monte cônico, em seguida propomos outros questionamentos.

Figura 48 – Capítulo 13: Derivada parcial como taxa de variação



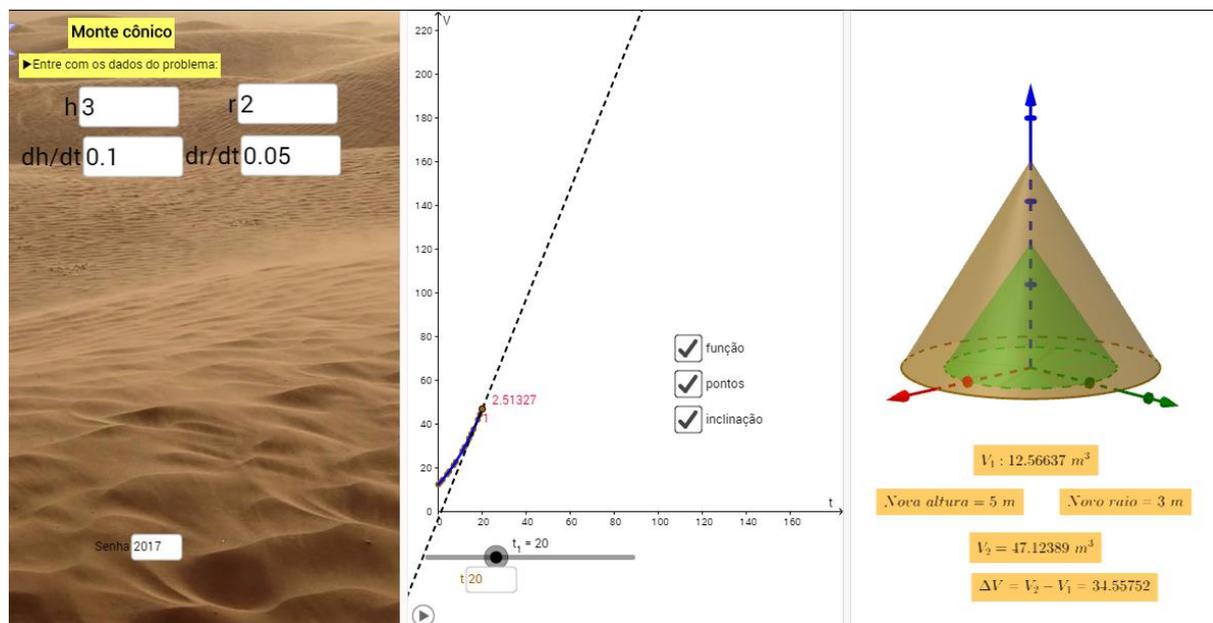
Fonte: Produção própria, 2017.

Elaboramos o OA monte cônico que aborda uma situação problema de taxa de variação. O GeoGebra também possibilita a construção de objetos de aprendizagem para aplicações de derivadas parciais, como por exemplo, taxa de variação. Elaboramos uma situação problema baseada em um contexto de um processo de fabricação de areia no qual em umas das etapas forma-se um monte cônico. Diante disso, exploramos a taxa de variação do volume do cone de areia em relação ao tempo. Além disso, conforme ilustrado na Figura 49 o OA: “Monte cônico²⁴” permite que o usuário altere os valores da altura e do raio do cone, bem como mude as taxas de variações da altura e do raio em relação ao tempo. Dinamicamente pode-se observar a resolução algébrica e a gráfica. Além disso, trazemos a representação algébrica e gráfica do gráfico do volume do cone pelo tempo $V(t)$, a fim de caracterizar que a taxa de variação do volume em relação ao tempo corresponde à inclinação da reta tangente à função $V(t)$ em dado

²⁴ Disponível em: <https://ggbm.at/F8H6Xx7N>>. Acesso em: 06 jun. 2017.

instante. Ao entrar com a senha 51490 o OA exibe a resolução algébrica na janela com fundo de areia e mostra a lei da função do volume na janela gráfica bidimensional. Para explicar esse OA, fizemos um vídeo²⁵.

Figura 49 – OA: monte cônico



Fonte: Produção própria, 2017.

Em materiais, disponibilizamos slides²⁶ em PowerPoint e um arquivo²⁷ em pdf com as atividades propostas.

CAPÍTULO 14: Sugestões de avaliação

O capítulo 14 tem por objetivo propor sugestões de avaliação mediadas pelo uso do GeoGebra. Tivemos essa preocupação, pois se utilizamos o GeoGebra no momento das aulas, por que não podemos utilizá-los em trabalhos extraclasse e provas computacionais? A Figura 50 ilustra a tela do capítulo 14, no qual propomos uma sugestão de trabalho extraclasse, com atividades que podem ser resolvidas e discutidas com o uso de alguns OAs de nossa pesquisa. Ademais, propomos uma sugestão de avaliação computacional, o que é um desafio de se realizar, mas pode ser muito interessante, conforme constatamos em nossa pesquisa.

²⁵ LEMKE, Raiane. Explicação do objeto de aprendizagem: monte cônico. 2017. Disponível em: <<https://youtu.be/zaL7TcQ3ILs>>. Acesso em: 08 jun. 2017.

²⁶ Disponíveis em: <<https://goo.gl/NiH9J2>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

²⁷ Disponível em: <<https://goo.gl/IPwIpY>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

Figura 50 – Capítulo 14: sugestões de avaliação

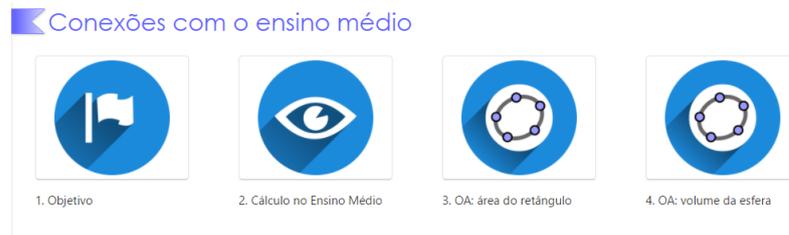


Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 15: Conexões com o ensino médio

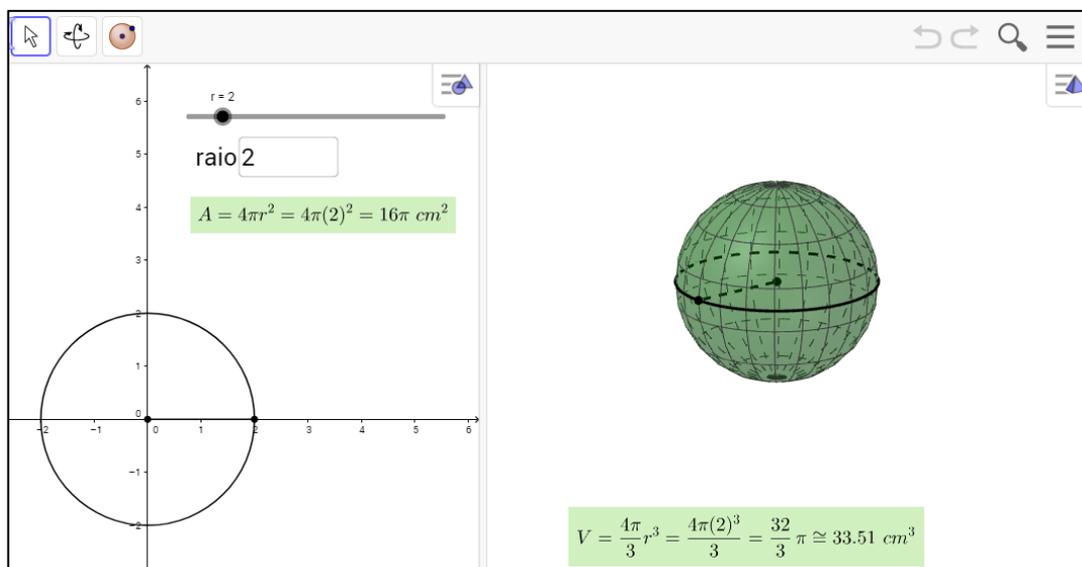
Objetivamos, nesse capítulo (ver Figura 51), fazer algumas conexões do nosso trabalho com o ensino médio. Nesse sentido, indicamos alguns trabalhos sobre o tema, bem como propomos um OA sobre a área do retângulo, que já foi descrito, e um OA sobre o volume da esfera (ver Figura 52). No OA do volume da esfera o usuário pode alterar o valor do raio e obter o volume da esfera, bem como visualizar sua representação tridimensional.

Figura 51 – Capítulo 15: Conexões com o ensino médio



Fonte: Produção própria, 2017.

Figura 52 – OA: volume da esfera



Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 16: Manuais

A Figura 53 mostra a tela inicial do capítulo 16. No capítulo 16 indicamos alguns links com manuais e tutorias do GeoGebra de uma maneira geral. O manual do produto educacional é esse próprio arquivo, pois além de descrever o produto educacional, também explicamos boa parte dele. Trazemos também links sobre como construir um GeoGebraBook.

Figura 53 – Capítulo 16: manuais



Fonte: Produção própria, 2017.

Por experiência própria, para criar mais familiaridade com o GeoGebra o jeito é praticar e esquadrihar os recursos do GeoGebra. O próprio GeoGebra oferece um manual²⁸ e tutoriais²⁹, além disso, outros sites também disponibilizam apostilas e vídeos sobre como trabalhar com o GeoGebra. Recomendamos um site: “O GeoGebra”³⁰ (que não tem vinculação com o GeoGebra) organizado pelo professor Sérgio Dantas e demais colaboradores.

O GeoGebraBook³¹ é uma coleção de materiais e folhas de trabalho baseados no GeoGebra. Ele permite que você organize seus próprios *Applets* do GeoGebra e/ou seus materiais favoritos do GeoGebra em livros online dinâmicos e interativos para aprendizagem e ensino em todos os níveis de ensino. O editor online *GeoGebraBook* permite facilmente criar um livro online no GeoGebra. Basta acessar www.geogebra.org, entrar na sua conta: [GeoGebra Account](#), e clicar em New GeoGebraBook ou Create Book para começar a criar.

CAPÍTULO 17: Algumas considerações e perspectivas

Para finalizar, trazemos algumas considerações e perspectivas. Em suma, nosso produto educacional não é algo fechado, é algo passível de modificações.

Além disso, fazer um GeoGebraBook com 18 capítulos exige um certo tempo e paciência. Apesar de ser trabalhoso, o processo de construção e me trouxe muitos aprendizados e reflexões.

²⁸ Disponível em: <<https://wiki.geogebra.org/pt/Manual>>. Acesso em: 25 mai. 2017.

²⁹ Disponível em: <<http://wiki.geogebra.org/en/Tutorials>>. Acesso em: 25 mai. 2017.

³⁰ Disponível em: <<http://ogeogebra.com.br/site/>>. Acesso em: 25 mai. 2017.

³¹ Disponível em: <https://www.geogebra.org/manual/en/The_GeoGebraBook_Editor>. Acesso em: 09 jun. 2017.

Figura 54 – Capítulo 17: Algumas considerações e perspectivas



Fonte: Produção própria, 2017.

CAPÍTULO 18: Deixe sua opinião

Nesse capítulo o usuário pode deixar comentários sobre o produto educacional. Também apresentamos resultados de opiniões de quando o produto educacional, na época ainda em construção, foi mostrado para integrantes dos grupos de pesquisa NEPesTEEM e PEMSA da UDESC, em 2016. A Figura 55 ilustra a tela inicial do capítulo.

Figura 55 – Capítulo 18: Deixe sua opinião



Fonte: Produção própria, 2017.

O tópico 1 é um espaço destinado para o usuário deixar comentários, críticas e/ou sugestões, conforme podemos observar o formulário na Figura 56.

Figura 56 – Formulário no Google Docs

 A screenshot of a Google Docs form titled 'Deixe sua opinião'. The form has a white background and a grey border. At the top, the title 'Deixe sua opinião' is displayed in a large, bold font. Below the title, there is a line of text: '"Funções reais de duas variáveis e GeoGebraBook: recursos dinâmicos para o ensino de Cálculo." Disponível em: <https://ggbm.at/GdZ9wzW8>'. Below this, there is a red asterisk followed by the word 'Obrigatório'. The main text of the form reads: 'Deixe aqui seus comentários, críticas e/ou sugestões sobre o produto educacional : *'. Below this text is a text input field with the placeholder 'Sua resposta'. At the bottom of the form, there is a blue button with the text 'ENVIAR'.

Fonte: Produção Própria, 2017.

No tópico 2 apresentamos respostas obtidas após apresentação do produto educacional, na época em construção, para integrantes dos grupos de pesquisa NEPesseEM e PEMSA, da UDESC. No espaço reservado à comentários, sugestões e/ou críticas tivemos as seguintes respostas (ver quadro 7):

Quadro 7 – Comentários sobre o produto educacional em 2016

" Acho muito boa a ideia de um livro digital com atividades para o professor explorar em sala de aula. Sei que ainda está em fase de desenvolvimento, muita coisa ainda vai ser melhorada...mas sugiro colocar mais sugestões de como o professor explorar, que perguntas pode fazer aos alunos.....e estou curiosa para as atividades avaliativas. "
" Será divulgado? "
" Achei bem interessante a construção desse GeoGebra Book, a organização e a divisão dos tópicos. Fica fácil encontrar as opções e também é bem interessante as visualizações com as imagens e com as simulações gráficas. Acredito que será útil tanto para professores quanto para alunos trabalharem com ele. "
" Em algumas construções, são usadas combinações de cores que podem não ser legíveis, por falta de contraste entre elas, principalmente ao usar datashow. "
" Muito bom o produto, principalmente a visualização e as aplicações. "
" Ótima proposta para os processos de ensino e de aprendizagem. "
" Ótima ferramenta e muito bem explorada nesse produto. Parabéns aos idealizadores e implementadores. Acredito que possam ser incluídas mais algumas atividades, ao final, com o propósito de explorar a taxa de variação no volume de outros recipientes (como cilíndricos, esféricos, paralelepípedos, etc). Além disso, seria bacana realizar o mesmo tipo de contas com a variação de qualquer outra função, sem ser apenas o volume. Talvez essa pudesse ser outra atividade. Além disso, alguns botões do Geogebra poderia ser mais destacados, como o "voltar", o "play dos filmes", etc para chamar mais atenção do usuário. "

Fonte: Produção própria, 2017.

Quando solicitados para descrever o produto educacional com uma palavra, obtivemos a nuvem de palavras ilustrada na Figura 57.

Figura 57 – Nuvem de palavras sobre esse GeoGebraBook



Fonte: Produção própria, 2016.

CONSIDERAÇÕES

Esperamos que esse material possa trazer contribuições para professores e alunos de Cálculo. Vale ressaltar que o produto educacional, na versão on-line, não é algo fechado, mas que poderá passar por melhorias, atualizações e modificações, em função de contribuições de pessoas que colocam em prática as sugestões por nós propostas, lembrando inclusive que há um campo no próprio produto educacional (capítulo 18) no qual o professor ou o aluno podem compartilhar experiências sobre seu uso.

REFERÊNCIAS

GEOGEBRA, 2017. Disponível em: < <https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 13 jun. 2017.

LEMKE, Raiane. **Objetos de aprendizagem para o ensino de funções de duas variáveis: um diferencial dinâmico**. 2015. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2015.