EJEMPLO DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN.

- Sistema de ecuaciones lineales (con solución única - **sistema consistente y determinado**)

$$-3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 30$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 19$$

Su matriz aumentada queda como

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 30 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

Realizamos operaciones elementales de renglón para obtener una **matriz en forma escalonada por renglones reducida**.

$$\begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 30 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 19 \end{bmatrix} R1 \leftrightarrow R3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ -3 & -7 & 5 & 30 \end{bmatrix}$$ Intercambiamos los renglones 1 y 3

Generamos ceros debajo del uno principal de la primera columna

$$\frac{R2 - 2R1 \rightarrow R2}{R3 + 3R1 \rightarrow R3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & -3 & -3 & -27 \\ 0 & 5 & 11 & 87 \end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal de la segunda fila o renglón

$$-\frac{1}{3}R2 \rightarrow R2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & 11 & 87 \end{bmatrix}$$

generamos ceros arriba y abajo en la columna del uno principal del segundo renglón

$$\frac{R1-4R2 \rightarrow R1}{R3-5R2 \rightarrow R3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -17 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 42 \end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal del tercer renglón

$$\frac{1}{6}R3 \rightarrow R3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -17 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

generamos ceros en la columna del uno principal de la tercera fila

$$\frac{R1+2R3 \rightarrow R1}{R2-R3 \rightarrow R2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 7 \end{cases}$$ llegamos a la **solución del sistema**.

- Sistema de ecuaciones lineales (con múltiples soluciones)

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 19$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 11$$
$$5x_1 + 11x_2 + x_3 = 14$$

Su matriz aumentada queda como

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & 19\\ 2 & 5 & 1 & 11\\ 5 & 11 & 1 & 14\end{bmatrix}$$

Realizamos operaciones elementales de renglón para obtener una **matriz en forma escalonada por renglones reducida**.

generamos ceros debajo del uno principal de la primera columna

$$\frac{R2-2R1\to R2}{R3-5R1\to R3}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & 19\\ 0 & -3 & -3 & -27\\ 0 & -9 & -9 & -81\end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal de la segunda fila o renglón

$$-\frac{1}{3}R2\to R2\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & 19\\ 0 & 1 & 1 & 9\\ 0 & -9 & -9 & -81\end{bmatrix}$$

generamos ceros arriba y abajo en la columna del uno principal del segundo renglón

$$\frac{R1-4R2\to R1}{R3+9R2\to R3}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & -17\\ 0 & 1 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_3=-17\\ x_2+x_3=9\\ 0=0\end{cases}$$

tenemos múltiples soluciones:

$$\begin{cases}x_1=-17-2x_3\\ x_2=9-x_3\end{cases}$$ una solución para cada valor que le demos a x_3.

Soluciones: $(-17-2x_3, 9-x_3, x_3)$ (**Conjunto solución**)

Por ejemplo, si $x_3 = 0$ entonces $x_1 = -17$ y $x_2 = 9$. solución: (-17, 9, 0)

ó si $x_3 = 7$ entonces $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$. solución: (- 3, 2, 7) ....

El sistema es consistente pero indeterminado (muchas soluciones).

- Sistema de ecuaciones lineales (sin solución)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 19 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 6 \end{aligned}$$

Su matriz aumentada queda como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Realizamos operaciones elementales de renglón para obtener una **matriz en forma escalonada por renglones reducida**.

generamos ceros debajo del uno principal de la primera columna

$$\xrightarrow[R3-R1\to R3]{R2-2R1\to R2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & -3 & -3 & -27 \\ 0 & -2 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal de la segunda fila o renglón

$$-\frac{1}{3}R2 \to R2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

generamos ceros arriba y abajo en la columna del uno principal del segundo renglón

$$\xrightarrow[R3+2R2\to R3]{R1-4R2\to R1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -17 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

El último renglón indica que 0 x_1+0 x_2+0 x_3 = 5, lo cual no es posible para ningún valor de x_1, x_2 y x_3.

Por lo tanto el sistema no tiene solución

El sistema es inconsistente

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Este método de eliminación usa la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones sustituyendo hacia atrás en el sistema de ecuaciones equivalente.

Ejemplo:

Sistema de ecuaciones lineales (con solución única - **sistema consistente y determinado**)

$$-3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 30$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 19$$

Su matriz aumentada queda como

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 30 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

Realizamos operaciones elementales de renglón para obtener una **matriz en forma escalonada por renglones**.

$\begin{bmatrix} -3 & -7 & 5 & 30 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 19 \end{bmatrix} R1 \leftrightarrow R3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ -3 & -7 & 5 & 30 \end{bmatrix}$ intercambiamos los renglones 1 y 3

generamos ceros debajo del uno principal de la primera columna

$$\frac{R2 - 2R1 \to R2}{R3 + 3R1 \to R3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & -3 & -3 & -27 \\ 0 & 5 & 11 & 87 \end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal de la segunda fila o renglón

$$-\frac{1}{3}R2 \rightarrow R2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & 11 & 87 \end{bmatrix}$$

generamos ceros abajo del uno principal del segundo renglón

$$R3 - 5R2 \rightarrow R3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 42 \end{bmatrix}$$

obtenemos el uno principal del tercer renglón y en cascada la solución:

$$-\frac{1}{6}R3 \rightarrow R3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 19 \\ x_2 + x_3 = 9 \\ x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4(2) + 2(7) = 19 \\ x_2 + 7 = 9 \\ x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 7 \end{cases}$$