MINICURSO

ANÁLISE E CONSTRUÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Me. Uender Barbosa de Souza[1]
Esp. Jéssica Luana da Silva Santos[2]
Me. Maxwell Gonçalves Araújo[3]

1 Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, uenderbs@gmail.com
2 Universidade Estadual de Goiás – Câmpus Henrique Santillo, jessika-luana@hotmail.com
3 Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, mxnte@yahoo.com.br

ANÁLISE E CONSTRUÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Uender Barbosa de Souza[4]
Jéssica Luana da Silva Santos[5]
Maxwell Gonçalves Araújo[6]

Resumo:
O minicurso, é uma proposta do Instituto GeoGebra de Goiás, tem por objetivo a discussão, análise e construção de alguns métodos para integração numérica através do *software* GeoGebra. Buscamos apresentar uma alternativa e incentivar o uso de tecnologias no ensino de matemática, em especial, à abordagem do conteúdo proposto. Faremos inicialmente uma introdução básica sobre como calcular áreas por métodos numéricos e, ao uso de alguns comandos do *software*, objetivando que os participantes se familiarizem com a proposta e conheçam as potencialidades que o mesmo tem a oferecer. No segundo momento, faremos as construções dinâmicas e detalhadas de alguns métodos para integração numérica. É de grande importância que os participantes possuam conhecimento básico do *software*, porém não precisam necessariamente ter domínio sobre o assunto proposto, já que faremos a introdução do mesmo. O minicurso possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, incentiva a criatividade e apresenta ferramentas de grande importância para investigação matemática.

Palavras-chave: Integrais; GeoGebra; Ensino; Cálculo; Áreas.

MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A ideia de se integrar uma função surgiu para determinar áreas sob curvas no plano cartesiano, como pode ser observado na Figura 1.

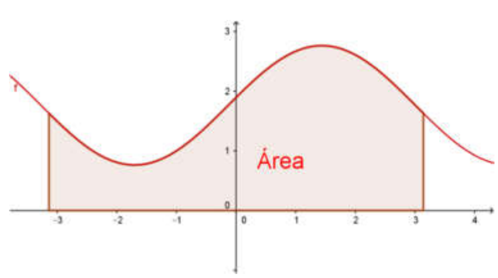

Figura 1 – Área sob a curva num intervalo [a, b].

4 Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, uenderbs@gmail.com
5 Universidade Estadual de Goiás – Câmpus Henrique Santillo, jessika-luana@hotmail.com
6 Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, mxnte@yahoo.com.br

Infelizmente, nem todas as funções possuem integrais com soluções analíticas, então métodos numéricos são usados como alternativa para contornar este problema.

Nesse minicurso serão construídos os métodos de Somas de Riemann, Regra dos Trapézios e Regra de Simpson.

A **Integral de Riemann** basicamente usa a ideia de estimativa inferior e superior para definir áreas através de sequências, formadas por somas parciais, compostas por áreas de retângulos (veja as Figuras 2 e 3). Maiores detalhes podem ser encontrados em [1].

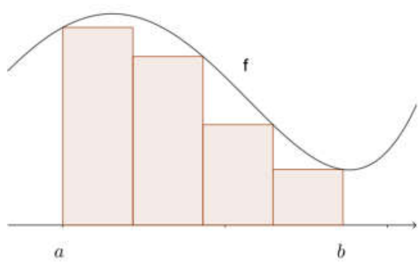

Figura 2 – Estimativa inferior.

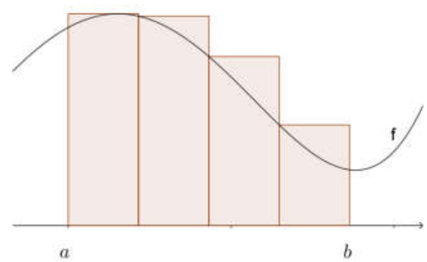

Figura 3 – Estimativa superior.

Note que ao fazer a base dos retângulos ter comprimento próximo a zero, a soma das áreas dos retângulos se aproximam da área entre a curva e o *eixo x* no intervalo $[a, b]$.

V GeoGebra possui os comandos pré-definidos que definem as somas inferior e superior. São eles:

SomaDeRiemannInferior[<Função>, <x inicial>, <x final>, <Número de Retângulos>];

SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <x inicial>, <x final>, <Número de Retângulos>].

A **Regra dos Trapézios** utiliza um polinômio interpolador de Lagrange do primeiro grau para uma aproximação polinomial da função, esta ao ser integrada fornece a aproximação:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)\big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big)}{2}.$$

Observe que cada termo $\frac{(x_{k+1}-x_k)\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)}{2}$ da soma representa a área de um trapézio, veja a Figura 4.

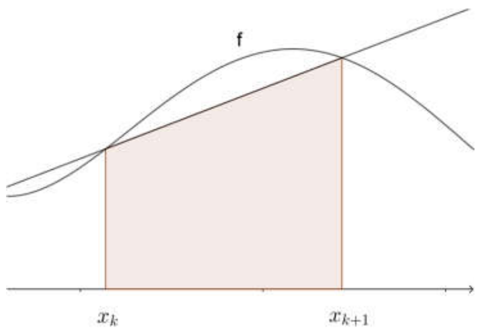

Figura 4 – k-ésimo termo da Regra dos Trapézios.

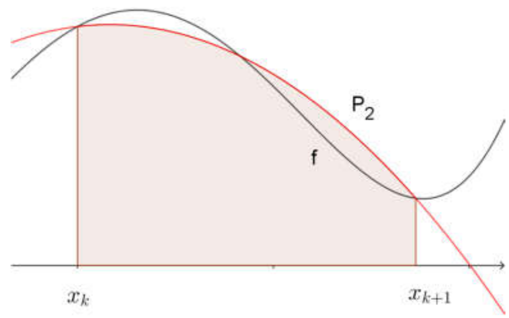

Figura 5 – k-ésimo termo da Regra de Simpson.

Já na **Regra de Simpson,** utiliza-se um polinômio interpolador de Lagrange do segundo grau para uma aproximação polinomial da função (veja a Figura 5), resultando na aproximação

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_2(x)dx.$$

Consulte [2] ou algum outro livro de Cálculo Numérico para mais informações e aprofundamento no assunto.

ALGUNS COMANDOS

a) Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento>]
b) Polígono[<Lista de Pontos>]
c) Nivelar[<Lista>]
d) ControleDeslizante[<Mínimo>, <Máximo>, <Incremento>, ...]
e) Integral[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]
f) Soma[<Lista>]

Veja [3] para mais informações sobre comandos do GeoGebra.

ATIVIDADE 1

Construir uma ferramenta para a Regra dos Trapézios com o nome RegraTrapézios conforme Figura 6.

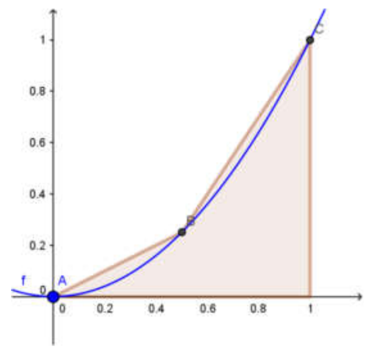

Figura 6 – Regra Trapézios com $n = 2$.

Dica: Crie um polígono com vértices $(a + dk, f(a + dk))$, *com* $k = 0, \dots, n$, *onde* a *é o extremo inferior do intervalo de integração e* d *é constante e igual a* $\frac{b-a}{n}$.

ATIVIDADE 4

Construa de forma análoga à atividade anterior uma ferramenta para a Regra de Simpson com o nome RegraSimpson.

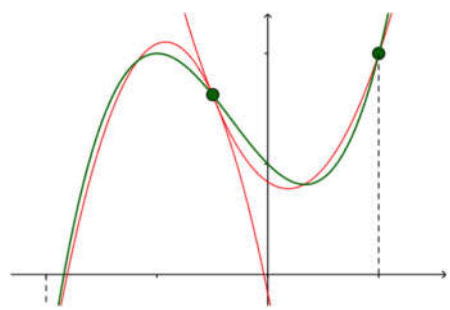

Figura 7 – Regra Simpson com $n = 2$ para a função $f(x^3 + x^2 - x + 1)$.

EXERCÍCIOS

1. Calcule a integral de $f(x) = x$ no intervalo $[0,1]$ usando as Somas de Riemann. Faça o mesmo usando as ferramentas implementadas e compare os resultados para $n = 5$.
2. Use a Regra de Simpson para integrar a função f entre 0 e 2 com o menor esforço computacional possível (menor números de subintervalos e maior precisão). Trabalhe com três casas decimais.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leq x \leq 1, \\ (x+2)^3, 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

3. Calcule a integral de $f(x) = e^x$ no intervalo $[0,1]$ usando os comandos para Somas de Riemann as ferramentas construídas no minicurso. O erro em módulo deve menor que 10^{-6} .

DESAFIO

Construa uma ferramenta que calcule a Integral da função f por retas tangentes (veja as Figuras 8 e 9).

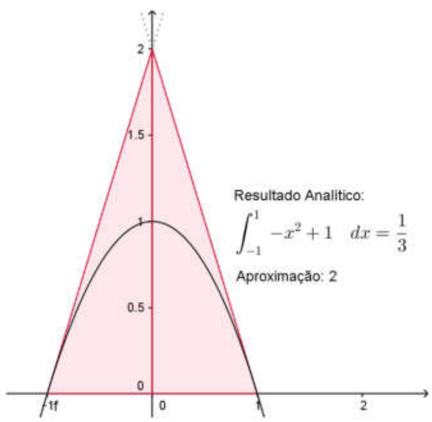

Figura 8 – Aproximação com duas retas tangentes.

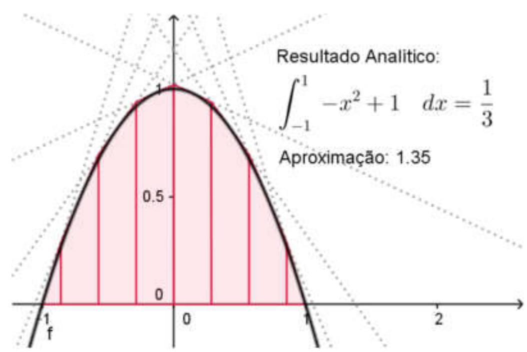

Figura 9 – Aproximação com sete retas tangentes.

REFERÊNCIAS

[1] BRANNAN, David. *A First Course in Mathematical Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] BURDEN, R.L. & FAIRES, J.D. *Numerical analysis*. New York: PWS-KENT, 1989.

[3] GEOGEBRA, *Commands*. Disponível em https://www.geogebra.org/manual/. Acesso em 08 de jun. de 2016.