

Mesolabio

Metodo

La costruzione di questo compasso prevede l'assemblamento di diversi righelli.

In primo luogo si fissi un righello OA . Sia poi OB un secondo righello in grado di ruotare attorno al polo O , con $\overline{OB} = \overline{OA}$.

Si ponga un terzo righello in B perpendicolare al righello mobile OB . Tale righello interseca il righello fisso OA in un punto C .

Si ponga un quarto righello in C ortogonale ad OA . Sia D il suo punto di intersezione con OB .

E così via...

Al variare dell'angolazione del righello mobile OB , si osserva uno slittamento degli altri righelli.

Costruzione tramite GeoGebra

1. Si costruiscano gli assi cartesiani.
Sia $O = (0, 0)$.
2. Si costruisca lo slider della quantità positiva r e sia $A = (r, 0)$.
3. Si costruisca lo slider del coefficiente angolare $m > 0$ del righello mobile $h : y = mx$.
(Suggerimento: $0 \leq m \leq 3$, con incremento 0.01)
4. Si costruisca la circonferenza di centro O passante per A . Sia B la sua intersezione con la retta h .
5. Si costruisca la retta perpendicolare ad OB passante per B . Sia C il suo punto di intersezione con la retta OA .
6. Si costruisca la retta perpendicolare ad OA passante per C . Sia D il suo punto di intersezione con la retta OB .
7. Si costruisca la retta perpendicolare ad OB passante per D . Sia E il suo punto di intersezione con la retta OA .
8. Si costruisca la retta perpendicolare ad OA passante per E . Sia F il suo punto di intersezione con la retta OB .
9. Si costruisca la retta perpendicolare ad OB passante per F . Sia G il suo punto di intersezione con la retta OA .
10. Si costruisca la retta perpendicolare ad OA passante per G . Sia H il suo punto di intersezione con la retta OB .
11. Si rendano visibili le tracce dei punti D, F, H .

Utilizzo

Si selezioni il valore di r desiderato.

Si attivi l'animazione di m .

Osservazione

La traccia del punto D corrisponde ad una iperbole di equazione

$$x^4 = r^2(x^2 + y^2)$$

Dimostrazione:

- Siano $x = \overline{OC}$, $y = \overline{DC}$ e $\overline{OB} = \overline{OA} = r$.
- I triangoli $\triangle OCD$, $\triangle OBC$ e $\triangle BCD$ sono rettangoli, quindi:

$$x^2 + y^2 = \overline{OD}^2 = (\overline{OB} + \overline{BD})^2 = (r + \overline{BD})^2 \quad (1)$$

$$x^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 = r^2 + \overline{BC}^2 \quad (2)$$

$$y^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 \quad (3)$$

- (2) $\Rightarrow \overline{BC}^2 = x^2 - r^2$
- (3) $\Rightarrow \overline{BD}^2 = y^2 - \overline{BC}^2 = y^2 - x^2 + r^2$
- $\Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{y^2 - x^2 + r^2}$
- (1) $\Rightarrow x^2 + y^2 = (r + \sqrt{y^2 - x^2 + r^2})^2$
- $\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 + y^2 - x^2 + r^2 - 2r\sqrt{y^2 - x^2 + r^2}$
- $\Rightarrow 2x^2 - 2r^2 = -2r\sqrt{y^2 - x^2 + r^2}$
- $\Rightarrow r\sqrt{y^2 - x^2 + r^2} = r^2 - x^2$
- $\Rightarrow r^2(y^2 - x^2 + r^2) = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$
- $\Rightarrow x^4 - r^2x^2 = r^2y^2$
- $\Rightarrow x^4 = r^2(x^2 + y^2)$