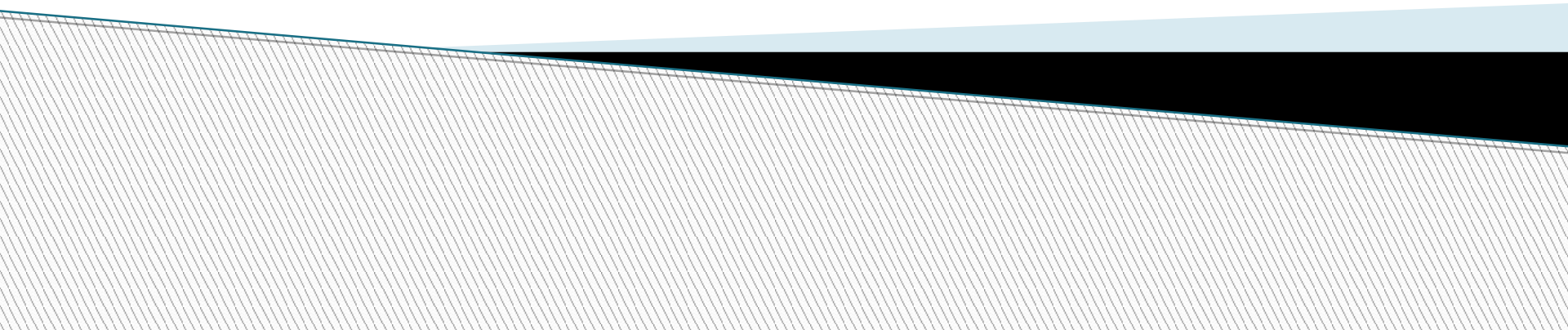


SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES POR TRANSFORMADA DE LAPLACE



SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES POR TRANSFORMADA DE LAPLACE

El método de la transformada de Laplace es especialmente útil para tratar problemas en los que se pidan soluciones particulares ya que las condiciones iniciales dadas se incorporan en las ecuaciones de transformación, resultando directamente la solución buscada.

Transformada de Laplace de las derivadas

Teorema para la primera derivada. Si $T\{f(x)\} = F(s)$

Entonces $T\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$

Teorema para la segunda derivada. Si $T\{f(x)\} = F(s)$

Entonces $T\{f''(x)\} = s^2F(s) - sF(s) - f'(0)$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales mediante transformada de Laplace

$$y' - 2y = 3$$

Si $y(0) = 0$

Solución

Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$T\{y' - 2y\} = T[3]$$

$$T\{y'\} - 2T\{y\} = T[3]$$

$$sF(s) - y(0) - 2F(s) = 3 \frac{1}{s}$$

$$(s - 2)F(s) = 3 \frac{1}{s}$$

$$F(s) = 3 \frac{1}{s(s-2)}$$

Mediante fracciones parciales

$$F(s) = -\frac{3}{2} \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{(s-2)}$$

Aplicamos transformada inversa de Laplace

$$T^{-1}\{F(s)\} = -\frac{3}{2} T^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{2} T^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\}$$

$$y(x) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} e^{2x}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales mediante transformada de Laplace

$$y'' + y = x$$

Si $y(0) = 1$ y $y'(0) = -2$

Solución

Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$T\{y'' + y\} = T[x]$$

$$T\{y''\} + T\{y\} = T[x]$$

$$s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2 F(s) - s + 2 + F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 1)F(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{s - 2}{(s^2 + 1)}$$

Mediante fracciones parciales

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s^2 + 1)} + \frac{s}{(s^2 + 1)} - 2 \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{(s^2 + 1)} - 3 \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

Aplicamos transformada inversa de Laplace

$$T^{-1}\{F(s)\} = T^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + T^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)}\right\} - 3T^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)}\right\}$$

$$y(x) = x + \cos x - 3\sin x$$