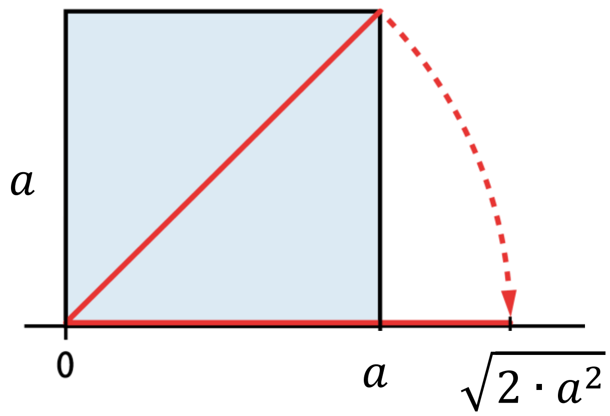
Frank Schumann

Streckenlängen und irrationale Zahlen

Quadrat mit doppelt so großem Flächeninhalt

Es gibt Streckenlängen, die mit irrationalen Maßzahlen angegeben werden, zum Beispiel
die Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm oder die Seitenlänge eines Quadrates mit dem Flächeninhalt 2 cm².

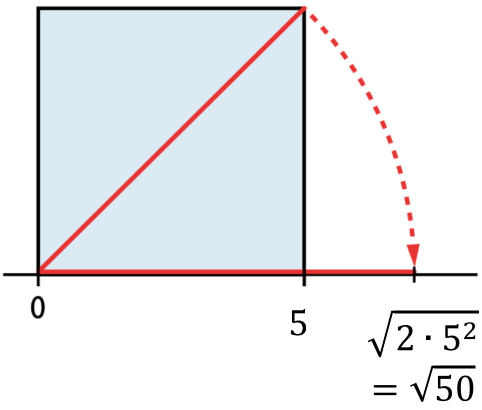
Allgemein gilt: Wenn a (in cm) die Seitenlänge eines Quadrates ist, dann sind beide Diagonalen im Quadrat jeweils $\sqrt{2 \cdot a^2}$ (in cm) lang.



Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengerade.

Seitenlänge a (in cm)	1	2	3	4	5	6	7
Länge einer Diagonalen (in cm)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{72}$	$\sqrt{98}$

Beispiel:



Absoluter Betrag und Wurzel

Definition: Der Abstand einer rationalen Zahl a von der Zahl 0 heißt der Betrag von a.

Für den Betrag von a schreibt man $|a|$ (lies: *absoluter Betrag* von a).

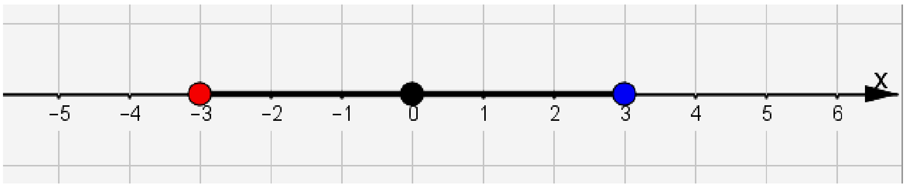
Satz 1: Für *alle* reellen Zahlen a: $|a| \geq 0$.

Beispiele:

Die rationalen Zahlen -3 und 3 sind jeweils drei Längeneinheiten von der Null entfernt.

Also gilt: $|-3| = |3| = 3$

Sprechweise: „Der absolute Betrag von minus drei gleich der absolute Betrag von drei gleich drei.“



Weitere Beispiele:

a) $|0| = 0$

b) $|5.8| = 5.8$

c) $|-85.73| = 85.73$

d) $\left|-\frac{8}{5}\right| = \frac{8}{5}$

e) $\left|-\frac{8}{5}\right| = \frac{8}{5}$

Satz 2: Für *alle* reellen Zahlen a: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = |a|$.

Beispiele:

a) $\sqrt{8^2} = \sqrt{(-8)^2} = |8| = |-8| = 8$

b) $\sqrt{45.662^2} = \sqrt{(-45.662)^2} = |45.662| = |-45.662| = 45.662$

c) $\sqrt{0.128^2} = \sqrt{(-0.128)^2} = |0.128| = |-0.128| = 0.128$

Zahlenmengen[1]

Beispiel Spezielle Zahlen
Im Mengendiagramm in Fig. 1 sind die reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$, die rationalen mit $\mathbb{Q}$, die ganzen mit $\mathbb{Z}$ und die natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Welche Eigenschaften werden bei der jeweiligen Spezialisierung hinzugenommen, wenn man von $\mathbb{R}$ ausgeht?

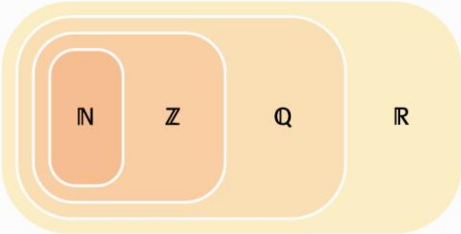


Fig. 1

Lösung:
Eine reelle Zahl, die eine abbrechende oder periodische Dezimaldarstellung hat, heißt rationale Zahl. Eine rationale Zahl, die eine Dezimalzahldarstellung ohne Komma besitzt, heißt ganze Zahl. Eine ganze Zahl, die nicht negativ ist, heißt natürliche Zahl.
Andere Möglichkeit: Eine reelle Zahl, die sich als Bruch schreiben läßt, heißt rationale Zahl. Eine rationale Zahl, die eine Bruchdarstellung mit dem Nenner 1 hat, heißt ganze Zahl. Eine ganze Zahl, die nicht negativ ist, heißt natürliche Zahl.

Nach dieser Definition ist die Zahl Null eine natürliche Zahl.

[1] Quelle: Brandt, D. et al. (2006). Lambacher Schweizer, Band 4, S. 133. Deutschland: Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart.

Begründung für $x = \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ – eine falsche Aussage

1. Gesucht wird eine Zahl x, die quadriert 5 ergibt.
   Da $2^2 = 4$ und $3^2 = 9$ ist, muss x zwischen den natürlichen Zahlen 2 und 3 liegen.

2. Wäre die gesuchte Zahl x eine Bruchzahl, so könnte man x als vollständig gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ und $q \neq 0$ schreiben.

3. Da $\frac{p}{q}$ zwischen 2 und 3 liegt, ist der Bruch $\frac{p}{q}$ keine ganze Zahl. Also ist der Nenner $q \neq 1$.

4. Multipliziert man $\frac{p}{q}$ mit sich selbst, so erhält man das Quadrat von $\frac{p}{q}$: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$.

5. Da sich der Bruch $\frac{p}{q}$ nicht mehr kürzen lässt, lässt sich auch $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ nicht mehr kürzen.

6. Da $q \neq 1$ ist, ist auch $q \cdot q \neq 1$.

7. Weil der Nenner des Bruchs $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ nicht 1 ist, kann $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ nicht 5 sein.

8. Es gibt keine Bruchzahl, die quadriert 5 ergibt.

9. Die Aussage $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ ist also falsch.