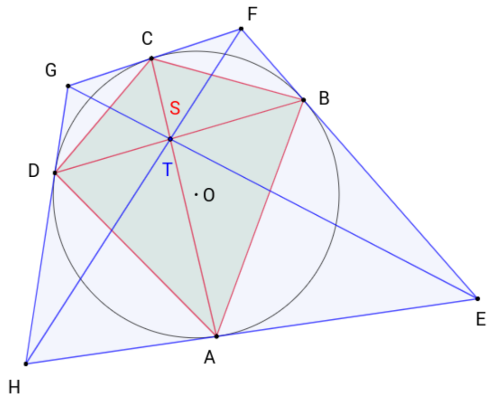
Diagonalen im Sehnen- und Tangentenviereck

1 Die Aufgabe

$ABCD$ ist Sehnenviereck im Kreis mit Mittelpunkt O (der im Innern des Sehnenvierecks liegen soll). Die Tangenten in seinen Eckpunkten bilden das Tangentenviereck $EFGH$.



Zu beweisen ist der Satz:

Der Diagonalenschnittpunkt S des Sehnenvierecks und der Diagonalenschnittpunkt T des Tangentenvierecks sind identisch.

2 Beweisgedanke

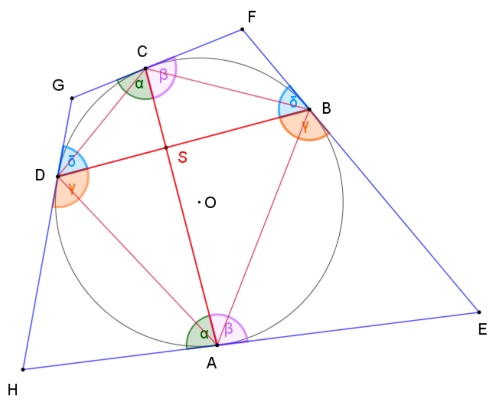
Zum Beweis, dass S und T identisch sind, zeigen wir:

Aussage 1: S liegt auf $[HF]$.
Aussage 2: S liegt auf $[EG]$.

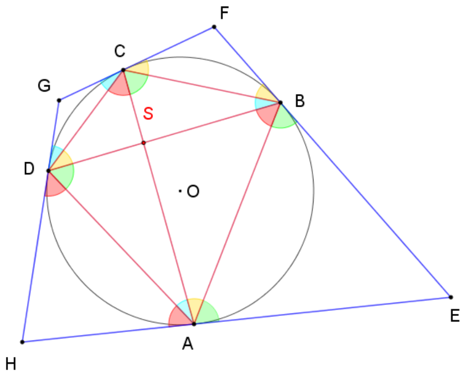
Wir benötigen dazu zwei Hilfssätze, die wir in den Abschnitten 3 und 4 bereitstellen.

3 Hilfssatz 1

Die Winkel zwischen den Tangenten in den Endpunkten einer Diagonale des Sehnenvierecks und dieser Diagonalen sind paarweise gleich, wenn sie auf derselben Seite der Diagonalen liegen; andernfalls ergänzen sie sich zu 180^o.



Beweis: Die in der folgenden Zeichnung gleichfarbig markierten Winkel sind jeweils gleich groß:



Sie sind entweder Umfangswinkel über der gleichen Sehne (z.B. rot markiert: $\angle DCA$ und $\angle DBA$ über der Sehne $[DA]$) oder gleich einem dazugehörigen Sehnen-Tangenten-Winkel (im Bsp. $\angle HDA$ und $\angle HAD$).

Daraus folgt sofort die Behauptung.

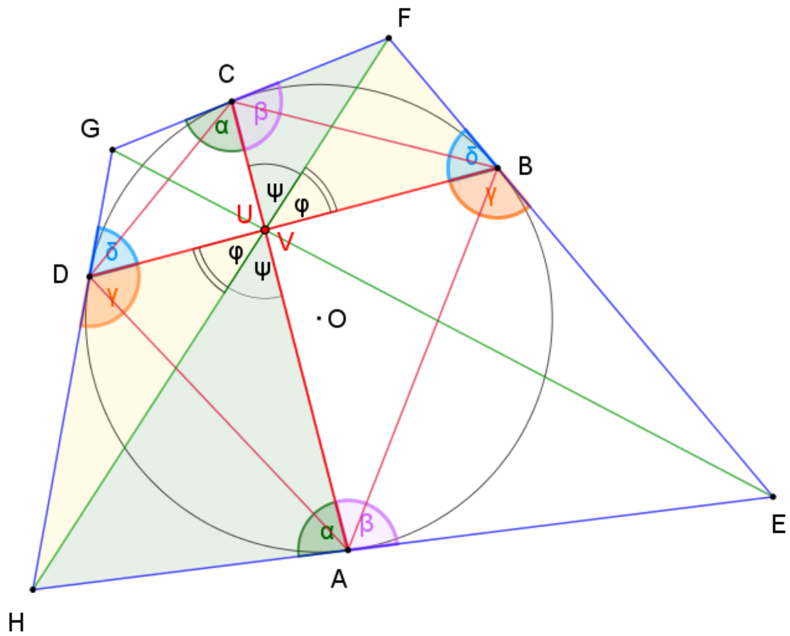
□

4 Hilfssatz 2

Der Schnittpunkt der Strecken $[HF]$ und $[AC]$ heiße U,
der Schnittpunkt der Strecken $[HF]$ und $[BD]$ heiße V.

Dann gilt folgender **Satz:**

U und V teilen die Strecke $[HF]$ im gleichen Verhältnis.



Beweis:

Nach dem Hilfssatz 1 gilt:

Die Winkel $\angle HAU$ und $\angle GCU$ sind gleich groß $(= \alpha)$.
Die Winkel $\angle EAU$ und $\angle FCU$ sind gleich groß $(= \beta)$.

Weil α und β Nebenwinkel voneinander sind, gilt die Gleichheit

$$\sin\alpha = \sin\beta \tag{1}$$

Für die Scheitelwinkel bei U gilt natürlich

$$\angle HUA = \angle FUC \quad (= \psi);$$

Nun wenden wir den **Sinussatz** auf Teildreiecke an, die die Ecke U haben und an der Diagonalen $[HF]$ anliegen:

Im $\triangle HAU$ gilt:

$$\frac{\mid HU \mid}{\mid HA \mid} = \frac{\sin\alpha}{\sin\psi} \tag{2}$$

und im $\triangle FCU$:

$$\frac{\mid FU \mid}{\mid FC \mid} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi} \tag{3}$$

Wegen (1) sind alle diese Quotienten gleich. Somit folgt

$$\frac{\mid HU \mid}{\mid FU \mid} = \frac{\mid HA \mid}{\mid FC \mid} \tag{4}$$

In ganz gleicher Weise zeigt man für die Dreiecke $\triangle HDV$ und $\triangle FBV$ mit den Scheitelwinkeln $\angle HVD = \angle FVB \quad (= \phi)$ die Gültigkeit der Gleichungen

$$\frac{\mid HV \mid}{\mid HD \mid} = \frac{\sin\gamma}{\sin\phi} \tag{5}$$

und

$$\frac{\mid FV \mid}{\mid FB \mid} = \frac{\sin\delta}{\sin\phi} \tag{6}$$

was mit der Gleichheit

$$\sin\gamma = \sin\delta \tag{7}$$

für die Nebenwinkel γ und δ zu der Verhältnisgleichung

$$\frac{\mid HV \mid}{\mid FV \mid} = \frac{\mid HD \mid}{\mid FB \mid} \tag{8}$$

führt, ganz entsprechend der Gleichung (4).

Nun sind aber die Tangentenabschnitte von H aus gleich lang, ebenso die von F aus:

$$\mid HD \mid = \mid HA \mid \text{ und } \mid FB \mid = \mid FC \mid.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (4) und (8) sind also gleich, somit auch die linken:

$$\frac{\mid HU \mid}{\mid FU \mid} = \frac{\mid HV \mid}{\mid FV \mid} \tag{9}$$

Das heißt aber:

U teilt die Strecke $[HF]$ im gleichen Verhältnis wie V.

□

5 Beweis von Aussage 1

Nach dem Hilfssatz 2 erweisen sich U und V als der selbe Punkt auf $[HF]$. Weil aber ja U auf $[AC]$ liegt und V auf $[BD]$, muss das der Schnittpunkt S der Diagonalen des Sehnenvierecks sein.

S liegt also auf $[HF]$.

□

6 Beweis von Aussage 2

Der Beweis für Aussage 2 lässt sich in ganz analoger Weise führen wie der für Aussage 1. Man muss nur H durch E und F durch G ersetzen und die Winkelbezeichnungen entsprechend anpassen. Der Hilfssatz 2 ist dabei in einer entsprechend modifizierten Fassung anzuwenden.

S liegt also auch auf $[EG]$.

□

7 Die Lösung der Aufgabe:

Nach den Aussagen 1 und 2 gehen beide Diagonalen des Tangentenvierecks durch den Schnittpunkt der Diagonalen des Sehnenvierecks.

Das war zu zeigen.

□