Sucesiones de números reales. Progresiones

1 Concepto de sucesión

Una *sucesión* es una secuencia de números escritos en un cierto orden y que siguen una ley de formación. Los números de la sucesión se llaman *términos* y se representan mediante una letra con subíndice que indica el lugar que ocupa el término en la sucesión: a_1, a_2, a_3,..., a_n, ...

Así, por ejemplo, en la sucesión de números pares 2, 4, 6, 8, 10, ... tenemos que:

El primer término es 2 y se indica $a_1 = 2$, el segundo término es 4 y se indica $a_2 = 4$, ...

El término que ocupa un lugar cualquiera en la sucesión se llama *término general* y se representa por a_n.

En muchas ocasiones el término general se puede expresar mediante una fórmula que permite hallar directamente un término cualquiera sabiendo el lugar que ocupa.

Por ejemplo, en la sucesión de números pares 2, 4, 6, 8, 10, ... tenemos que:

$$a_1 = 2 = 2 \cdot 1,\ a_2 = 4 = 2 \cdot 2,\ a_3 = 6 = 2 \cdot 3,\ a_4 = 8 = 2 \cdot 4,\ a_5 = 10 = 2 \cdot 5, \ldots,\ a_n = 2 \cdot n$$

Observa que al sustituir n por los números 1, 2, 3, 4, 5, ... se obtienen los términos de la sucesión.

Por tanto, si queremos hallar el 20º término, tenemos que $n = 20$ y $a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$.

Sin embargo, en algunas ocasiones no es posible hallar una fórmula para el término general. Así, por ejemplo, no se ha encontrado ninguna fórmula para la sucesión de números primos: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Ejemplos:

– Escribe los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es: $a_n = (n-1)\cdot(n+1)$

1er término: $n = 1$: $a_1 = (1-1)\cdot(1+1) = 0 \cdot 1 = 0$

2º término: $n = 2$: $a_2 = (2-1)\cdot(2+1) = 1 \cdot 3 = 3$

3er término: $n = 3$: $a_3 = (3-1)\cdot(3+1) = 2 \cdot 4 = 8$

4º término: $n = 4$: $a_4 = (4-1)\cdot(4+1) = 3 \cdot 5 = 15$

5º término: $n = 5$: $a_5 = (5-1)\cdot(5+1) = 4 \cdot 6 = 24$

Por tanto, la sucesión será: 0, 3, 8, 15, 24, ..., $(n-1)\cdot(n+1)$, ...

– Halla el término general de la sucesión de números impares: 1, 3, 5, 7, 9, ...

1er término: $a_1 = 1 = 2 - 1 = 2 \cdot 1 - 1$

2º término: $a_2 = 3 = 4 - 1 = 2 \cdot 2 - 1$

3er término: $a_3 = 5 = 6 - 1 = 2 \cdot 3 - 1$

4º término: $a_4 = 7 = 8 - 1 = 2 \cdot 4 - 1$

5º término: $a_5 = 9 = 10 - 1 = 2 \cdot 5 - 1$

Término general: nº término: $a_n = 2 \cdot n - 1$

4 Progresiones aritméticas

4.1 Definición

Una *progresión aritmética* es una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante d, llamada *diferencia de la progresión*: $a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d, ..., a_n = a_{n-1} + d$

De ahí se deduce que: $a_2 - a_1 = d,\ a_3 - a_2 = d,\ a_4 - a_3 = d, ..., a_n - a_{n-1} = d$

Por tanto, para averiguar si una sucesión de números reales es una progresión aritmética, basta hallar la diferencia entre cada término y su anterior y ver si son iguales.

La sucesión 3, 7, 11, 15, 19, ... es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

Las progresiones aritméticas pueden ser crecientes, constantes o decrecientes:

Si $d > 0$, la progresión aritmética es *creciente*: 2, 5, 8, 11, 14, ... ($d = 3 > 0$)
Si $d = 0$, la progresión aritmética es *constante*: 2, 2, 2, 2, 2, ... ($d = 0$)
Si $d < 0$, la progresión aritmética es *decreciente*: 6, 2, −2, −6, −10, ... ($d = -4 < 0$)

En la mayoría de ocasiones no trabajaremos con los infinitos términos de la progresión, sino sólo con los n primeros términos, que llamaremos *progresión aritmética limitada*: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

4.2 Término general

El término general de una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ será: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,d}$ ya que:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

- Halla el término general y el 10º término de la progresión aritmética 3, 7, 11, 15, 19, ...
  Como $a_1 = 3$ y $d = 4$, entonces:
  $a_n = 3 + (n-1)\cdot 4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$ y $a_{10} = 4\cdot 10 - 1 = 40 - 1 = 39$

- Halla el primer término de una progresión aritmética sabiendo que $a_7 = 19$ y $d = 4$.
  Luego: $a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d \Rightarrow 19 = a_1 + 6\cdot 4 \Rightarrow 19 = a_1 + 24 \Rightarrow a_1 = 19 - 24 = -5$

4.3 Suma de los términos de una progresión aritmética limitada

La suma de los n términos de una progresión aritmética limitada $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, viene dada por la siguiente fórmula: $\boxed{S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\, n}$

- Halla la suma de los términos de la progresión aritmética limitada 7, 10, 13, 16, 19

  Como $a_1 = 7,\ a_5 = 19$ y $n = 5$, entonces: $S_5 = \dfrac{7 + 19}{2}\,5 = \dfrac{26}{2}\,5 = 13\cdot 5 = 65$

  Efectivamente: 7 + 10 + 13 +16 + 19 = 65.

5 Progresiones geométricas

5.1 Definición

Una *progresión geométrica* es una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ en la que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante r, llamada *razón* de la progresión: $a_2 = a_1 \cdot r,\ a_3 = a_2 \cdot r,\ a_4 = a_3 \cdot r, \ldots, a_n = a_{n-1} \cdot r$

De ahí se deduce que: $\frac{a_2}{a_1} = r,\ \frac{a_3}{a_2} = r,\ \frac{a_4}{a_3} = r, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

Por tanto, para averiguar si una sucesión de números reales es una progresión geométrica, basta hallar el cociente entre cada término y el anterior y ver si son iguales.

La sucesión 5, 15, 75, 225, 675, ... es una progresión geométrica de razón $r = 3$

Las progresiones geométricas pueden ser crecientes, constantes, decrecientes o alternadas:

Si $r > 1$, la progresión geométrica es *creciente*:	3, 6, 12, 24, 48, ...	$(r = 2 > 1)$
Si $r = 1$, la progresión geométrica es *constante*:	2, 2, 2, 2, 2, ...	$(r = 1)$
Si $0 < r < 1$, la progresión geométrica es *decreciente*:	16, 8, 4, 2, 1, ...	$(0 < r = \frac{1}{2} < 1)$
Si $r < 0$, la progresión geométrica es *alternada :*	2, −2, 2, −2, 2, ...	$(r = -1 < 0)$

En la mayoría de ocasiones no trabajaremos con los infinitos términos de la progresión, sino sólo con los n primeros términos, que llamaremos *progresión geométrica limitada*: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

5.2 Término general

El término general de una progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ será: $\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$ ya que:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot r \\
a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\
a_5 &= a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4 \\
\hline
a_n &= a_1 \cdot r^{n-1}
\end{aligned}$$

– Halla el término general y el 10º término de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24, 48, ...
  Como $a_1 = 3$ y $r = 2$, entonces: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ y $a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1.536$

5.3 Suma de los términos de una progresión geométrica limitada

La suma de los n términos de una progresión geométrica limitada $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, viene dada por las siguientes fórmulas: $\boxed{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}}$ ó bien $\boxed{S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}$ siendo $r \neq 1$

Si $r = 1$, todos los términos son iguales y $S_n = n \cdot a_1$

– Halla la suma de los términos de la progresión geométrica limitada 1, 2, 4, 8, 16
  Como $a_1 = 1$, $r = 2$ y $n = 5$, entonces: $S_5 = 1 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 1 \cdot \frac{32 - 1}{1} = 31$
  Efectivamente: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31

5.4 Suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada decreciente ($0 < r < 1$)

En este caso, podemos calcular la suma de los infinitos términos de la progresión, ya que a medida que n se va haciendo muy grande, el término a_n se va haciendo cada vez más pequeño en valor absoluto, de manera que si el número de términos n es infinito, entonces $a_n \cdot r$ es cero.

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{0 - a_1}{r - 1} = \frac{-a_1}{r - 1} = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow \boxed{S = \frac{a_1}{1 - r}}$$

Ejemplos:

– Halla la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Calculamos $r = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < r < 1 \Rightarrow$ *Progresión geométrica decreciente*

La suma pedida será: $S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$

Efectivamente: $8 + 4 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + \ldots = 16$

– Aplicando las progresiones geométricas, calcula la fracción generatriz irreducible del número: $0{,}\widehat{36}$

$0{,}\widehat{36} = 0{,}363636\ldots = 0{,}36 + 0{,}0036 + 0{,}000036 + \ldots$

Se trata de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de r = 0,01

Luego, $S = 0{,}\widehat{36} = 0{,}363636\ldots = \frac{0{,}36}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}36}{0{,}99} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

– Aplicando las progresiones geométricas, calcula la fracción generatriz irreducible del número $0{,}75\widehat{2}$

$0{,}75\widehat{2} = 0{,}75 + 0{,}00\widehat{2}$

$0{,}00\widehat{2} = 0{,}002 + 0{,}0002 + 0{,}00002 + \ldots$

Se trata de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $r = 0{,}1$

Luego, $S = 0{,}00\widehat{2} = 0{,}00222222\ldots = \frac{0{,}002}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}002}{0{,}9} = \frac{2}{900} = \frac{1}{450}$

Por tanto: $0{,}75\widehat{2} = 0{,}75 + 0{,}00\widehat{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{450} = \frac{675}{900} + \frac{2}{900} = \frac{677}{900}$

Recuerda que:

Sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$	Término general	Suma de n términos	Suma de los infinitos términos
Progresión aritmética	$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n$	----------------
Progresión geométrica	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$	$S = \frac{a_1}{1 - r} \quad (0 < r < 1)$