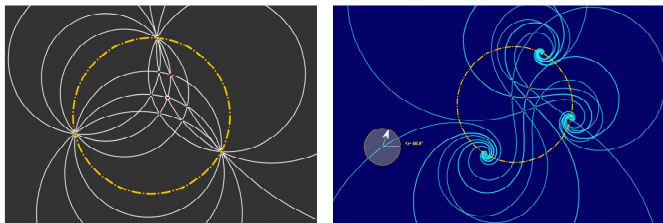
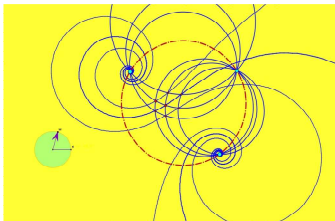


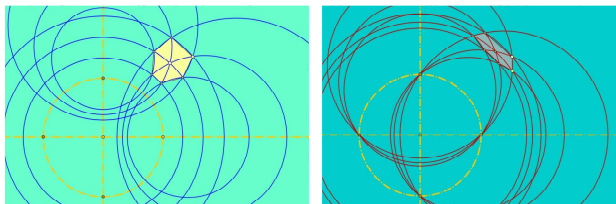
Drei Büschel mit 3 verschiedenen Polen:



Dieses Beispiel haben wir in Abschnitt 1 genannt. Ein 6-Ecknetz entsteht auch mit Loxodromen zu einem festen gemeinsamen Winkel. Eine zweites 6-Ecknetzbeispiel entsteht, wenn man nur eines der drei hyperbolischen Büschel durch Loxodrome oder das orthogonale elliptische Büschel ersetzt.²



Sechsecknetze aus 3 linearen Vektorfeldern mit mehr als 3 verschiedenen Polen sind nur noch möglich, wenn es sich um 3 Kreisbüschel handelt, die zu einer orthogonalen Basis $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ mit $g_i^2 \in \mathbb{R}$ und $g_i \cdot g_j = 0$ für $i \neq j$ von $\mathcal{G}$ gehören. Beispielsweise bilden je 3 der Kreisbüschel $\{\vartheta_0, i\vartheta_0, \vartheta_1, i\vartheta_1, \vartheta_2, i\vartheta_2\}$ mit den Polen $\{0, \infty, +1, -1, +i, -i\}$ ein 6-Ecknetz.



²Die Netze mit Loxodromen sind nicht "konstruierbar".

Wie ermittelt man die möglichen 6-Ecknetze aus Kreisbüschel? 3 lineare Vektorfelder $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ erzeugen 3 Kurvenscharen. Durch jeden Punkte gehen 3 sich schneidende Kurven außer in den 3 Berührorten: $H_1 := \vartheta_2 \wedge \vartheta_3$, $H_2 := \vartheta_3 \wedge \vartheta_1$ und $H_3 := \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$. Damit die 3 infinitesimalen Bewegungen ein 6-Ecksnetz bilden, müssen die Vektorfelder die 6-Ecksnetzbedingung erfüllen:

$$0 = \frac{[\vartheta_1, H_3]}{H_3} - \frac{[\vartheta_2, H_1]}{H_1} - \frac{[\vartheta_3, H_2]}{H_2} + \frac{[\vartheta_3, [\vartheta_1, H_3]]}{H_2} - \frac{[\vartheta_1, [\vartheta_2, H_1]]}{H_1} + \frac{[\vartheta_2, H_1] \cdot [\vartheta_1, H_1]}{H_1^2} - \frac{[\vartheta_1, H_3] \cdot [\vartheta_2, H_2]}{H_2^2}$$

wobei $[\vartheta, H]$ die infinitesimale Änderung der Form H unter der Bewegung ϑ bedeutet. Für Teilbarkeitsüberlegungen kann man die Gleichung zusammenfassen:

$$G \cdot H_1 = [\vartheta_2, H_1] \cdot [\vartheta_1, H_1] \cdot H_2^2 \cdot H_3$$

Da eine Cassini-Quartik unter einer Möbiusbewegung nicht invariant sein kann, folgt hieraus, dass H_1 und entsprechend H_2 und H_3 in Kreise zerfallen. Mit einer dann noch immer mühsamen Fallunterscheidung gelangt man zu den möglichen Fällen.

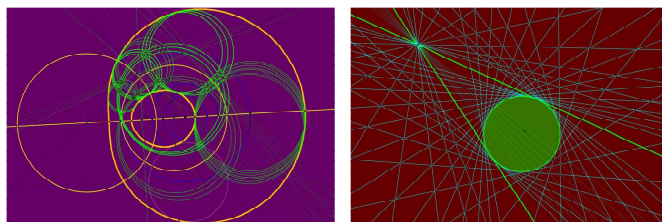
Welche 6-Ecksnetze aus 3 Kreisscharen gibt es außer den genannten?

W. WUNDERLICH hat 1938 gezeigt, dass die doppelt-berührenden Kreisscharen einer bizirkularen Quartik 6-Ecknetze bilden, sofern mehr als 2 der DB-Kreise durch die Punkte eines Gebiets der Ebene gehen. Für meine Dissertation war mir dieser Sachverhalt nicht bekannt. Der Beweis von **WUNDERLICH** erschließt sich mir leider nicht.

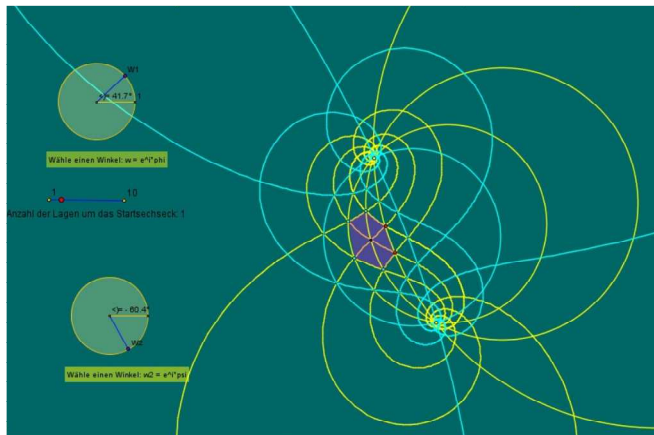
Meine Vermutung:

- Ein 6-Ecknetz aus drei Kreisscharen entsteht
 - aus der Projektion eines geradlinigen 6-Ecknetzes auf die Möbiusquadratik
 - oder aus den Kreisen dreier linearer Vektorfelder in den oben angedeuteten Fällen
 - oder aus drei Scharen von doppelt-berührenden Kreisen einer bizirkularen Quartik.

Bizirkulare Quartiken $Q(z) = 0$ zerlegen die Ebene in 2 Gebiete $Q(z) > 0$ und $Q(z) < 0$. Einteilige Quartiken mit 4 verschiedenen Brennpunkten besitzen 2 Symmetrien und nur 2 Scharen von DB-Kreisen. Diese liegen auf verschiedenen Seiten der Quartik. Durch jeden Punkt gehen daher höchstens 2 DB-Kreise. Zweiteilige Quartiken mit 4 verschiedenen Brennpunkten besitzen 4 Symmetrien, daher 4 DB-Kreisscharen, wovon 3 auf einer Seite der Quartik liegen. Durch jeden Punkt dieser Seite gehen je 2 Kreise einer dieser DB-Kreisscharen. Somit kann man 7 verschiedene 6-Ecknetze aus den DB-Kreisscharen bilden. Kegelschnitte mit 2 Brennpunkten besitzen 2 verschiedene Arten von 6-Ecknetzen.



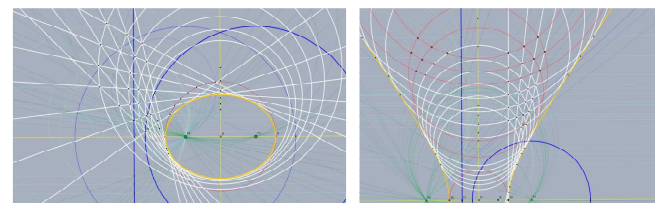
Die Drehstreckungen um zwei Pole sind kommutativ. Daher lassen sich 6-Ecknetze aus Loxodromen zu verschiedenen Winkeln "konstruieren", d.h. programmieren.



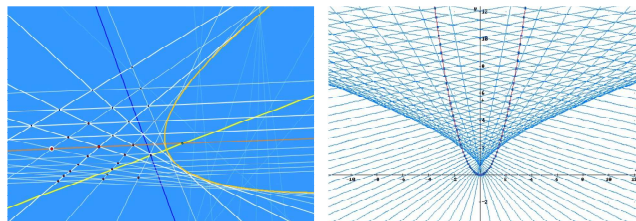
LITERATUR (dazu die Literaturliste in meiner Dissertation Freiburg 1982)

W. Blaschke, G. Bol. Geometrie der Gewebe Springer 1938
W. Wunderlich. Über ein besonderes Dreiecksnetz aus Kreisen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 147: 385 - 399, 1938
K. Lamotte. Riemannsche Flächen Springer 2004/2009

Verwendete SOFTWARE: Cinderella, Derive, Povray



Für Parabeln bilden die Tangenten und jede Parallelenschar ein 6-Ecknetz. Parallelen kann man als DB-Kreise werten, die in ∞ doppelt berühren.



Das Produkt zweier Kreise ergibt eine zerfallende bizirkuläre Quartik als Schnitt zweier Ebenen mit der Möbiusquadratik. Wegen der zusätzlichen Symmetrien gibt es mehrere Arten von 6-Ecknetzen.

