

# MATEMATICA PER IL CITTADINO

## I FRATTALI

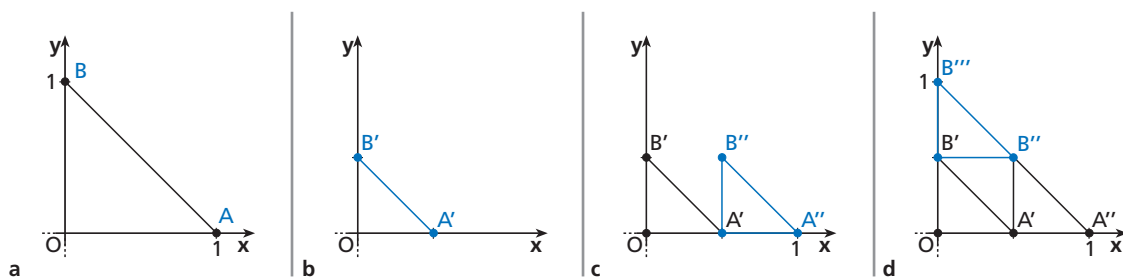
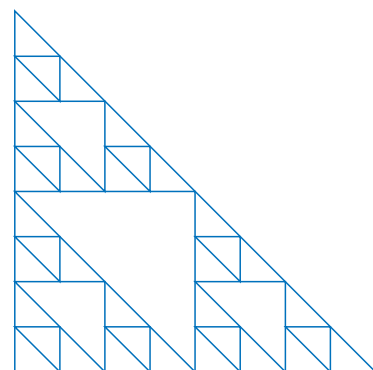
I frattali sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta. Ingrandendo un particolare di un frattale si ottiene un'immagine che ha la stessa forma della figura di origine.

La geometria frattale, attualmente diffusa anche grazie alla potenza di calcolo dei computer, sembra essere la più adatta per descrivere la complessità di molte forme della natura, come, per esempio, contorni di coste, profili di montagne, vortici atmosferici, la distribuzione di crateri lunari, ammassi di stelle e galassie, contorni di foglie, lo sviluppo di coralli, fibre nervose, vasi sanguigni ecc.

Un esempio famoso di frattale è *il triangolo di Sierpiński* che prende il nome dal matematico polacco Waclaw Sierpiński (1882-1969), che lo introdusse e ne studiò le proprietà.

Questo frattale è ottenuto attraverso diversi metodi, partendo da una figura base «piena» (superficie) e operando con ripetizione una serie di «buchi» o rimozioni. In figura puoi osservarne una versione stilizzata in segmenti, che si basa sulla manipolazione iterata di un triangolo.

Questa figura, come in generale ogni frattale, si può ottenere attraverso l'applicazione di un insieme di  $n$  trasformazioni geometriche allo stesso sottoinsieme del piano cartesiano. Ottenuti  $n$  sottoinsiemi, a ognuno di essi viene nuovamente applicata la stessa serie di trasformazioni geometriche di partenza e così via. Vediamo quali sono le trasformazioni per questo frattale. Consideriamo la seguente figura e comprendiamo meglio quanto detto.



1. Considera il triangolo  $ABO$  (figura  $a$ ). Supponi di trasformarlo nel triangolo  $A'B'O$  (figura  $b$ ) secondo l'omotetia di rapporto  $\frac{1}{2}$  e centro  $O$ . Determina le equazioni dell'omotetia e le coordinate dei punti  $A'$  e  $B'$ .
2. Osserva ora la figura  $c$ . Quale trasformazione bisogna applicare al triangolo  $ABO$  per ottenere  $A''B''A'$ ?

[A]  $\begin{cases} x' = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \\ y' = y \end{cases}$ 
[B]  $\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2} \\ y' = y + \frac{1}{2} \end{cases}$ 
[C]  $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases}$ 
[D]  $\begin{cases} x' = 1 - \frac{x}{2} \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases}$

3. Specifica il tipo di trasformazione che porta il triangolo  $ABO$  nel triangolo  $B''B'''B'$  (figura  $d$ ) e scrivi le sue equazioni.
4. Con le tre precedenti trasformazioni applicate allo stesso triangolo di partenza  $ABO$  si ottengono i tre triangoli  $A'B'O$ ,  $A''B''A'$ ,  $B''B'''B'$  (figura  $d$ ). Applica le stesse trasformazioni a ognuno di questi triangoli e disegna la figura risultante.
5. Compila una nuova iterazione sui triangoli ottenuti alla domanda precedente e rappresenta l'immagine ottenuta.