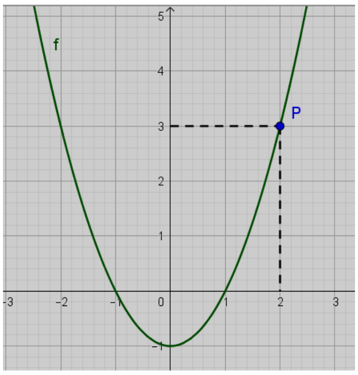
LIMITE – um caso de indeterminação.

Dada a função f(x) = $x^2 - 1$, temos que, para qualquer valor de x pertencente ao conjunto dos números reais, teremos um valor de y definido pela função f(x).

Exemplo: Se $x = 2$, teremos: $f(2) = 2^2 - 1 = 3$, ou seja, a **imagem** de $x = 2$ é $y = 3$ ou ainda $f(2) = 3$. Graficamente temos:



Considere agora uma outra função $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Note que nesse caso a função está definida para todos os valores de x pertencentes ao conjunto dos números reais, exceto para x = 1, ou seja, $x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1$. Dessa forma não é possível determinar um valor para y quando x assume o valor 1.

Observe a substituição:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$g(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

Essa escrita $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$**,** não possui explicação matemática, ou seja, é um caso chamado de ***INDETERMINAÇÃO MATEMÁTICA***. Em uma linguagem mais comum, dizemos que ***NÃO EXISTE DIVISÃO POR ZERO.***

Bom, já que não é possível realizar divisão por ***ZERO***, ou seja, no exemplo apresentado, ***x*** não pode admitir o valor 1, então vamos analisar o comportamento dessa função quando ***x*** está *muito próximo de 1*, em outras palavras o que queremos entender é:

- O que acontece com a função ***g*** quando ***x*** admite valores muito próximos de 1 *(na vizinhança)*, porém ***DIFERENTES de 1????***

Já sabemos que o estudo sobre limite de função, visa analisar o comportamento de uma dada função na vizinhança de um ponto ***(que pode ou não, estar em seu domínio)***.

No primeiro exemplo apresentado $f(x) = x^2 - 1$, qualquer valor atribuído ao x determina uma imagem única, ou seja, é possível determinar o valor do y sem problema algum. Mas, no exemplo $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ existe o ponto $x = 1$ que nos conduz para uma ***INDETERMINAÇÃO MATEMÁTICA.***

Vamos estudar a função $g(x)$ quando x assume valores próximos de 1, mas ***diferente*** de 1. Ao atribuir valores ***menores*** que 1 para x, teremos a seguinte tabela para os valores que estão à ***esquerda*** de **1. *(tabela A)***

x	*0*	*0,5*	*0,75*	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*0,9999*
g(x)	*1*	*1,5*	*1,75*	*1,9*	*1,99*	*1,999*	*1,9999*

Ao atribuir valores ***maiores*** que 1 para x, teremos a seguinte tabela para os valores que estão à ***direita*** de **1. *(tabela B)***

x	*2*	*1,5*	*1,25*	*1,1*	*1,01*	*1,001*	*1,0001*
g(x)	*3*	*2,5*	*2,25*	*2,1*	*2,01*	*2,001*	*2,0001*

OBS.: *Podemos admitir* ***x*** *cada vez mais próximo do número 1, isso irá fazer com que tenhamos* ***g(x)*** *cada vez mais próximo de* **2.**

Matematicamente dizemos que: "***o limite da função g(x) quando x se aproxima de (tende para) 1, é igual a 2".***

Em símbolos temos: $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$ ou $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Essas aproximações que fizemos nas tabelas acima, recebe um nome específico, é são chamadas de ***LIMITES LATERAIS***.

- Quando x tende a *1* por valores ***menores*** do que *1* (tabela A), dizemos que *x* tende a *1* ***pela esquerda***, e denotamos simbolicamente por:

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$ ou $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

OBS.: O sinal negativo no expoente do número 1, apenas sinaliza a ***direção***, ou seja, x aproxima de 1 pela esquerda.

- Quando x tende a *1* por valores ***maiores*** do que *1* (tabela B), dizemos que *x* tende a *1* ***pela direita***, e denotamos simbolicamente por:

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2$ ou $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

OBS.: O sinal positivo no expoente do número 1, apenas sinaliza a ***direção***, ou seja, x aproxima de 1 pela direita.

A partir do que foi apresentado acima, podemos **DEFINIR** que:

*"O limite de uma função **f(x)**, quando **"x"** se aproxima de um valor qualquer **"a"**, será igual a um valor **L**,* $\lim_{x \to a} f(x) = L$*, se e somente se, os **limites laterais** (esquerda e direita) de **"a"** forem **IGUAIS** a **L**, ou seja,* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$*, caso contrário o limite **NÃO EXISTE (∄).***

Sempre será necessário construir ***tabelas de aproximações*** para determinar o limite de uma função, caso ele exista???

Para responder essa pergunta, continuemos com o exemplo da função *g(x).*

Exemplo: Determine $\lim_{x \to 1} g(x)$, onde $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

"Já vimos que a substituição direta nos conduz à 0/0".

Então, devemos simplificar a expressão da função *g* para depois fazer a substituição direta.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = (x + 1), para\ x \neq 1.$$

Então:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Chegamos assim, a mesma conclusão da análise feita com auxílio das tabelas de aproximações, porém de forma rápida e sistemática, ou seja, utilizamos a ***FATORAÇÃO*** chamada de ***DIFERENÇA DE QUADRADOS*** para simplificar a expressão da função *g(x).*

Retorne ao simulador no topo da página (web), para visualizar graficamente o comportamento da função g(x).