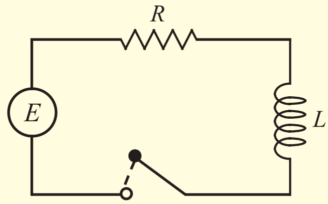
10. Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος ισχύει



$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t).$$

i) Αν $R = 12\ \Omega$, $L = 4\ H$, $E = 60\ V$,

α) να βρείτε την ένταση $I(t)$ του ρεύματος, t sec μετά το κλείσιμο του κυκλώματος.

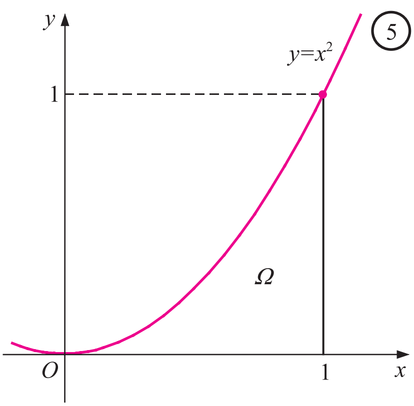
β) να βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$. Τι συμπεραίνετε;

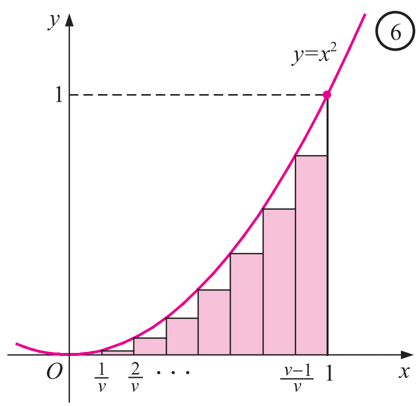
ii) Αν στο κύκλωμα αντί για μπαταρία που δίνει σταθερή ηλεκτρεγερτική δύναμη E χρησιμοποιήσουμε μια γεννήτρια που δίνει $E(t) = 60\eta\mu 3t$, να βρείτε την ένταση $I(t)$.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Εμβαδόν παραβολικού χωρίου

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ (Παραβολικό χωρίο Σχ. 5).





Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα [0,1] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία:

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{\nu},\ x_2 = \frac{2}{\nu},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ x_{\nu-1} = \frac{\nu-1}{\nu},\ x_\nu = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

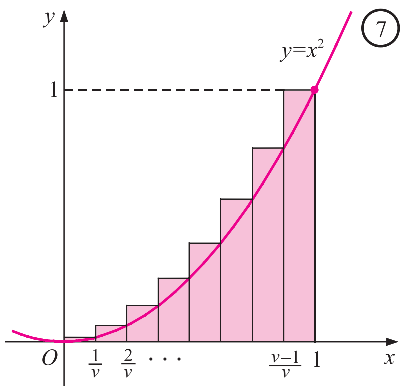
● Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\nu &= f(0)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\\ &= \frac{1}{\nu}\left[0^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{\nu^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2]\\ &= \frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}.\end{aligned}$$

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,



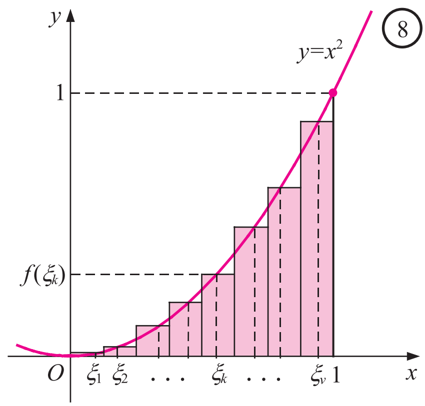
$$\begin{aligned}E_\nu &= f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu}\\ &= \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}.\end{aligned}$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν E βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν. Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu$, οπότε

$$\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu \le E \le \lim_{\nu\to\infty}E_\nu.$$

Επειδή $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty}E_\nu = \frac{1}{3}$, έχουμε $E = \frac{1}{3}$.

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$ και ύψη την τιμή της συνάρτησης σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο ξ_κ, $\kappa = 1, 2, \dots, 3, \dots, \nu$, καθενός διαστήματος, (Σχ. 8), τότε το άθροισμα



$$S_\nu = \frac{1}{\nu}f(\xi_1)+\frac{1}{\nu}f(\xi_2)+\cdots+\frac{1}{\nu}f(\xi_\nu)$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Επειδή $f(x_{\kappa-1}) \le f(\xi_\kappa) \le f(x_\kappa)$ για $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$, θα είναι

$$\frac{1}{\nu}f(x_{\kappa-1}) \le \frac{1}{\nu}f(\xi_\kappa) \le \frac{1}{\nu}f(x_\kappa),$$

οπότε θα ισχύει

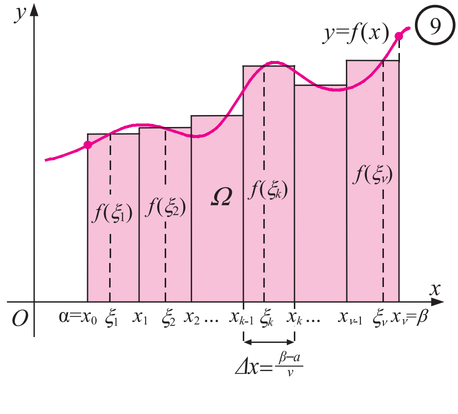
$$\varepsilon_\nu \le S_\nu \le E_\nu.$$

Είναι όμως, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty}E_\nu = E$. Άρα θα ισχύει $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_\nu = E$.

Ορισμός εμβαδού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχ. 9) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή:



● Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$.

● Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

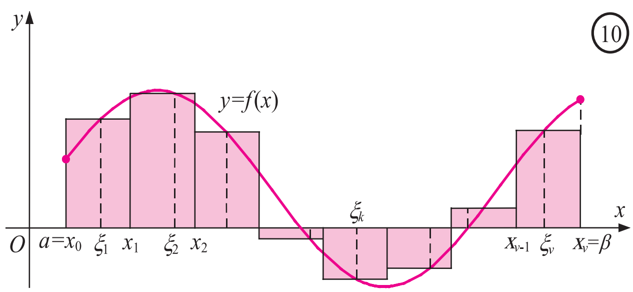
$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_\nu)]\Delta x.$$

● Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu \to \infty} S_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $\boldsymbol{E(\Omega)}$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \text{ }^{(1)}.$$

(1) Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\,\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

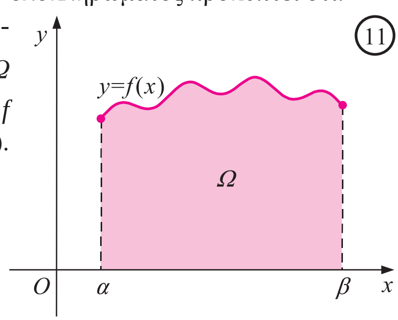
$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.
Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:
Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 11).
Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega).$$



Επομένως,

$$\text{Αν } f(x)\geq 0, \text{ τότε } \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0.$$