Trigonometria

A. *Introduzione*

La ***trigonometria*** e' una disciplina matematica piuttosto sottovalutata ai nostri giorni: Una volta,secoli fa, prima dell'avvento dei logaritmi, alcune sue formule erano usate per trasformare prodotti in somme e quindi semplificare i calcoli.
Ancora: le sue formule sono alla base di tutte le trasformazioni di rotazione e se pensi che quasi ogni movimento e' di rototraslazione, senza trigonometria non e' possibile parlare di moti rotatori e quindi di cinematica e dinamica.
Quando ho iniziato ad insegnare era compresa nel programma di quasi tutte le scuole medie superiori, oggi rimane solo al liceo scientifico ed in alcuni tecnici come disciplina ben curata.
Noi affronteremo i suoi principali argomenti distinguendo la disciplina in Goniometria, cioe' lo studio degli angoli, e Trigonometria, cioe' lo studio di triangoli.

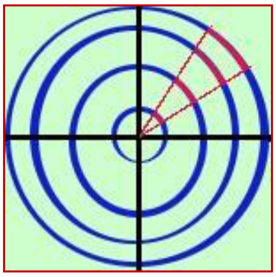
B. *Goniometria*

Scienza della misura degli angoli: deriva da un teorema che e' quasi dimenticato in geometria: Gli angoli al centro e gli archi corrispondenti sono in proporzionalita' diretta.

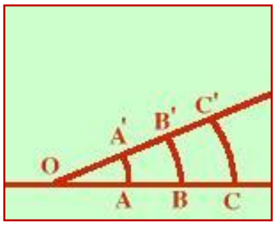
Due insiemi di enti sono in proporzionalita' diretta se ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme.

Quando in matematica due insiemi di enti sono in proporzionalita' diretta, tutte le proprieta' che valgono sul primo insieme valgono anche sul secondo; cio' significa che posso misurare gli archi in gradi oppure gli angoli in centimetri.

1. Misura di archi ed angoli



Se voglio misurare un arco di circonferenza con un angolo posso farlo in modo semplice; piu' difficile e' misurarlo in centimetri perche' a circonferenze diverse corrispondono misure lineari diverse, mentre io ho bisogno di una misura valida sempre per tutte le circonferenze.
Posso osservare che la misura sara' la stessa se prendo come riferimento il raggio della circonferenza; poiche' tutte le circonferenze sono simili se prendo come unita' di misura il raggio tutti gli archi avranno lo stesso valore.



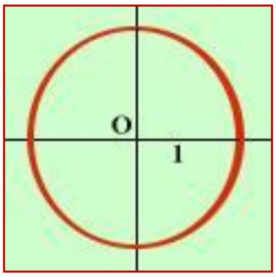
Gli archi sono: **AA'** **BB'** **CC'**

I raggi corrispondenti sono: **OA** **OB** **OC**

La misura, sempre identica, sara': $\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}$

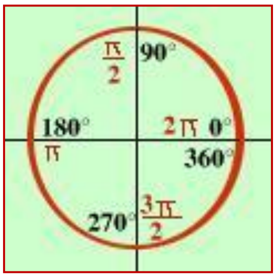
Allora tutta la circonferenza misurera' indifferentemente $360°$ oppure 2π raggi essendo la misura della circonferenza $2\pi r$.

Due pigreco (2**π**) corrisponde circa a 6,28 raggi cioe' se il raggio e' un centimetro la circonferenza sara' lunga circa 6,28 centimetri.



Siccome tutte le misure saranno fatte rispetto al raggio, potremo, per semplicita', considerare come circonferenza tipo su cui fare le formule la circonferenza di raggio 1 che sara' chiamata *Circonferenza trigonometrica.*

L'angolo corrispondente al raggio chiamato anche angolo radiante corrispondera' circa a 57° e rotti.

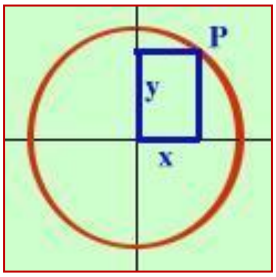


La corrispondenza fra angoli ed archi sara':

$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
90°	180°	270°	0°=360°

Oltre i 360° i punti della circonferenza tornano su se stessi; quindi diciamo che i valori sulla circonferenza sono periodici di periodo 360° come se la circonferenza fosse una spirale i cui bracci vanno esattamente sui bracci precedenti. Quindi ad esempio se hai 480° dovrai dire: 480° = 480° - 360° = 120°
cioe' tutti gli angoli dovranno essere riportati al primo giro della circonferenza: se l'angolo e' superiore a 360° dovrai togliere 360° una volta, due volte, tre volte,... finche' il risultato sia un angolo inferiore a 360°.
Ad esempio se devo considerare l'angolo di 1520°
1520° = 1520°-360° = 1160° = 1160°-360°=800°=800°-360°=440°=440° - 360°=80°
considero l'angolo di 80°.

2. Principali funzioni trigonometriche



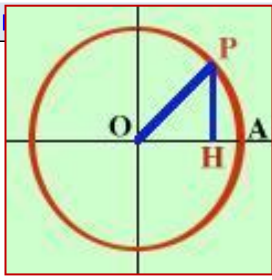
Si tratta ora di trovare il sistema di individuare un punto sulla circonferenza; il modo piu' semplice e' di fare come in geometria cartesiana individuando il punto mediante la verticale e l'orizzontale, naturalmente, perche' le misure siano valide per tutte le circonferenze faremo sempre i rapporti con il raggio.
Definiamo ora le principali funzioni trigonometriche.
Per ogni funzione sara' data la definizione, i valori sugli assi, come si disegna la funzione ed il grafico relativo.

a) Sen α

La funzione ***seno*** e' la prima e forse principale funzione che si definisce sulla circonferenza; corrisponde alla coordinata y in geometria cartesiana.

Definizione del seno di un angolo α

Il seno di α viene definito come rapporto dell'altezza PH al raggio della circonferenza:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{PH}{OP}$$

Per semplicita' d'ora in avanti considereremo la circonferenza trigonometrica(cioe' di raggio 1); quindi possiamo dire il seno di α corrisponde al segmento PH

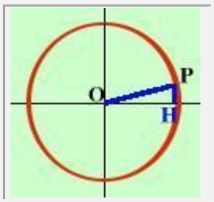
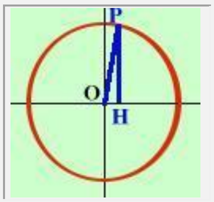
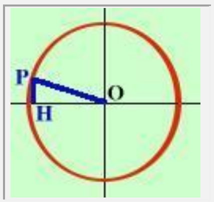
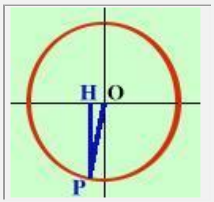
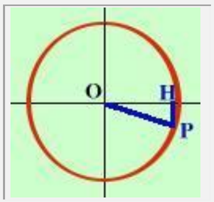
$$\text{sen}\,\alpha = PH$$

Valori di sen α:

Dobbiamo immaginare che il raggio OP parta dall'asse orizzontale e che il punto P percorra la circonferenza. Leggiamo il valore di PH in verticale.

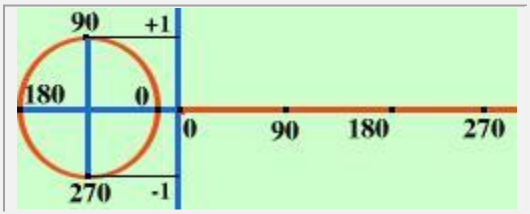
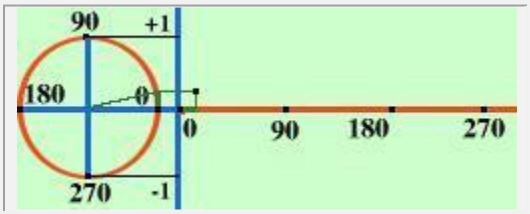
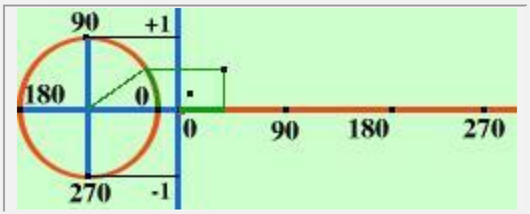
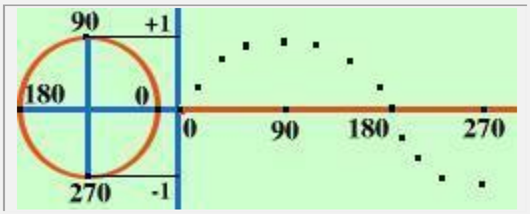
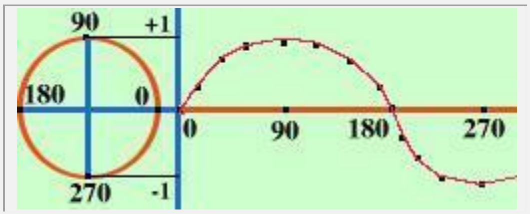
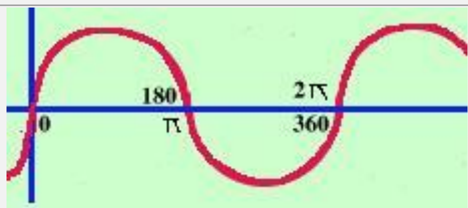
Per impararli bene sarebbe il caso di prendere un foglio ed una matita e provare a fare i grafici da solo e poi controllare se li hai fatti giusti.

Per vedere quanto vale prendiamo angoli molto vicini al valore considerato e controlliamo sul grafico il valore di PH.

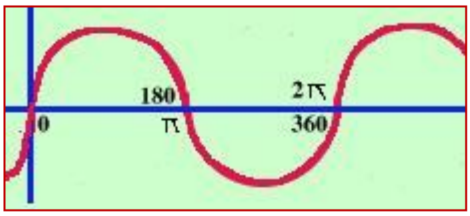
A zero gradi avremo che il seno vale zero $PH = \text{sen } 0° = 0$	
A novanta gradi avremo che il seno vale uno $PH = \text{sen } 90° = \text{sen } (\pi/2) = 1$	
A centoottanta gradi avremo che il seno vale zero $PH = \text{sen } 180° = \text{sen } \pi = 0$	
A duecentosettanta gradi avremo che il seno vale meno uno $PH = \text{sen } 270° = \text{sen } (3\pi/2) = -1$	
A trecentosessanta gradi e' come a zero gradi ed avremo che il seno vale zero $PH = \text{sen } 360° = \text{sen}0° = 0$	

Riassumendo:
il valore del seno parte da zero a 0° ed aumenta fino a raggiungere il valore 1 a 90°;
poi inizia a diminuire e a 180° vale 0;
continua a diminuire fino a 270° dove vale -1;
riprende poi a crescere e a 360° torna a zero.

Come si disegna la funzione y = sen x :

<table>
<tr><td>Dobbiamo immaginare di "srotolare" una circonferenza sull'asse delle x</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ora per ogni angolo prendiamo sulle x la lunghezza dell'arco e per le y mandiamo l'orizzontale dall'estremo dell'arco</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Aumentiamo l'angolo e facciamo lo stesso</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Facciamolo per diversi valori dell'angolo in modo da ottenere vari punti</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Congiungiamo i vari punti con una linea continua ed otteniamo il grafico della sinusoide</td><td>
</td></tr>
<tr><td>y = sen x</td><td>
</td></tr>
</table>

Caratteristiche della funzione y = sen x :

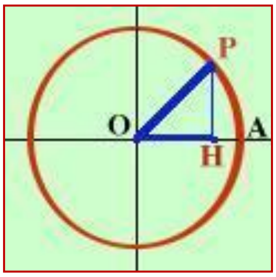


Vediamo nei particolari le caratteristiche della sinusoide:

- La funzione nell'origine vale 0
- e' una funzione limitata: tutti i valori della funzione sono compresi nella striscia orizzontale di piano compresa tra -1 ed 1
- La funzione e' periodica di periodo 2π
  cioe' dopo un intervallo lungo 2π si ripete

b) Cos α

La funzione ***coseno*** corrisponde alla coordinata x del punto sulla circonferenza in geometria cartesiana.



Definizione del coseno di un angolo α

Il coseno di α viene definito come rapporto dell'orizzontale OH al raggio della circonferenza:

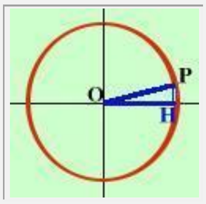
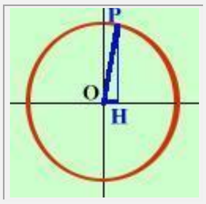
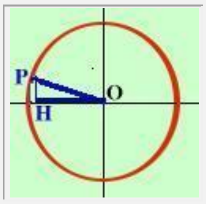
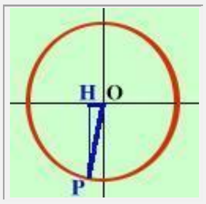
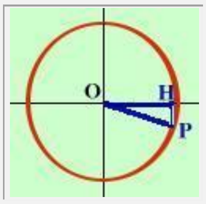
$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP}$$

Per semplicita' consideriamo la circonferenza trigonometrica (cioe' di raggio 1) quindi possiamo dire il coseno di alfa corrisponde al segmento OH:

$$\cos \alpha = OH$$

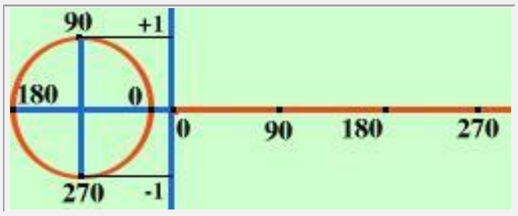
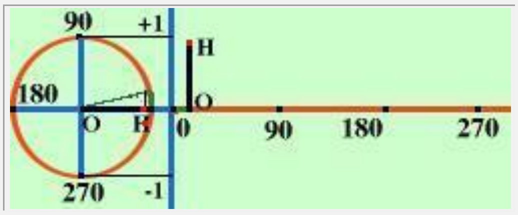
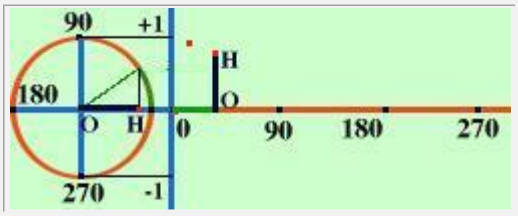
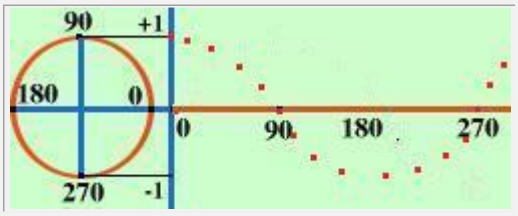
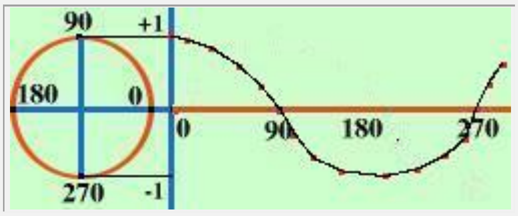
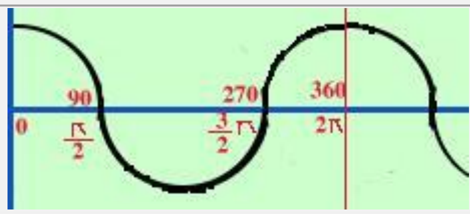
Valori di cos α

Dobbiamo immaginare che il raggio OP parta dall'orizzontale OA e che il punto P percorra la circonferenza.
Leggiamo il valore del segmento OH sull'asse orizzontale.
Per vedere quanto vale prendiamo angoli molto vicini al valore considerato e controlliamo sul grafico il valore di OH.

A zero gradi avremo che il coseno vale uno $OH = \cos 0° = 1$	
A novanta gradi avremo che il coseno vale zero $OH = \cos 90° = \cos (\pi/2) = 0$	
A centottanta gradi avremo che il coseno vale meno uno $OH = \cos 180° = \cos \pi = -1$	
A duecentosettanta gradi avremo che il coseno vale zero $OH = \cos 270° = \cos (3\pi/2) = 0$	
A trecentosessanta gradi e' come a zero gradi ed avremo che il coseno vale uno $OH = \cos 360° = \cos 0° = 1$	

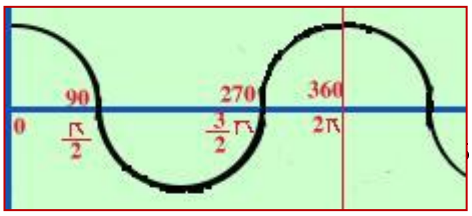
Riassumendo:
il valore del coseno parte dal valore 1 a 0° ;
diminuisce fino a raggiungere il valore 0 a 90°;
poi continua a diminuire e a 180° vale -1;
cresce poi fino a 270° dove vale 0;
continua poi a crescere e a 360° torna a 1.

Come si disegna la funzione y = cos x:

Dobbiamo immaginare di "srotolare" una circonferenza sull'asse delle x	
Ora per ogni angolo prendiamo sulle x la lunghezza dell'arco e per le y prendiamo l'orizzontale OH, la mettiamo in verticale e la riportiamo sul grafico per la y	
Aumentiamo l'angolo e facciamo lo stesso	
Facciamolo per diversi valori dell'angolo in modo da ottenere vari punti	
Congiungiamo i vari punti con una linea continua ed otteniamo il grafico della cosinusoide	
$y = \cos x$	

Caratteristiche della funzione y = cos x :

Vediamo nei particolari le caratteristiche della cosinusoide:

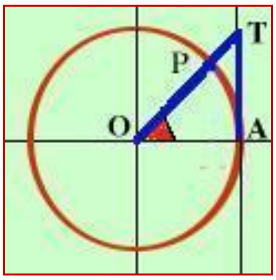


- La funzione nell'origine vale 1

- e' una funzione limitata: tutti i valori della funzione sono compresi nella striscia orizzontale di piano compresa tra -1 ed 1
- La funzione e' periodica di periodo 2π
  cioe' dopo un intervallo lungo 2π si ripete

c) Tang α

Definizione della tangente di un angolo α



La tangente di α viene definita come rapporto del segmento di tangente in A alla circonferenza intercettato dal prolungamento del raggio OP con il raggio OA della circonferenza.

Vuol dire che mando la tangente da A alla circonferenza e contemporaneamente prolungo il raggio OP finche' si incontrano in T. Considero poi il rapporto fra AT ed il raggio.

$$tg\alpha = \frac{AT}{OA}$$

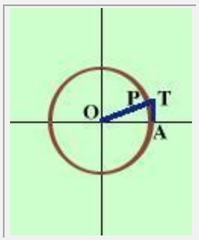
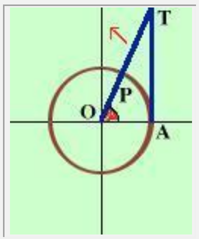
Per semplicita' consideriamo la circonferenza trigonometrica (cioe' di raggio 1) quindi possiamo dire che la tangente di alfa corrisponde al segmento AT:

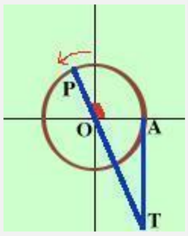
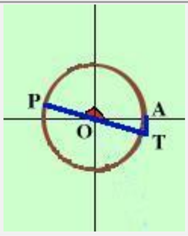
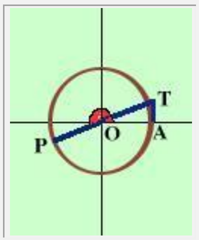
$$tg\ \alpha = AT$$

Valori di tg α:

Dobbiamo immaginare che il raggio OP parta dall'orizzontale OA e che il punto P percorra la circonferenza.
Leggiamo il valore del segmento AT sulla verticale.

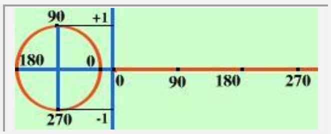
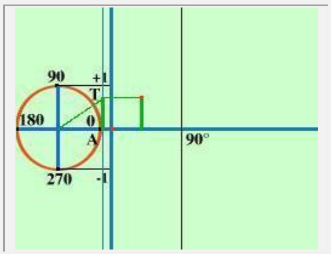
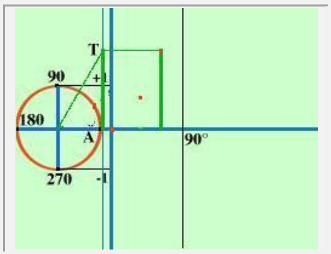
Per vedere quanto vale prendiamo angoli molto vicini al valore considerato e controlliamo sul grafico il valore di OH .

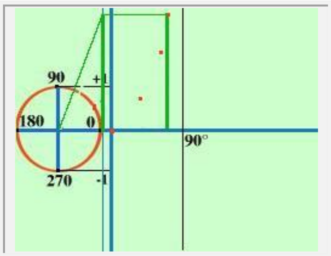
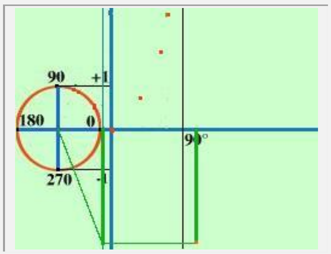
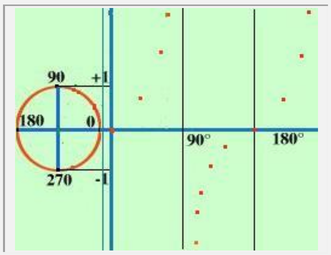
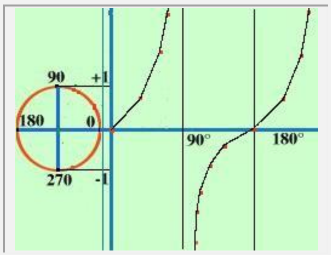
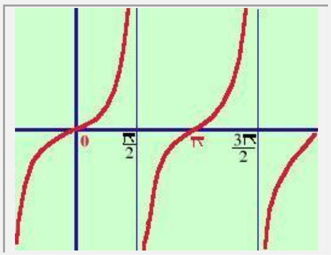
A zero gradi avremo che la tangente vale 0 $AT = tg\ 0° = 0$	
Avvicinandoci a novanta gradi avremo che la tangente cresce e a 90° gradi sparisce diventando piu' infinito $AT = tg\ 90°+ = tg\ (\pi/2) = +oo$ + significa che mi avvicino a 90° per valori positivi	

Oltre novanta gradi la tangente ricompare da meno infinito e comincia a diminuire come lunghezza del segmento cioe' ad aumentare in valore $AT = tg\ 90°- = tg\ (\pi/2) = \mathbf{-oo}$ - significa che mi allontano da 90° con valori negativi Notare che il raggio, dopo 90° si prolunga dall'altra parte	
A centoottanta gradi avremo che la tangente vale zero $AT = tg\ 180° = tg\ \pi = 0$	
Oltre 180° la tangente ricomincia da capo: e' positiva e cresce riprendendo i valori visti all'inizio	

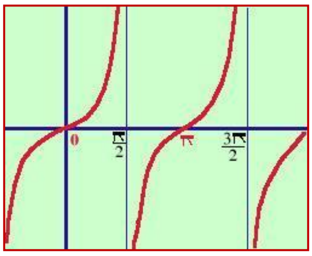
Riassumendo:
il valore della tangente parte dal valore 0 a 0°;
aumenta fino a raggiungere il valore +**oo** a 90° ove sparisce;
appena oltre 90° ricompare da -**oo** e aumenta il suo valore finche' a 180° vale 0;
oltre 180° ricomincia da capo;
Quindi diremo che e' periodica di periodo 180°.

<u>**Come si disegna la funzione y = tg x :**</u>

Dobbiamo immaginare di "srotolare" una circonferenza sull'asse delle x	
Ora per ogni angolo prendiamo sulle x la lunghezza dell'arco e per le y prendiamo la verticale AT e la riportiamo sul grafico per la y	
Aumentiamo l'angolo e facciamo lo stesso	

Facciamolo per diversi valori dell'angolo in modo da ottenere vari punti	
Oltre 90° la tangente ricompare da sotto	
Otteniamo un insieme di punti	
Congiungiamo i vari punti con una linea continua ed otteniamo il grafico della tangentoide	
$y = \text{tg } x$	

[Caratteristiche della funzione $y = \text{tg } x$](#):



Vediamo nei particolari le caratteristiche della tangentoide:

- La funzione nell'origine vale 0
- E' una funzione sempre crescente
- nei punti multipli dispari di $\pi/2$ (cioe' $\pm\pi/2$; $\pm3\pi/2$; $\pm5\pi/2$; .....) la funzione e' illimitata

- La funzione e' periodica di periodo π
  cioe' dopo un intervallo lungo π la funzione assume gli stessi valori.

d) Reciproche delle funzioni goniometriche

Attenzione a non confondere le reciproche delle funzioni trigonometriche con le funzioni inverse: sono due cose completamente diverse; se hai bisogno di approfondire leggi quanto segue.

Si definisce ***reciproca di una funzione*** la funzione che moltiplicata con quella di partenza da' come risultato 1

Esempio: Data la funzione:

$y = e^x$

la reciproca della funzione e':

$y = \frac{1}{e^x}$

Invece la ***funzione inversa*** di una funzione data e' quella che si ottiene scambiando fra loro dominio e codominio (in pratica scambiando la x con la y).

Esempio: data la funzione

$y = e^x$

la funzione inversa e':

$y = \log x$

Ecco i calcoli:

Data la funzione:

$y = e^x$

voglio calcolarne la funzione inversa; scambio la x con la y:

$x = e^y$

Devo esplicitare la y (cioe' metterla da sola prima dell'uguale); prima sposto il termine con la y prima dell'uguale

Posso fare in due modi: o sposto i termini e poi li cambio di segno oppure faccio riferimento al fatto che ogni uguaglianza gode della proprieta' simmetrica: cioe' puo' sempre essere letta sia da destra che da sinistra (senza riferimenti politici)

$e^y = x$

Per togliere l'esponenziale devo applicare il logaritmo in base e; lo applico sia prima che dopo l'uguale, in questo modo l'uguaglianza resta valida

$\log e^y = \log x$

$\log e^y$ *significa il numero che devo dare come esponente alla base* e *per ottenere* e^y *e quindi vale* y*:*

$y = \log x$

Come volevamo.

Matematicamente la definizione e':

una funzione e' inversa di un'altra se la funzione composta vale x :

$f(x)$ e' inversa di $g(x)$ se $f[g(x)] = x$

cioe':

$\log (e^x) = x$

od anche:

$e^{\log x} = x$

Le funzioni inverse delle funzioni trigonometriche sono:

- di $y = \text{sen} x$ e' $y = \text{arcsen } x$
- di $y = \cos x$ e' $y = \text{arccos } x$
- di $y = \text{tang } x$ e' $y = \text{arcotang } x$

Verranno usate esclusivamente nella soluzione delle equazioni trigonometriche fondamentali quando il valore dell'angolo non e' nella tabella dei valori trigonometrici:

$\text{sen } x = h$

$\cos x = m$

$\text{tang } x = p$

Sono funzioni simili a quelle gia' viste , solo che sono le loro reciproche e si ottengono prendendo come base l'asse delle y invece che l'asse delle x.

In prima stesura considereremo tali funzioni solamente come reciproche delle funzioni elementari; successivamente vedremo che e' possibile dare loro una definizione autonoma:

a. cotang α
b. cosec α
c. sec α

---

(1) Cotang α

Anche se la cotangente e' la reciproca della tangente ne parliamo per prima perche' e' di gran lunga la piu' usata delle funzioni reciproche (chiamarle inverse e' un uso ma e' anche un'imprecisione).
Definiamo:

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tang}\alpha}$$

La maniera piu' semplice per trattarla e'sostituire a cotangente ogni volta che la troveremo il valore 1 fratto tangente.

(2) Cosec α

La cosecante e' la reciproca del seno.
Definiamo:

$$\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

La maniera piu' semplice per trattarla e'sostituire a cosecante ogni volta che la troveremo il valore 1 fratto seno.

(3) Sec α

La secante e' la funzione reciproca del coseno.
Definiamo:

$$\text{sec}\alpha = \frac{1}{\text{cos}\alpha}$$

La maniera piu' semplice per trattarla e'sostituire a secante, ogni volta che la troveremo, il valore 1 fratto coseno.

3. Relazioni fra le funzioni trigonometriche

Vediamo ora se e'possibile trovare delle relazioni fra seno, coseno e tangente che ci permettano di passare da una funzione all'altra, cioe' di trasformare il seno in coseno, il coseno in tangente, eccetera ....

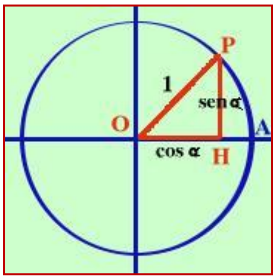
Questa parte e' fondamentale per potere poi risolvere equazioni e calcolare espressioni, quindi ti conviene studiarla molto bene

---

a) Prima relazione fondamentale

Lega fra loro il seno ed il coseno permettendo di trasformare l'uno nell'altro.

Consideriamo una circonferenza trigonometrica (cioe' di raggio 1) e su di essa prendiamo un punto P cui corrisponda l'angolo α.



Il seno, il coseno ed il raggio formano un triangolo rettangolo, quindi, per essi, vale il Teorema di Pitagora:

$$(\mathrm{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

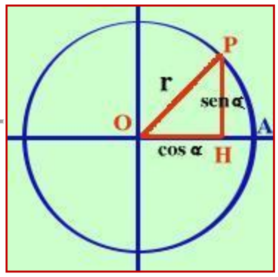
E' preferibile scrivere:

$$\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$$

$\mathrm{sen}^2\,\alpha$ e' la scrittura abbreviata di $(\mathrm{sen}\alpha)^2$

Attenzione! Un errore abbastanza comune e' quello di confondere $\mathrm{sen}^2\alpha$ *con* $\mathrm{sen}\,\alpha^2$ *sono due cose del tutto diverse;*

- *il primo e' il quadrato del seno dell'angolo*
- *per il secondo devi prima fare il quadrato dell'angolo e poi calcolarne il seno*



La relazione che abbiamo dimostrato per la circonferenza trigonometrica e' comunque valida per tutte le circonferenze; leggi di seguito la dimostrazione:

Dimostriamo che la prima formula fondamentale e' valida per tutte le circonferenze.
Consideriamo una circonferenza qualunque di raggio r e su di essa prendiamo un punto P cui corrisponda l'angolo alfa.
I segmenti OH HP OP formano un triangolo rettangolo, quindi, per essi, vale il Teorema di Pitagora
$OH^2 + HP^2 = OP^2$
E' un'uguaglianza, per la seconda regola di equivalenza delle uguaglianze (che poi e' il secondo principio di equivalenza delle equazioni) posso dividere tutti i termini per una stessa espressione diversa da zero: allora divido tutto per OP^2 *:*

$$\frac{OH^2}{OP^2} + \frac{HP^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$$

Ricordando che:
OH/OP e' la definizione di coseno
HP/OP e' la definizione di seno
Ottengo:
$(\cos\alpha)^2 + (\mathrm{sen}\alpha)^2 = 1$

Ricaviamo dalla formula trovata le formule per ricavare il seno ed il coseno:

$$\mathrm{sen}\alpha = \pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{(1-\mathrm{sen}^2\alpha)}$$

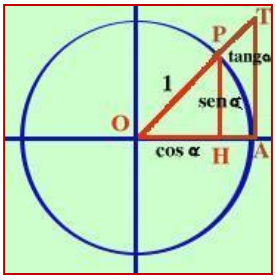
scegliendo il piu' od il meno a seconda del quadrante in cui si trova l'angolo,
il *seno* e' positivo nel primo e nel secondo quadrante, negativo nel terzo e nel quarto;
il *coseno* e' positivo nel primo e nel quarto quadrante,negativo nel secondo e nel terzo.

Se non ti piacciono i radicali non ti preoccupare troppo: di solito vengono usati per trasformare termini che sono al quadrato e quindi va via la radice.

b) Seconda relazione fondamentale

E' una relazione fra il seno ed il coseno con la tangente.

Consideriamo una circonferenza trigonometrica (cioe' di raggio 1) e su di essa prendiamo un punto P cui corrisponda l'angolo α.
Consideriamo la tangente corrispondente AT.
I triangoli OAT ed OHP sono simili per il primo criterio di similitudine (2 angoli uguali: uno in comune e l'altro retto) quindi posso scrivere la proporzione:



AT : PH = AO : OH
Prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi:
AT · OH = PH · AO
Sostituisco i valori:
$\text{tang}\alpha \cdot \cos\alpha = \text{sen}\alpha \cdot 1$
e ricavando la tangente ho la seconda relazione fondamentale :

$$\text{tang}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

c) Relazioni fra seno, coseno e tangente

Tramite le relazioni fondamentali e' possibile trasformare una qualunque espressione in seno, coseno e tangente o tutta in seno, o tutta in coseno o tutta in tangente.
Qui di seguito hai una tabella di trasformazione, puoi ottenere le varie dimostrazioni

Funzioni trasformate		Funzioni da trasformare		
		sen α	cos α	tang α
	sen α	sen α	$\pm\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha}$ (Nota 1)	$\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{(1-\text{sen}^2\alpha}}$ (Nota 2)
	cos α	$\pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha}$ (Nota 3)	cos α	$\dfrac{\pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ (Nota 4)
	tang α	$\dfrac{\text{tang}\,\alpha}{\pm\sqrt{(1+\text{tang}^2\alpha}}$ (Nota 5)	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{(1+\text{tang}^2\alpha}}$ (Nota 6)	tang α

Nota 1 – **Trasformazione: $\cos\alpha \to \text{sen}\alpha$**
Partiamo dalla prima relazione fondamentale:
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$
Dovendo trasformare il coseno in seno ricavo il coseno:
$\cos^2\,\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$
Per ricavare il valore del coseno applico la radice a destra ed a sinistra dell'uguale:

$\sqrt{\cos^2 \alpha} = \pm\sqrt{(1 - \text{sen}^2\alpha)}$
Elimino la radice con il quadrato prima dell'uguale:
$\cos \alpha = \pm\sqrt{(1 - \text{sen}^2\alpha)}$

Nota 2 – **Trasformazione: tangα→senα**
Partiamo dalla seconda relazione fondamentale:
$\text{tang}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
Per la prima relazione fondamentale so che:
$\cos \alpha = \pm\sqrt{(1 - \text{sen}^2\alpha)}$
Sostituisco il valore ed ottengo:
$\text{tang}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\pm\sqrt{(1 - \text{sen}^2\alpha)}}$

Nota 3 – **Trasformazione: senα→cosα**
Partiamo dalla prima relazione fondamentale:
$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
Dovendo trasformare il seno in coseno ricavo il seno:
$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
Per ricavare il valore del seno applico la radice a destra ed a sinistra dell'uguale:
$\sqrt{\text{sen}^2 \alpha} = \pm\sqrt{(1 - \cos^2\alpha)}$
Elimino la radice con il quadrato prima dell'uguale:
$\text{sen } \alpha = \pm\sqrt{(1 - \cos^2\alpha)}$

Nota 4 – **Trasformazione: tangα→cosα**
Partiamo dalla seconda relazione fondamentale:
$\text{tang}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
Per la prima relazione fondamentale so che:
$\text{sen } \alpha = \pm\sqrt{(1 - \cos^2\alpha)}$
Sostituisco il valore ed ottengo:
$\text{tang}\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{(1 - \cos^2\alpha)}}{\cos\alpha}$

Nota 5 – **Trasformazione: senα→tangα**
Partiamo dalla seconda relazione fondamentale:
$\text{tang}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
Elevo tutto al quadrato:
$\text{tang}^2\alpha = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$
Per la prima relazione fondamentale so che:
$\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$
sostituendo ottengo:
$\text{tang}^2\alpha = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1 - \text{sen}^2\alpha}$
Faccio il minimo comune multiplo:
$\text{tang}^2\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha$
Calcolo:
$\text{tang}^2\alpha - \text{tang}^2\alpha\ \text{sen}^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$
Devo risolvere rispetto al seno:
$- \text{sen}^2\alpha - \text{tang}^2\alpha\ \text{sen}^2\alpha = - \text{tang}^2\alpha$
Cambio segno:
$\text{sen}^2\alpha + \text{tang}^2\alpha\ \text{sen}^2\alpha = \text{tang}^2\alpha$
Esplicito il seno:
$\text{sen}^2\alpha(1 + \text{tang}^2\alpha) = \text{tang}^2\alpha$
Ricavo il seno:
$\text{sen}^2\alpha = \dfrac{\text{tang}^2\alpha}{1 + \text{tang}^2\alpha}$
Applico la radice ed ottengo la formula finale:
$\text{sen}\alpha = \dfrac{\text{tang}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha}}$

Nota 6 – **Trasformazione: cosα→tangα**
Partiamo dalla seconda relazione fondamentale:

$\text{tang}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Elevo tutto al quadrato:

$\text{tang}^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

Per la prima relazione fondamentale so che

$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\,\alpha$

sostituendo ottengo:

$\text{tang}^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

Faccio il minimo comune multiplo

$\text{tang}^2\alpha\,\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

Devo risolvere rispetto al coseno:

$\cos^2\alpha + \text{tang}^2\alpha\,\cos^2\alpha = 1$

Esplicito il coseno:

$\cos^2\alpha\,(1 + \text{tang}^2\alpha) = 1$

Ricavo il coseno:

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \text{tang}^2\alpha}$

Applico la radice ed ottengo la formula finale:

$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha}}$

d) Estensione alle funzioni reciproche

Attenzione: queste sono le reciproche delle funzioni fondamentali (cioe' 1 fratto la funzione) quindi e' diverso dal dire funzioni inverse delle fondamentali (che saranno arcoseno, arcocoseno ed arcotangente).

E' possibile estendere la tabella precedente alle reciproche delle funzioni, possibile ma non economico.
E' preferibile, in presenza della reciproca di una funzione (cosecante, secante, cotangente), traformarla in una delle funzioni pricipali (seno, coseno, tangente) e quindi applicare la tabella della pagina precedente.

Esempio: calcolare il valore dell'espressione:

$\text{cotg}^2\,\alpha - \text{cosec}^2\,\alpha =$

Cotangente e' la reciproca della tangente quindi e' coseno fratto seno.
Cosecante e' la reciproca del seno:

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} - \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} =$$

Trasformo il coseno in seno (essendo al quadrato posso eliminare la radice):

$$= \frac{1 - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} - \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} =$$

minimo comune multiplo $\text{sen}^2\,\alpha$:

$$= \frac{1 - \text{sen}^2\alpha - 1}{\text{sen}^2\alpha} =$$

Attenzione! il denominatore non sparisce perche' non e' un'equazione ma e' un'espressione (l'errore indicato e' purtroppo molto comune):

$$= \frac{-\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = -1$$

4. Archi associati

La circonferenza e' "*tonda*", quindi il valore del seno e del coseno si ripeteranno e scambieranno all'interno di essa in maniera tale da permetterci, talvolta, di sostituire ad un seno un coseno o viceversa.

E' possibile ridurre tutti i valori del seno, coseno e tangente sulla circonferenza al primo quadrante (cioe' ai primi 90°).
E' addirittura possibile ridurre tutti i valori del seno e coseno al primo ottante (cioe' l'arco fra 0° e 45°), infatti se prendi un manuale di tavole trigonometriche vedi che considera, da un lato, solo gli angoli da 0° a 45°, mentre se vuoi i valori da 45° a 90° devi rovesciare(fisicamente) il manuale.

Si tratta ora di vedere come fare: agiremo diversamente a seconda del quadrante in cui si trova l'angolo:

- angolo nel primo quadrante
- angolo nel secondo quadrante
- angolo nel terzo quadrante
- angolo nel quarto quadrante

Prima di continuare un consiglio: questa parte non e' assolutamente da "ricordare a memoria": una volta capito il metodo, prendi invece un foglio ed una penna, traccia il cerchio trigonometrico e ricava i valori corrispondenti di seno e coseno.

Nelle pagine seguenti indicheremo i valori degli angoli in gradi invece che in radianti.
Cosi' diremo 180° invece di dire π radianti.
Se il tuo professore usa i radianti trasforma le formule tu stesso sostituendo:

$\pi/2$ a 90°

π a 180°

$3\pi/2$ a 270°

2π a 360°

Ricorda inoltre che vale sempre la proporzione:

$$(\text{Angolo in gradi}) : (\text{Angolo in radianti}) = 180° : \pi$$

Esempi:

1° caso: da gradi a radianti

Supponiamo di avere un angolo di 30° Voglio trasformarlo in radianti x:

$30°: x = 180°:\pi$

Prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi:

$x \cdot 180° = 30° \cdot \pi$

Calcolo:

$$x = \frac{30^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

Semplifico:

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Un angolo di 30° corrisponde a $\pi/6$

2° caso: da radianti a gradi

Supponiamo di avere un angolo di $5\pi/6$radianti. Voglio trasformarlo in gradi x:

$x: 5\pi/6 = 180°:\pi$

Prodotto degli estremi uguale al prodotto dei medi(siccome cerco la x e x e' un estremo faccio prima il prodotto degli estremi cosi' la x e' prima dell'uguale):

$$x \cdot \pi = \frac{5\pi}{6} \cdot 180^\circ$$

Al secondo membro semplifico e moltiplico:

$x \cdot \pi = 150° \cdot \pi$

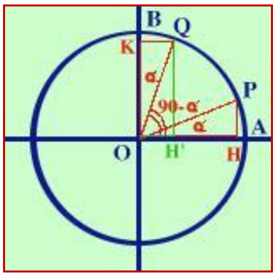
Ricavo x:

$$x = \frac{150^{\circ} \cdot \pi}{\pi}$$

$x = 150°$

Un angolo di $5\pi/6$ corrisponde a $150°$

a) Angolo nel primo quadrante (angoli complementari)



Consideriamo nel primo quadrante l'angolo α ed anche l'angolo (90° - α).
L'angolo che resta tra (90° - α) e l'asse verticale vale anche lui α.
Se io considero come origine degli archi B, ho che il triangolo OQK e' il triangolo con lati il seno ed il coseno.
Se io considero come origine degli archi A, ho che il triangolo OPH e' il triangolo con lati il seno ed il coseno.
Essendo gli angoli (α) uguali i due triangoli saranno uguali.
Se considero l'angolo (90° - α) il triangolo con lati il suo seno ed il suo coseno sara' OQH' ed e' uguale ai precedenti.
Quindi osservando l'uguaglianza dei lati posso scrivere:

QH' = OH cioe' sen(90° - α) = cos α

OH' = PH cioe' cos(90° - α) = sen α

Cioe':

Due angoli complementari (la cui somma e' 90°) scambiano fra loro il seno ed il coseno

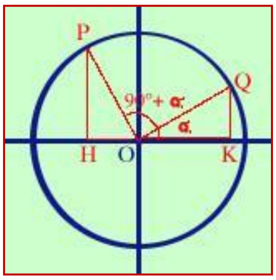
---

Applicando la seconda relazione fondamentale avrai poi che:

tang(90° - α) = cotg α

cotg(90° - α) = tang α

b) Angolo nel secondo quadrante



Quando l'angolo si trova nel secondo quadrante puo' essere pensato in due modi diversi: o come $90° + \alpha$ o come $180° - \alpha$.
Un angolo di 120° puo' essere pensato come 90° + 30° oppure 180° - 60°.
Il secondo metodo e' il piu' usato, ma anche l'altro puo' essere utile

- 90° + α

Se il punto P corrisponde all'angolo 90° + α allora il punto Q corrispondera' all'angolo α.
I triangoli PHO e QKO sono uguali: avro':

PH = OK cioe' sen(90° +α) = cos α

OH = QK cioe' cos(90° +α) = -sen α

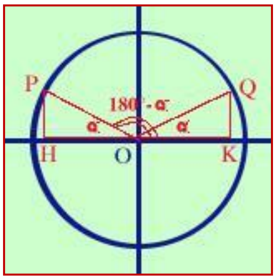
Nella seconda c'e' il segno cambiato perche' le due espressioni hanno segno opposto (il coseno OH nel secondo quadrante e' negativo mentre il seno QK nel primo quadrante e' positivo).

Ricordando la seconda relazione fondamentale avremo:

tang(90° + α) = - cotgα ecco i calcoli: $tang(90^{\circ} + \alpha) = \frac{sen(90^{\circ}+\alpha)}{\cos(90^{\circ}+\alpha)} = \frac{cos\alpha}{-sen\alpha} = -cotg\alpha$

cotg(90° + α) = - tangα ecco i calcoli: $cotg(90^{\circ} + \alpha) = \frac{cos(90^{\circ}+\alpha)}{sen(90^{\circ}+\alpha)} = \frac{-sen\alpha}{cos\alpha} = -tang\alpha$

- 180° - α



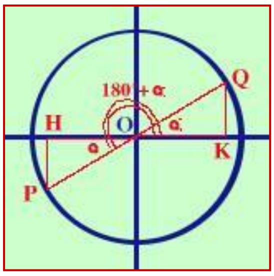
Se il punto P corrisponde all'angolo 180° - α allora il punto Q corrispondera' all'angolo α.
I triangoli PHO e QKO sono uguali; avro':
PH = QK cioe' sen(180° - α) = sen α
OH = OK cioe' cos(180° - α) = - cos α
Nella seconda c'e' il segno cambiato perche' le due espressioni hanno segno opposto (il coseno OH nel secondo quadrante e' negativo mentre il coseno OK nel primo quadrante e' positivo).
Domanda di Pierino
"Perche' cos(180-α) che e' negativo ha segno piu' mentre cos α che e' positivo ha segno meno?"
Risposta:
"Il segno meno non ha niente a che fare con il segno dell'espressione: indica solo che la seconda e' di segno contrario alla prima"

Ricordando la seconda relazione fondamentale avremo anche:
tang (180° - α) = - tang α   ecco i calcoli: $tang(180^\circ - \alpha) = \frac{sen(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = \frac{sen\alpha}{-cos\alpha} = -tang\alpha$

c) Angolo nel terzo quadrante

Quando l'angolo si trova nel terzo quadrante puo' essere pensato in due modi diversi: o come 180° + α o come 270° - α
Un angolo di 210° puo' essere pensato come 180° + 30° oppure 270° - 60°
Il primo metodo e' il piu' usato, ma anche l'altro puo' essere utile.

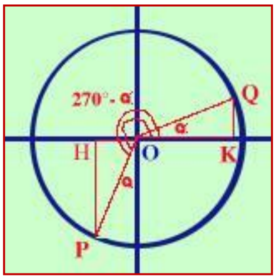
- 180° + α



Se il punto P corrisponde all'angolo 180° + α allora il punto Q corrispondera' all'angolo α.
I triangoli PHO e QKO sono uguali; avro':
PH = QK cioe' sen(180° + α) = - sen α
OH = OK cioe' cos(180° + α) = - cos α

Ricordando la seconda relazione fondamentale avremo anche:
tang(180° + α) = tang α in concordanza col fatto che la tangente e' periodica di periodo 180°

- 270° - α



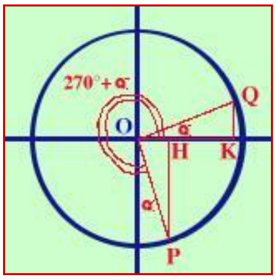
Se il punto P corrisponde all'angolo 270° - αallora il punto Q corrispondera' all'angolo α.
I triangoli PHO e QKO sono uguali; avro':
PH = OK cioe' sen(270° - α) = - cos α
OH = QK cioe' cos(270° - α) = - sen α

Ricordando la seconda relazione fondamentale avremo:
tang(270° - α) = cotgα   ecco i calcoli: $tang(270^\circ - \alpha) = \frac{sen(270^\circ-\alpha)}{\cos(270^\circ-\alpha)} = \frac{-cos\alpha}{-sen\alpha} = cotg\alpha$

cotg(270° - α) = tangα   ecco i calcoli: $cotg(270^\circ - \alpha) = \frac{cos(270^\circ-\alpha)}{\mathrm{sen}(270^\circ-\alpha)} = \frac{-sen\alpha}{-cos\alpha} = tang\alpha$

d) Angolo nel quarto quadrante

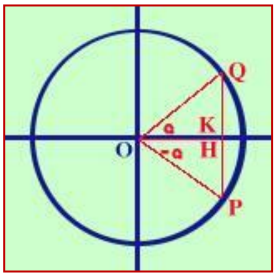
Quando l'angolo si trova nel quarto quadrante puo' essere pensato in due modi diversi: o come $270° + \alpha$ o come $360° - \alpha$, e quindi, essendovi la periodicita' di 360°, come angolo $-\alpha$.
Un angolo di 300° puo' essere pensato come 270° + 30° oppure 360° - 60°, cioe' – 60.
L'ultimo metodo e' il piu' usato, ma anche l'altro puo' essere utile.



- $270° + \alpha$

Se il punto P corrisponde all'angolo $270° + \alpha$ allora il punto Q corrispondera' all'angolo α.
I triangoli PHO e QKO sono uguali; avro':
PH = OK cioe' $\text{sen}(270° + \alpha) = -\cos\alpha$
OH = QK cioe' $\cos(270° + \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

Ricordando la seconda relazione fondamentale avremo:
$\text{tang}(270° + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$
$\text{cotg}(270° + \alpha) = -\text{tang}\,\alpha$



- $360° - \alpha = -\alpha$

Se il punto P corrisponde all'angolo $360° - \alpha$ allora il punto Q corrispondera' all'angolo α.
I triangoli PHO e QKO sono uguali; avro':
PH = QK cioe':
$\text{sen}(360° - \alpha) = \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
OH = OK cioe'
$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
Negli angoli opposti il coseno resta uguale mentre il seno cambia di segno.

Ricordando la seconda relazione fondamentale avremo anche:
$\text{tang}(360° - \alpha) = -\text{tang}\,\alpha$

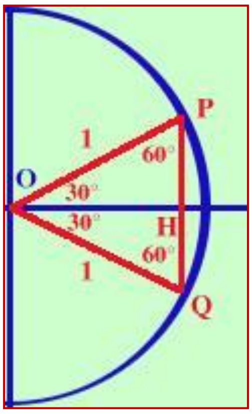
5. Valori per alcuni angoli particolari

Calcoleremo ora i valori di seno e coseno per alcuni angoli particolari:

- angolo di 30°
- angolo di 45°
- angolo di 60°
- angolo di 18°
- angolo di 72°
- tabella riassuntiva

Ho messo come ultimi gli angoli di 18° e 72° perche' talvolta si preferisce tralasciarli.

a) Angolo di 30° (π/6)



Consideriamo l'angolo di 30 gradi: se lo ribalto attorno all'asse delle x ottengo un angolo di 60 gradi ed il triangolo OPQ e' equilatero ha un angolo di 60° e gli altri due uguali perche' avendo per lati due raggi e' isoscele.
Essendo il lato PQ del triangolo uguale ad 1 (cerchio trigonometrico) PH = sen 30° che e' meta' lato sara' 1/2, quindi:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$$

Per trovare il coseno dobbiamo trovare OH, allora applico il Teorema di Pitagora al triangolo OHP (Nota: Ricordati che non sta bene dire "Applico Pitagora": Pitagora non e' un francobollo, si deve dire "Applico il teorema di Pitagora al triangolo OHP". Poi devi scrivere il teorema di Pitagora, cioe'*: la somma dei quadrati costruiti sui cateti e' equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa*):

$OH^2 + HP^2 = OP^2$

Ricavo OH:

$OH^2 = OP^2 - HP^2$

$$OH = \sqrt{(OP^2 - HP^2)} = \sqrt{(1^2 - 1/2\,^2)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{(\sqrt{3})}{2}$$

Non ho messo piu' o meno davanti alla radice perche' siamo nel primo quadrante e il coseno e' positivo; quindi:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

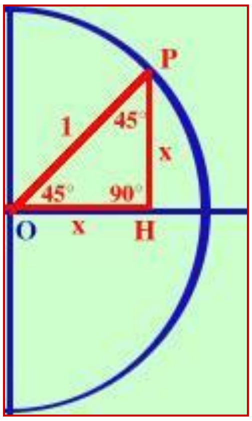
Per trovare la tangente faccio seno fratto coseno :

$$\text{tang}\frac{\pi}{6} = \text{tang}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ecco i calcoli:

$$\text{tang}30° = \frac{\text{sen}30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{razionalizzo} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Angolo di 45° (π/4)



Consideriamo l'angolo di 45 gradi; considero il triangolo delle proiezioni OPH, esso ha un angolo di 45° ed un angolo di 90°, quindi il terzo angolo vale 45°; il triangolo e' isoscele e seno e coseno, corrispondendo ai lati uguali, devono avere lo stesso valore:

$\text{sen } 45° = \cos 45° = x$

Ho messo x per indicare il valore che devo trovare.

Per trovare il valore di x applico il Teorema di Pitagora al triangolo OHP:

$OH^2 + HP^2 = OP^2$

$x^2 + x^2 = 1^2$

$2x^2 = 1$

$x^2 = ½$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Razionalizzo (devo eliminare la radice dal denominatore; moltiplico sopra e sotto per radice di due), ecco i calcoli:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Non ho messo piu' o meno davanti alla radice perche' siamo nel primo quadrante e seno e coseno sono positivi

Quindi avremo:

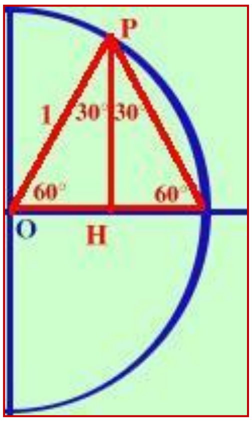
$$\text{sen}\frac{\pi}{4} = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per trovare la tangente faccio seno fratto coseno e siccome sono uguali, il risultato e' 1 :

$\text{tang}\frac{\pi}{4} = \text{tang } 45° = 1$

c) Angolo di 60°



Consideriamo l'angolo di 60 gradi ed il triangolo delle proiezioni OPH: se lo ribalto attorno all'altezza OH ottengo un triangolo equilatero
ha un angolo di 60° e gli altri due uguali perche' avendo per lati due raggi e' isoscele.
Essendo il lato OH del triangolo uguale alla meta' del raggio (cerchio trigonometrico) OH = cos 60° sara' 1/2, quindi:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

Per trovare il seno dobbiamo trovare PH, allora applico il Teorema di Pitagora al triangolo OHP:

$PH^2 + OH^2 = OP^2$

Ricavo PH:

$PH^2 = OP^2 - OH^2$

$$PH = \sqrt{(OP^2 - OH^2)} = \sqrt{(1^2 - 1/2^{\,2})} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{(\sqrt{3})}{2}$$

Non ho messo piu' o meno davanti alla radice perche' siamo nel primo quadrante e il seno e' positivo;
quindi:

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

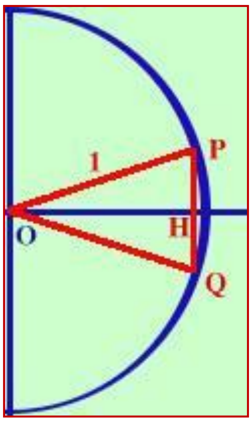
Per trovare la tangente faccio seno fratto coseno:

$\text{tang}\frac{\pi}{3} = \text{tang } 60° = \sqrt{3}$

Ecco i calcoli: $\text{tang } 60° = \frac{\text{sen}60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

Potevamo trovare i valori per l'angolo di 60° semplicemente scambiando i valori dell'angolo di 30°, perche' angoli complementari quindi:
sen 60° = cos 30°
cos 60° = sen 30°
ma vuoi mettere la differenza fra il ricavarlo cosi' o il ricavarlo con una bella dimostrazione geometrica!

d) Angolo di 18°



Consideriamo l'angolo di 18 gradi: se lo ribalto attorno all'asse delle x ottengo un angolo di 36 gradi, cioe' un decimo dell'angolo giro, allora la corda dell'arco e' il lato del decagono regolare.
Dalla geometria si sa che il lato del decagono regolare e' la sezione aurea del raggio.
Calcolo quindi la lunghezza del segmento PQ:

$PQ = x$
Raggio : PQ = PQ : (raggio-PQ)
$1 : x = x : (1 - x)$
Prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi:
$x \cdot x = 1 \cdot (1 - x)$
$x^2 = 1 - x$
Porto prima dell'uguale e ottengo l'equazione:
$x^2 + x - 1 = 0$
che mi da' come unica soluzione accettabile applicando la formula risolutiva:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = PQ$$

Ecco i calcoli:

$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{[(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)]}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{(1+4)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ottengo le due soluzioni

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ accettabile

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ negativa quindi non accettabile perchè stiamo cercando la misura di un segmento e siccome una misura di segmento non può essere negativa, dobbiamo scartarla.

---

e quindi essendo PH la meta' di PQ:

$$PH = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{10} = \text{sen}\,18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Per trovare il coseno dobbiamo trovare OH, allora applico il Teorema di Pitagora al triangolo OHP:
$PH^2 + OH^2 = OP^2$
Ricavo OH :
$OH^2 = OP^2 - PH^2$

$$OH = \sqrt{(OP^2 - PH^2)} = \sqrt{\left[1^2 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right]} = \sqrt{\left(1 - \frac{1+5-2\sqrt{5}}{16}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)} =$$

minimo comune multlipo 16:

$$= \sqrt{\left(\frac{16-6+2\sqrt{5}}{16}\right)} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} =$$

Estraggo il denominatore di radice ed ottengo la formula finale:

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$$

Quindi

$$\cos\frac{\pi}{10} = \cos 18° = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Per trovare la tangente faccio seno fratto coseno e, dopo laboriosi calcoli per razionalizzare, ottengo:

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{10} = \text{tang } 18° = \sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

Ecco i laboriosi calcoli:

$$\text{tang } 18° = \frac{\text{sen}18°}{\cos 18°} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}} =$$

numeratore per l'inverso del denominatore:

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}} =$$

semplifico il 4 al numeratore ed al denominatore:

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}} =$$

Ore devo razionalizzare: moltiplico sopra e sotto per $\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}} \cdot \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} =$$

Sotto moltiplico i denominatori (è un prodotto notevole); sopra porto $(-1+\sqrt{5})$ dentro la radice grande (bisogna elevare al quadrato):

$$= \frac{\sqrt{[(-1+\sqrt{5})^2(10-2\sqrt{5})]}}{\sqrt{[(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})]}} = \frac{\sqrt{[(1+5-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})]}}{\sqrt{[(10)^2-(2\sqrt{5})^2]}} = \frac{\sqrt{[(6-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})]}}{\sqrt{(100-20)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(60-12\sqrt{5}-20\sqrt{5}+20)}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{(80-32\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{80-32\sqrt{5}}{80}} =$$

Divido sopra e sotto per 16:

$$= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} =$$

Spezzo la frazione:

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} =$$

E ottengo la formula finale:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

---

e) Angolo di 72°

Per l'angolo di 72° basta ricordare che a 90° seno e coseno si scambiano di valore quindi avremo:

$$\text{sen } 72° = \cos 18°$$
$$\cos 72° = \text{sen } 18°$$

cioe':

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{5} = \text{sen}\ 72° = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Per trovare la tangente faccio seno fratto coseno:

$$\text{tang}\,\frac{2\pi}{5} = \text{tang}\ 72° = \sqrt{(5+2\sqrt{5}}$$

Ecco i calcoli:

$$\text{tang}72° = \frac{\text{sen}72°}{\cos72°} = \frac{\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} =$$

numeratore per l'inverso del denominatore:

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4} \cdot \frac{4}{-1+\sqrt{5}} =$$

Semplifico il 4 al numeratore ed al denominatore e sotto scrivo prima il positivo e poi il negativo:

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}-1} =$$

Ora devo razionalizzare; moltiplico sopra e sotto per $\sqrt{5}+1$

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} =$$

sotto, moltiplico i denominatori (è un prodotto notevole)

sopra, porto $(\sqrt{5+1})$ dentro la radice grande (elevando al quadrato):

$$= \frac{\sqrt{[(\sqrt{5}+1)^2(10+2\sqrt{5}]}}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{\sqrt{[(5+1+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5}]}}{5-1} = \frac{\sqrt{[(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5}]}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{(60+12\sqrt{5}+20\sqrt{5}+20)}}{4} = \frac{\sqrt{(80+32\sqrt{5})}}{4} =$$

Metto in evidenza 16 per poi estrarlo di radice:

$$= \frac{\sqrt{16(5+2\sqrt{5})}}{4} =$$

Estraggo la radice:

$$= \frac{4 \cdot \sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{4} =$$

Semplifico per 4 sopra e sotto ed ottengo il risultato finale:

$$\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$$

f) Tabella riassuntiva

	0°	18°	30°	45°	60°	72°	90°
Seno	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$	1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	0
Tangente	0	$\sqrt{\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	∞

Naturalmente non devi saperla a memoria, ma saperla usare: io personalmente non me la ricordo mai e per calcolare i valori piu' usati, di solito mi rifaccio mentalmente alla circonferenza.

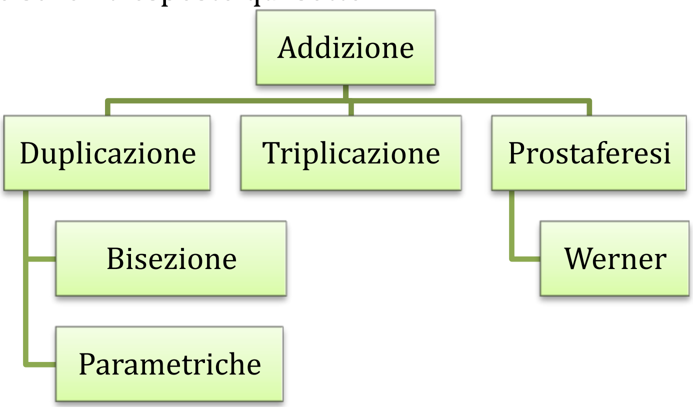
C. *Algebra goniometrica*

Goniometrica sarebbe piu' esatto, pero' trigonometrica e' piu' usato, usa la terminologia che ti suggerisce il tuo insegnante.

Considerati gli enti goniometrici, ora cerchiamo di veder come eseguire operazioni su di essi, come applicare i concetti di equazione e disequazione ecc ..., cioe' di "algebrizzarli"

1. Operazioni su archi ed angoli

Sono operazioni definite da varie formule in relazione fra loro: le prime, un po' piu' laboriose da dimostrare sono le formule di addizione. Da esse vengono ricavate tutte le altre secondo lo schema esposto qui sotto



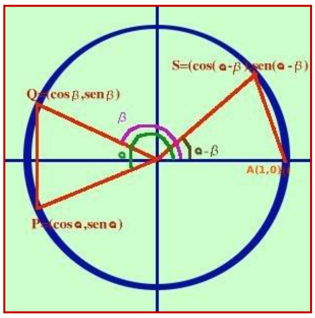
a. Formule di addizione
b. Formule di duplicazione
c. Formule di bisezione
d. Formule parametriche
e. Formule di Prostaferesi
f. Formule di Werner

a) Formule di addizione

Le formule di addizione e sottrazione (in breve formule di addizione) sono le formule principali da cui si ricavano tutte le altre: e' una delle poche cose in matematica che (forse) sarebbe bene studiare a memoria

- cos (α - β)
- cos (α + β)
- sen (α + β)
- sen (α - β)
- tabella di riepilogo
- formule per la tangente
- uso delle formule

cos (α-β)



Consideriamo un cerchio trigonometrico.
Consideriamo l'angolo **α** nel terzo quadrante e l'angolo **β** nel secondo quadrante tali che la loro differenza, (**α - β**), sia un angolo del primo quadrante.
Il punto P sia il punto sulla circonferenza che corrisponde ad **α**, Q il punto che corrisponde a **β** e S il punto che corrisponde ad (**α - β**); inoltre sia A l'origine degli archi; le coordinate cartesiane di tali punti saranno:

$P = (\cos\alpha , \text{sen}\,\alpha)$
$Q = (\cos\beta , \text{sen}\,\beta)$
$S = (\cos(\alpha - \beta) , \text{sen}(\alpha - \beta))$
$A = (1{,}0)$

L'arco PQ sara'uguale all'arco AS perche' gli angoli al centro sono entrambe uguali ad (α - β) quindi avremo che anche per le corde:

$PQ = AS$

Applicando la formula per la distanza fra due punti nel piano per calcolare sia PQ che AS avremo:

$PQ = \sqrt{[(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2]}$
$AS = \sqrt{([\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\text{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2)}$

il - 0 potevo tralasciarlo:
Uguaglio le due espressioni:

$$\sqrt{[(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2]} = \sqrt{\{([\cos(\alpha - \beta)] - 1)^2 + [\text{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2\}}$$

Eseguiamo i calcoli: io faccio tutti i passaggi, tu puoi abbreviare.
Tolgo le radici prima e dopo l'uguale:

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2 = ([\cos\alpha - \beta] - 1)^2 + [\text{sen}\,\alpha - \beta]^2$

Eseguo i quadrati:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta =$
$= \cos^2(\alpha - \beta) + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \text{sen}^2(\alpha - \beta)$

Per la prima relazione fondamentale so che:
$\cos^2(\text{angolo}) + \text{sen}^2(\text{angolo}) = 1$, quindi:

$1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$

Gli 1 si eliminano essendo di segno uguale da parti opposte dell'uguale:

$-2 \cos\alpha \cos\beta - 2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = -2 \cos(\alpha - \beta)$
Sposto i termini dalla parte dell'uguale dove sono positivi:
$2 \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta + 2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
Divido tutto per 2 ed ottengo la prima formula:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$$

La dimostrazione e' piuttosto pesante, pero' e' l'unica forma che si basa su una dimostrazione geometrica: le altre dimostrazioni saranno tutte algebriche e molto piu' semplici

---

cos (α + β)

Per determinate la formula per cos (α+β) cerchiamo di riportarlo alla formula che gia' conosciamo: cos (α-β)
$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] =$
In questo modo applico la formula gia' trovata ai due angoli α e (-β):
$= \cos\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta) =$
Ricordando le formule per gli archi opposti
$= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
Quindi la formula cercata e':

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$$

---

sen (α + β)

Anche qui per determinate la formula per sen (α+β) cerchiamo di riportarlo alla formula che gia' conosciamo: cos (α-β)
Uso le formule degli archi associati (angoli complementari)
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos[90° - (\alpha+\beta)] =$
Raggruppo diversamente all'interno delle parentesi quadre:
$= \cos[(90° - \alpha) - \beta] =$
In questo modo applico la formula gia' trovata ai due angoli (90° -α) e β
$= \cos(90° - \alpha) \cos\beta + \operatorname{sen}(90° - \alpha) \operatorname{sen}\beta =$
Ricordando che il coseno ed il seno di angoli complementari si scambiano:
$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
Quindi la formula cercata e':

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}$$

---

sen (α - β)

Per determinate la formula per sen (α-β) ci rifacciamo ad una formula che gia' conosciamo: sen (α+β)
$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] =$

In questo modo applico la formula gia' trovata ai due angoli α e $(-\beta)$:
$= \text{sen}\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha\ \text{sen}(-\beta) =$
Ricordando le formule per gli archi opposti
$= \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha\ \text{sen}\beta$
Quindi la formula cercata e'

$$\boxed{\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha\ \text{sen}\beta}$$

Tabella di riepilogo per le formule di addizione e sottrazione per seno e coseno

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta$
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\beta$
$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha\ \text{sen}\beta$

Le formule sono state riordinate mettendo prima la somma poi la differenza

---

Vista l'importanza delle formule ribadisco il fatto che sarebbe bene saperle "a memoria"

---

tang (α + β)

Applico la seconda relazione fondamentale:

$$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta} =$$

Divido il numeratore e il denominatore per $\cos\alpha \cos\beta$ (e quindi divido ogni termine del numeratore ed ogni termine del denominatore).

Nota: il dividere numeratore e denominatore per coseno e' un meccanismo che useremo spesso e ci permettera' di trovare formule in cui sia coinvolta la tangente.

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\ \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \dfrac{\text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} =$$

Semplificando ove possibile e ricordando la seconda relazione fondamentale ottengo:

$$= \frac{\text{tang}\alpha + \text{tang}\beta}{1 - \text{tang}\alpha\ \text{tang}\beta}$$

Formula:

$$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\alpha\ \text{tang}\beta}$$

---

tang (α - β)

Applico la seconda relazione fondamentale :

$$\text{tang}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{sen}\,(\alpha - \beta)}{\cos\,(\alpha - \beta)} = \frac{\text{sen}\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta} =$$

Divido il numeratore e il denominatore per cosα cosβ (e quindi divido ogni termine del numeratore ed ogni termine del denominatore):

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta} + \dfrac{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}$$

Semplificando ove possibile e ricordando la seconda relazione fondamentale ottengo:

$$= \frac{\text{tang}\alpha - \text{tang}\beta}{1 + \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}$$

Formula:

$$\text{tang}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}$$

L'importanza di questa formula e' soprattutto dovuta al fatto che in geometria cartesiana la tangente dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle x e' uguale al coefficiente angolare m della retta stessa: se poni il numeratore della formula uguale a zero ottieni la condizione di parallelismo di due rette, mentre se poni uguale a zero il denominatore ottieni la condizione di perpendicolarita' di due rette: la formula ti da' la tangente dell'angolo compreso fra due rette nel piano cartesiano

---

Applicazione delle formule di addizione e sottrazione

Possiamo ora trovare altri valori per il seno ed il coseno partendo dai valori noti; facciamo un paio di

Esercizi:

Trovare i valori del seno per l'angolo di 75°

Posso pensare 75° come 30° + 45°, quindi:

sen 75° = sen (30°+45°) =

Applico la formula di addizione per il seno

sen (α+β) = sen αcos β+ cos αsen β con α= 30° e β= 45°:

= sen 30° cos 45° + cos 30° sen 45° =

Sostituisco i valori:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} =$$

per renderlo piu' "elegante" mettiamo in evidenza ¼,

si potrebbe anche mettere in evidenza $\sqrt{2}$ ma perche' complicarci la vita?

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

Quindi:

$$\text{sen}75° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

Vediamo ora di trovare il coseno di 15°

Poiche' seno e coseno si scambiano per angoli complementari, troveremo lo stesso risultato dell'esercizio precedente.

Posso pensare 15° come 45° - 30° (o anche 60° - 45°), quindi:

cos 15° = cos (60 - 45°) =

Applico la formula di sottrazione per il coseno:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
con $\alpha = 60°$ e $\beta = 45°$
$= \cos 30° \cos 45° + \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} 45° =$
Sostituisco i valori:
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$
a parte l'ordine e' esattamente come prima quindi otterremo:

$$\cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

Per esercizio prova a trovare: $\cos 75°$ e $\operatorname{tang} 15°$

b) Formule di duplicazione

Se invece di considerare due angoli diversi α e β consideriamo due angoli uguali α, otterremo le cosiddette formule di duplicazione.
Avremo:

- Formula di duplicazione per il seno
- Formula di duplicazione per il coseno
  - Formule quivalenti per la duplicazione del coseno
- Formula di duplicazione per la tangente
- Tabella di riepilogo

Formula di duplicazione del seno
Partiamo dalla formula:
$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
Poniamo $\beta = \alpha$ cioe' mettiamo α al posto di β nella formula:
$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$
Sommo i termini simili ed ottengo la formula finale:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$$

Formula di duplicazione del coseno
Partiamo dalla formula:
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
Poniamo $\beta = \alpha$ cioe' mettiamo α al posto di β nella formula:
$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha$
Sommo i termini simili e ai prodotti uguali sostituisco il quadrato:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Formule equivalenti per la duplicazione del coseno
Dalla formula finale e' possibile, riferendosi alla prima relazione fondamentale, ricavare un paio di formule che ci saranno utili in futuro: cioe' trovare la formula di duplicazione del coseno espressa tutta in seno oppure espressa tutto in coseno dell'angolo. Partiamo dalla formula ottenuta:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Prima formula

Sapendo che:

$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$

Ricavo $\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$

Sostituisco nella formula di partenza:

$\cos 2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$

Ottengo la prima formula:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\,\alpha}$$

Seconda formula

Stavolta ricavo $\text{sen}^2\alpha$

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

Sostituisco nella formula di partenza:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

Faccio cadere la parentesi:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$

Ottengo la seconda formula:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

Formula di duplicazione per la tangente

Partiamo dalla formula:

$$\text{tang}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tang}\alpha + \text{tang}\beta}{1 - \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}$$

Poniamo $\beta = \alpha$ cioe' mettiamo α al posto di β nella formula:

$$\text{tang}\,(\alpha + \alpha) = \frac{\text{tang}\alpha + \text{tang}\alpha}{1 - \text{tang}\alpha\,\text{tang}\alpha}$$

Sommo i termini simili e ai prodotti uguali sostituisco il quadrato:

$$\boxed{\text{tang}\,2\alpha = \frac{2\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\,\alpha}}$$

Tabella di riepilogo delle formule di duplicazione

$\text{sen}\,2\alpha$	$= 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha$	$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$ $= 1 - 2\text{sen}^2\,\alpha$ $= 2\cos^2\alpha - 1$
$\text{tang}\,2\alpha$	$= \dfrac{2\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\,\alpha}$

c) Formule di bisezione

Utilizzando le 2 formule equivalenti per la duplicazione del coseno e' possibile esprimere un angolo meta' mediante l'angolo di partenza.
Avremo:

- formula di bisezione per il seno
- formula di bisezione per il coseno
- formula di bisezione per la tangente
- tabella di riepilogo

Formula di bisezione per il seno
Partiamo dalla formula:

$\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x$

Poniamo $2x = \alpha$ e quindi $x = (\alpha/2)$
Otteniamo:

$$\cos\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

Devo ricavare sen $(\alpha/2)$:

$$2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

$$\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

Estraggo la radice ed ottengo la formula finale:

$$\boxed{\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}}$$

Con il segno piu' e meno che dipendera' dal quadrante in cui si trova l'angolo.
Comunque anche questa formula sara' usata prevalentemente al quadrato in modo da non avere problemi sulla scelta del segno.

Formula di bisezione per il coseno
Partiamo dalla formula:

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Poniamo $2x = \alpha$ e quindi $x = (\alpha/2)$
Otteniamo:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

Devo ricavare sen $(\alpha/2)$:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

Estraggo la radice ed ottengo la formula finale:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Con il segno piu' e meno che dipendera' dal quadrante in cui si trova l'angolo.
Anche questa formula sara' usata prevalentemente al quadrato in modo da non avere problemi sulla scelta del segno.

Formula di bisezione per la tangente

Per trovare la formula per la tangente basta ricordare la seconda relazione fondamentale :

$$\tan g\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

quindi :

$$\tan g\frac{\alpha}{2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Semplifico ed ottengo la formula finale:

$$\tan g\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Con il segno piu' e meno che dipendera' dal quadrante in cui si trova l'angolo
Anche questa formula sara' usata prevalentemente al quadrato in modo da non avere problemi sulla scelta del segno

---

Tabella di riepilogo delle formule di bisezione

$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\tan g\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

d) Formule parametriche

Queste formule saranno tra quelle piu' usate: serviranno soprattutto per risolvere equazioni trigonometriche di primo grado .
Servono ad esprimere le funzioni seno e coseno mediante la tangente dell'angolo meta' [siccome tang(x/2) sata' di solito indicata con t verranno indicate come formule parametriche (t parametro).
Avremo:

- formula parametrica per il seno
- formula parametrica per il coseno
- formula parametrica per la tangente
- tabella di riepilogo

Formula parametrica per il seno

L'interessante di queste formule e' il tipo di ragionamento che sta alla base del procedimento: trasformare l'espressione in una frazione e quindi dividere numeratore e denominatore per lo stesso termine (di solito quello in basso a sinistra); sara' un procedimento che useremo altre volte

---

Partiamo dalla formula di duplicazione per il seno:
$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$
Poniamo $2x = \alpha$ e quindi $x = (\alpha/2)$.
Otteniamo:
$\text{sen } \alpha = 2 \text{ sen } (\alpha/2) \cos (\alpha/2)$
Voglio trasformare il termine dopo l'uguale in una frazione quindi lo divido per 1 cioe' per $\cos^2(\alpha/2) + \text{sen}^2(\alpha/2)$:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Divido sia al numeratore che al denominatore per $\cos^2(\alpha/2)$:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\dfrac{2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\dfrac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \dfrac{\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Ricordando che:
$$\frac{senx}{cosx} = tangx$$
Otteniamo:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2\text{tang}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \text{tang}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Poniamo $\mathrm{tang}(\alpha/2) = t$
ed otteniamo la prima formula parametrica:

$$\boxed{\mathrm{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}}$$

Formula parametrica per il coseno

Partiamo dalla formula di duplicazione per il coseno:
$\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$
Poniamo $2x = \alpha$ e quindi $x = (\alpha/2)$
Otteniamo:
$\cos \alpha = \cos^2 (\alpha/2) - \mathrm{sen}^2 (\alpha/2)$
Voglio trasformare il termine dopo l'uguale in una frazione quindi lo divido per 1 cioe' per $\cos^2(\alpha/2) + \mathrm{sen}^2(\alpha/2)$:

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Divido sia al numeratore che al denominatore per $\cos^2(\alpha/2)$:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Ricordando che

$$\frac{senx}{cosx} = tangx$$

Otteniamo:

$$\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tang}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \mathrm{tang}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Poniamo $\mathrm{tang}(\alpha/2) = t$
ed otteniamo la seconda formula parametrica:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Formula parametrica per la tangente

Per trovare la formula per la tangente basta ricordare la seconda relazione fondamentale :

$$\text{tang}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

quindi:

$$\text{tang}\alpha = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Semplifico e ottengo la formula finale:

$$\boxed{\text{tang}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}}$$

ricordando che $\text{tang}(\alpha/2) = t$

Questa formula sara' usata piuttosto raramente (colpa del segno meno fra i due termini al denominatore che puo' rendere positivo o negativo il denominatore stesso).

Tabella di riepilogo delle formule parametriche

$sen\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$
$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\text{tang}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

e) Formule di Prostaferesi

Sono formule che permettono di trasformare una somma di seno e coseno di due angoli in un prodotto: da qui discende la loro utilita' che si esplica soprattutto nella soluzione di equazioni trigonometriche.

Storicamente erano importantissime: infatti insieme con le loro inverse servivano a trasformare somme in prodotti e prodotti in somme e quindi permettevano una semplificazione nei calcoli; poi furono scoperti i logaritmi ed il loro uso fu molto ridimensionato.

Sono 4 formule di solito indicate come segue :

- prima formula di Prostaferesi
- seconda formula di Prostaferesi
- terza formula di Prostaferesi
- quarta formula di Prostaferesi
- tabella di riepilogo

Prima formula di prostaferesi

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale
(i due termini uguali $\cos\alpha \, \mathrm{sen}\beta$ avendo segni contrari si annullano e spariscono):

$$\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$
$$+ \qquad\qquad + \qquad\qquad +$$
$$\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$

$$\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) = 2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\beta$$

Poniamo $\alpha+\beta = p$ ed $\alpha-\beta = q$
e quindi sara':

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \qquad\qquad \beta = \frac{p-q}{2}$$

Ecco i calcoli:
Devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta = q \end{cases}$$

Usiamo il metodo di addizione; prima sommo:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ + \quad + \quad + \\ \alpha-\beta = q \end{cases}$$

$$2\alpha = p+q$$

ed ottengo:

$$\alpha = \frac{p+q}{2}$$

Ora sottraggo termine a termine:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ - \quad - \quad - \\ \alpha-\beta = q \end{cases}$$

$$2\beta = p-q$$

ed ottengo:

$$\beta = \frac{p-q}{2}$$

Otteniamo quindi la prima formula di prostaferesi:

$$\boxed{\mathrm{sen}\,p + \mathrm{sen}\,q = 2\,\mathrm{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

Seconda formula di prostaferesi

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale:
(i due termini uguali $\mathrm{sen}\alpha\cos\beta$ avendo segni contrari si annullano e spariscono)

$$\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$
$$- \qquad\qquad - \qquad\qquad -$$
$$\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$

$$\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$

Poniamo $\alpha + \beta = p$ ed $\alpha - \beta = q$
e quindi sara':

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \qquad \beta = \frac{p-q}{2}$$

I calcoli sono gli stessi della prima formula di prostaferesi.

Otteniamo quindi la seconda formula di prostaferesi:

$$\boxed{\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}}$$

Terza formula di prostaferesi

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale :
(i due termini uguali *senα senβ* avendo segni contrari si annullano e spariscono)

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$
$+ \qquad + \qquad +$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

Poniamo $\alpha + \beta = p$ ed $\alpha - \beta = q$
e quindi sara' :

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \qquad \beta = \frac{p-q}{2}$$

I calcoli sono gli stessi della prima formula di prostaferesi

Otteniamo quindi la seconda formula di prostaferesi:

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

Quarta formula di prostaferesi

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale :
(i due termini uguali *cosα cosβ* avendo segni contrari si annullano e spariscono)

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$
$- \qquad - \qquad -$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = -2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

Poniamo $\alpha + \beta = p$ ed $\alpha - \beta = q$
e quindi sara':

$\alpha = \frac{p+q}{2}$ $\qquad \beta = \frac{p-q}{2}$

I calcoli sono gli stessi della prima formula di prostaferesi

Otteniamo quindi la seconda formula di prostaferesi:

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

Tabella di riepilogo delle formule di prostaferesi

I	$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
II	$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$
III	$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
IV	$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$

f) Formule di Werner

Sono le formule inverse delle formule di prostaferesi e permetteranno di trasformare un prodotto in una somma.
La loro utilita' e' piuttosto limitata:

- Prima formula di Werner
- Seconda formula di Werner
- Terza formula di Werner
- Quarta formula di Werner
- tabella di riepilogo

Prima formula di Werner

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale (i due termini uguali $\cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ avendo segni contrari si annullano e spariscono):

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\begin{array}{l} \quad + \qquad\qquad + \qquad\qquad + \\ \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta \end{array}$$

$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\,\text{sen}\alpha\cos\beta$

Ricaviamo *senα cosβ* ed otteniamo la prima formula di Werner:

$$\text{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

Seconda formula di Werner

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale:
(i due termini uguali *senα cosβ* avendo segni contrari si annullano e spariscono)

$$\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta \\ \quad - \qquad\qquad - \qquad\qquad - \\ \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta \end{array}$$

$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\,\text{sen}\beta$

Ricaviamo *cosα senβ* ed otteniamo la seconda formula di Werner:

$$\cos\alpha\,\text{sen}\beta = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta) - \text{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

Terza formula di Werner

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale
(i due termini uguali *senα senβ* avendo segni contrari si annullano e spariscono):

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta \\ \quad + \qquad\qquad + \qquad\qquad + \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta \end{array}$$

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

Ricaviamo *cosα cosβ* ed otteniamo la terza formula di Werner:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Quarta formula di Werner

Partiamo dalle due formule di addizione e sottrazione per il seno e sommiamo in verticale
(i due termini uguali *cosα cosβ* avendo segni contrari si annullano e spariscono):

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$-\qquad\quad -\qquad\quad -$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

Ricaviamo *senα senβ* ed otteniamo la quarta formula di Werner:

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Tabella di riepilogo delle formule di Werner

I	$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$
II	$\cos\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$
III	$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$
IV	$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$

---

2. Identita' trigonometriche

Sono due espressioni di cui bisogna dimostrare l'uguaglianza.
Come metodo operativo prima si trasforma nello stesso angolo, poi nella stessa funzione si puo' procedere in vari modi:

- si sviluppa l'espressione prima dell'uguale trasformandola finche' diventa uguale all'espressione dopo l'uguale
- si sviluppa l'espressione dopo l'uguale finche' diventa uguale all'espressione prima dell'uguale
- si sviluppano contemporaneamente le espressioni prima e dopo l'uguale facendole diventare identiche

Naturalmente si scegliera' il metodo piu' semplice.

Vediamo un semplice esempio:

$2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$

Come primo passaggio trasformiamo nello stesso angolo; quindi trasformiamo l'espressione sia prima che dopo l'uguale:

- prima dell'uguale devo usare la formula di duplicazione del seno

- dopo l'uguale devo usare la formula di bisezione per il coseno; essendo l'espressione al quadrato la radice sparisce:

$$2\text{sen}\alpha + 2\text{sen}\alpha \cos\alpha = 4\,\text{sen}\alpha\,\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Dopo l'uguale semplifico il 4 con il 2:

$2\,\text{sen}\alpha + 2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha = 2\,\text{sen}\alpha\,(1+\cos\alpha)$

Se ora moltiplico dopo l'uguale ottengo il risultato:

$2\,\text{sen}\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha + 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

Avrei potuto raccogliere *2 senα* prima dell'uguale ed avrei comunque ottenuto l'uguaglianza.

Le identita' trigonometriche sono una buona palestra per imparare a destreggiarsi con le varie formule trigonometriche.

3. Equazioni trigonometriche

Sono equazioni in cui l'incognita e' l'angolo

Una delle cose da tener presente e' che il seno ed il coseno sono funzioni limitate tra -1 ed 1 quindi scritture quali:

$\text{sen}\,x = 3$

$\cos x = 5$

non hanno significato e quindi tali equazioni non ammettono soluzioni.

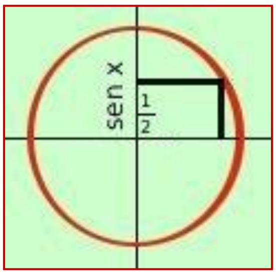
- equazioni fondamentali
- tipi di equazioni specifiche della trigonometria
- equazioni di vario tipo

a) Equazioni trigonometriche fondamentali

Tutte le equazioni trigonometriche si possono ridurre ai 3 tipi fondamentali:

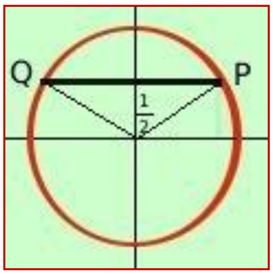
- $\text{sen}\,x = h$ con $-1 \le h \le +1$
- $\cos x = n$ con $-1 \le h \le +1$
- $\text{tang}\,x = p$ con $p \in R$

(1) sen x = h



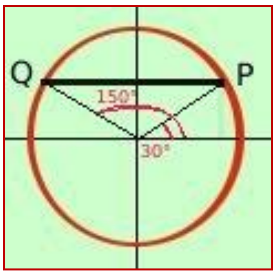
E' il primo tipo di equazione: cerchiamo di capire come risolverla con un esempio numerico.
Ricordo ancora che il termine dopo l'uguale puo' avere solamente i valori da -1 a +1 perche' il cerchio trigonometrico ha raggio 1.
Prendiamo l'equazione:

$$\text{sen}x = \frac{1}{2}$$



Il valore del seno (1/2) e' un valore che si trova sull'asse verticale del cerchio trigonometrico.

Se considero il valore 1/2 sull'asse verticale ad esso possono corrispondere due angoli (archi): uno a destra ed uno a sinistra dell'asse verticale;



so che il valore di 1/2 per il seno corrisponde a 30°, quindi il primo angolo sara' 30° ed il secondo sara' 180° - 30° = 150°

Ti sarai accorto che per risolvere le equazioni devi conoscere molto bene i valori che assumono le funzioni trigonometriche; cioe' devi studiarti molto bene la tabella dei valori .

E se il valore che abbiamo non corrisponde ad uno dei valori in tabella cosa si deve fare?
Ecco:
Se il valore che hai non corrisponde a nessuno dei valori in tabella puoi seguire due strade diverse:

- Se ti puo' essere utile un valore approssimato puoi usare un manuale di tavole trigonometriche od anche la tua calcolatrice per trovare il valore dell'angolo; si trovano valori approssimati in fisica, chimica e in genere in tutte le scienze applicate
- Se invece il valore serve in matematica allora deve essere esatto (la matematica e' una scienza esatta) quindi se non sappiamo calcolarlo indichiamo comunque che lo calcoliamo usando la funzione inversa di y= senx

Tale funzione e':
y = arcsen x
Quindi se per esempio ho:
sen x = 0,123
la soluzione sara':
x = arcsen 0,123 + k 360°
che significa **x** e' l'angolo (arco) il cui seno vale 0,123;
usi l'angolo con i gradi e l'arco con i radianti.

Questo fatto sara' generale; la soluzione dell'equazione:
sen x = h
sara' sempre data dai due angoli:
$x = \alpha°$
$x = 180° - \alpha°$
e siccome siamo sul cerchio trigonometrico dovremo considerare tutte le soluzioni che differiscono di un giro completo:

$$x = \alpha° + k\,360°$$
$$x = 180° - \alpha° + k\,360°$$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)

Noi ci accontentiamo dei naturali ;qualcuno considera invece i numeri interi (k = 0, +1, -1, +2, -2, +3, ...) perche' pensa di percorrere le circonferenze sul cerchio trigonometrico sia in senso orario che in senso antiorario.

Naturalmente la formula per l'angolo **α** in radianti invece che in gradi e' equivalente:

$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)

E' anche possibile unificare le due formule in un'unica formula, ma perche' complicarsi la vita?
Comunque se ti serve la formula e':

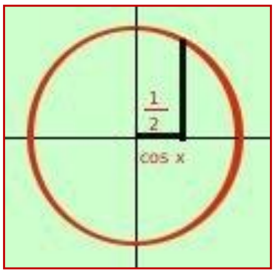
$$x = (-1)^k \alpha° + k\,180°$$

con k numero intero (k = 0, 1, 2, 3, ...).
In questo modo per valori pari l'angolo e' positivo e si somma mentre per valori dispari l'angolo diventa negativo e si sottrae; in definitiva si ottengono sempre gli stessi angoli.
Per esercizio prova a calcolare gli angoli per k=0, k=1, k=2 e k=3 applicando la formula all'esercizio iniziale.
Ecco i calcoli:
Sapendo che il primo angolo e' 30° applico la formula:
$x = (-1)^k \alpha° + k\,180°$

- per k = 0
  $x = (-1)^0\, 30° + 0 \cdot 180° = 30°$
- per k = 1
  $x = (-1)^1\, 30° + 1 \cdot 180° = -30° + 180° = 150°$
- per k = 2
  $x = (-1)^2\, 30° + 2 \cdot 180° = +30° + 360° = 390°$
  $(360° + 30°)$
- per k = 2
  $x = (-1)^3\, 30° + 3 \cdot 180° = -30° + 540° = 510°$
  $(360° + 150°)$

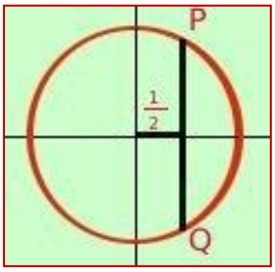
---

(2) cos x = m



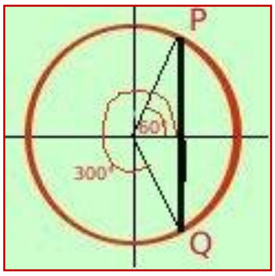
Anche qui cerchiamo di capire come risolverla con un esempio numerico.
Bisogna dire anche qui che il termine dopo l'uguale puo' avere solamente i valori da -1 a +1 perche' il cerchio trigonometrico ha raggio 1.
Prendiamo l'equazione:

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



Il valore del coseno (1/2) e' un valore che si trova sull'asse orizzontale del cerchio trigonometrico.

Se considero il valore 1/2 sull'asse orizzontale ad esso possono corrispondere due angoli (archi): uno in alto ed uno in basso rispetto all'asse orizzontale; so che il valore di 1/2 per il coseno corrisponde a 60°,quindi il primo angolo sara' 60° ed il secondo sara' 360° - 60° = 300°



Siccome le soluzioni saranno sempre 2 angoli con estremi P e Q simmetrici rispetto all'orizzontale si preferisce indicare le soluzioni come:
$x = \pm 60° + k\,360°$

E se il valore che abbiamo non corrisponde ad uno dei valori in tabella cosa si deve fare?
Ecco:
Se il valore che hai non corrisponde a nessuno dei valori in tabella puoi seguire due strade diverse:

- Se ti puo' essere utile un valore approssimato puoi usare un manuale di tavole trigonometriche od anche la tua calcolatrice per trovare il valore dell'angolo; si trovano valori approssimati in fisica, chimica e in genere in tutte le scienze applicate.
- Se invece il valore serve in matematica allora deve essere esatto (la matematica e' una scienza esatta) quindi se non sappiamo calcolarlo indichiamo comunque che lo calcoliamo usando la funzione inversa di y= senx.
  Tale funzione e':
  $y = \arccos x$

Quindi se per esempio ho:
$\cos x = 0{,}321$
La soluzione sara':
$x = \arccos 0{,}321 + k\, 360°$
che significa **x** e' l'angolo (arco) il cui coseno vale 0,321;
usi l'angolo con i gradi e l'arco con i radianti.

Questo fatto sara' generale; la soluzione dell'equazione:
$\cos x = n$
sara' sempre data dai due angoli:
$x = \pm\alpha°$
e siccome siamo sul cerchio trigonometrico dovremo considerare tutte le soluzioni che differiscono di un giro completo:

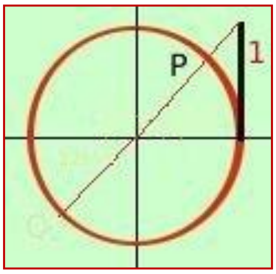
$x = \pm\alpha° + k\, 360°$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)

Naturalmente la formula per l'angolo **α** in radianti invece che in gradi e' equivalente:

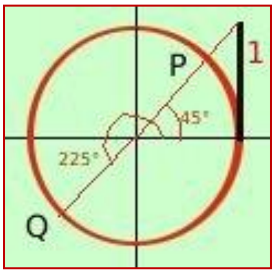
$x = \pm\alpha + 2k\,\pi$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)

---

(3) tang x = p



Qui il risolvere l'equazione e' molto semplice; consideriamo un'equazione numerica:
$\tan x = 1$
Il valore della tangente (1) e' un valore che si trova sulla verticale condotta dall'origine degli archi all'asse x.
Se considero il valore 1 sulla verticale ad esso possono corrispondere due angoli (archi): uno nel primo ed uno nel terzo quadrante; so che il valore di 1 per la tangente corrisponde a 45°; quindi il primo angolo sara' 45° .
e siccome la tangente e' periodica di 180° il secondo sara' 180° + 45° = 225°.
La soluzione verra' indicata come:
$x = 45° + k\, 180°$



E se il valore che abbiamo non corrisponde ad uno dei valori in tabella cosa si deve fare?
Ecco:
Se il valore che hai non corrisponde a nessuno dei valori in tabella puoi seguire due strade diverse:

- Se ti puo' essere utile un valore approssimato puoi usare un manuale di tavole trigonometriche od anche la tua calcolatrice per trovare il valore dell'angolo; si trovano valori approssimati in fisica, chimica e in genere in tutte le scienze applicate.
- Se invece il valore serve in matematica allora deve essere esatto (la matematica e' una scienza esatta) quindi se non sappiamo calcolarlo indichiamo comunque che lo calcoliamo usando la funzione inversa di y= tang x.
Tale funzione e':
$y = \arctan x$
Quindi se per esempio ho:
$\tan x = 7$

la soluzione sara':
$x = \text{arcotang } 7 + k\ 180°$
che significa **x** e' l'angolo (arco) la cui tangente vale 7;
usa l'angolo con i gradi e l'arco con i radianti.

La soluzione dell'equazione:
$\text{tang } x = p$
sara' data da:

> $x = \alpha° + k\ 180°$
> con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)

Naturalmente la formula per l'angolo **α** in radianti invece che in gradi e' equivalente :

> $x = \alpha + k\ \pi$
> con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)

b) Tipi di equazioni specifiche della trigonometria

Sono equazioni la cui soluzione deriva da una tecnica esclusivamente trigonometrica; possiamo suddividerle in:

(1) Equazioni in seno e coseno di 1° grado lineari omogenee

Lineare significa che i termini dell'equazione, diversi dal termine noto, sono tutti di primo grado
Omogenea significa che il termine noto vale 0.

Per risolvere un'equazione di questo genere e' sufficiente dividere tutti i temini dell'equazione per cos x , supponendo che cos x sia diverso da zero: in tal modo si ottiene un'equazione di primo grado in tang x che si risolve normalmente.

E' necessario pero' controllare che la soluzione corrispondente a cos x = 0 non sia valida per l'equazione di partenza.

Esempio:
Risolvere l'equazione:
$\text{sen } x + \cos x = 0$
Divido ogni termine per cos x supponendo:
$\cos x \neq 0$
(secondo principio di equivalenza delle equazioni)
$$\frac{\text{senx}}{\text{cosx}} + \frac{\text{cosx}}{\text{cosx}} = \frac{0}{\text{cosx}}$$
Ricordando la seconda relazione fondamentale:
$\text{tang } x + 1 = 0$
Risolvo:
$\text{tang } x = -1$
Il valore dell'angolo corrispondente e' 135°.
(sarebbe -45° ma noi considereremo sempre gli angoli partendo dall'origine degli angoli e ruotando in senso antiorario)
Quindi abbiamo:

$x° = 135° + k\,180°$
o preferibilmente:
$x = 3/4\,\pi + k\,\pi$
Non e' finita!
Siccome ho supposto $\cos x \neq 0$, devo controllare se la soluzione $\cos x = 0$ soddisfa l'equazione di partenza; siccome $\cos x = 0$ si ottiene nel primo giro per gli angoli 90° e 270° devo controllare i valori dell'equazione:
$\text{sen}\,x + \cos x = 0$ a 90° ed a 270°

- Controllo per $x = 90°$ (se vuoi essere preciso usa $\pi/2$)
  $\text{sen}\,90° + \cos 90° = 0$
  $1 + 0 = 0$ $x = 90°$ non e' soluzione
- Controllo per $x = 270°$ (se vuoi essere preciso usa $3\pi/2$)
  $\text{sen}\,270° + \cos 270° = 0$
  $-1 + 0 = 0$ $x = 270°$ non e' soluzione

Quindi la soluzione finale e':
$x° = 135° + k\,180°$
o meglio:
$x = 3/4\,\pi + k\,\pi$

E' un errore piuttosto comune e diffuso non controllare le condizioni di realta'; se dividi per un'espressione e il tuo risultato differisce dal libro di testo controlla subito se hai considerato i casi in cui il denominatore vale zero.

(2) Equazioni in seno e coseno di 1° grado lineari non omogenee

Stavolta non possiamo dividere per cos x perche' c'e' un termine noto; per risolvere un'equazione di questo genere si usano le formule parametriche:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Sostituendo a sen x e cos x le espressioni riportate, si ottiene un'equazione di secondo grado in t (tang x/2) che e' possibile risolvere.

Anche se abbiamo un'equazione fratta non abbiamo bisogno di condizioni di realta' perche' il denominatore $1+t^2$ e' certamente positivo come somma di due quadrati.

Esempio: risolvere l'equazione:
$\text{sen}\,x + \cos x = 1$
Sostituisco:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

Faccio il minimo comune multiplo:

$$\frac{2t+1-t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{1+t^2}$$

Elimino i denominatori e porto prima dell'uguale:
$2t + 1 - t^2 - 1 - t^2 = 0$
$-2t^2 + 2t = 0$
Divido per -2:
$t^2 - t = 0$
Equazione di secondo grado spuria:

$t(t-1)=0$

Ho le due equazioni:

- $t = 0$
- $t - 1 = 0$

e le due soluzioni:

- $t = 0$
- $t = 1$

Ora sono equazioni di tipo fondamentale:

- Risolvo la prima:

$\text{tang}\, x/2 = 0$

l'angolo la cui tangente e' 0 e' 0°

$x/2 = 0° + k\, 180°$

Quindi siccome devo trovare **x**

$x = 0° + k\, 360°$

- Risolvo la seconda:

$\text{tang}\, x/2 = 1$

l'angolo la cui tangente e' 1 e' 45°

$x/2 = 45° + k\, 180°$

Quindi siccome devo trovare x:

$x = 90° + k\, 360°$

ho quindi le soluzioni:

$x = 0° + k\, 360°$ $\quad x = 90° + k\, 360°$

o meglio:

$x = 0 + 2k\pi$ $\quad x = \pi/2 + 2\, k\, \pi$

(3) Equazioni in seno e coseno di 2° grado lineari omogenee

Per risolvere un'equazione di questo genere e' sufficiente dividere tutti i termini dell'equazione per $\cos^2 x$, supponendo che cos x sia diverso da zero: in tal modo si ottiene un'equazione di secondo grado in tang x che si risolve normalmente.
Un esempio chiarira' meglio il concetto.

Esempio: Risolvere l'equazione:

$\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$

Divido ogni termine per $\cos^2 x$ supponendo $\cos x \neq 0$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

Ricordando la seconda relazione fondamentale:

$\text{tang}^2 x - 1 = 0$

Risolvo:

$\text{tang}^2 x = 1$

Quindi ho le due equazioni:

- $\text{tang}\, x = -1$
- $\text{tang}\, x = 1$

Il valore dell'angolo corrispondente a tang x = -1 e' 135°

Il valore dell'angolo corrispondente a tang x = 1 e' 45°

Quindi abbiamo:

$x° = 45° + k\, 180°$

$x° = 135 + k\, 180°$

mettendo insieme le due soluzioni:
$x° = 45° + k\,90°$
o preferibilmente
$x = \pi/4 + k\,\pi/2$
Non e' finita!
Siccome ho supposto $\cos x \neq 0$ devo controllare se la soluzione $\cos x = 0$ soddisfa l'equazione di partenza; siccome $\cos x = 0$ si ottiene nel primo giro per gli angoli 90° e 270° devo controllare i valori dell'equazione:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0$ a 90° ed a 270°

- Controllo per $x = 90°$ (se vuoi essere preciso usa $\pi/2$)
  $\text{sen}^2 90° + \cos^2 90° = 0$
  $1 + 0 = 0$ $\quad x = 90°$ non e' soluzione.
- Controllo per $x = 270°$ (se vuoi essere preciso usa $3\pi/2$)
  $\text{sen}^2 270° + \cos^2 270° = 0$
  $1 + 0 = 0$ $\quad x = 270°$ non e' soluzione.

Quindi la soluzione finale e':
$x° = 45° + k\,90°$
o meglio:
$x = \pi/4 + k\,\pi/2$

(4) Equazioni in seno e coseno di 2° grado lineari non omogenee

Per risolvere equazioni di questo genere basta ricordare la prima relazione fondamentale: prenderemo il termine noto e lo moltiplicheremo per $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$ in questo modo l'equazione si trasforma in omogenea e la risolviamo come nella pagina precedente.
Un esempio chiarira' meglio il concetto.

Esempio: Risolvere l'equazione:
$2\,\text{sen}\,x \cos x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x = -2$
Moltiplico il termine noto per $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$
$2\,\text{sen}\,x \cos x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x = -2(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$
$2\,\text{sen}\,x \cos x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x = -2\text{sen}^2 x - 2\cos^2 x$
Porto tutti i termini prima dell'uguale:
$2\,\text{sen}\,x \cos x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x + 2\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 0$
Sommo i termini simili ed ordino rispetto a sen x:
$\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x \cos x + \cos^2 x = 0$
Divido ogni termine per $\cos^2 x$ supponendo $\cos x \neq 0$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\text{senx}\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

Applico la seconda relazione fondamentale:
$\text{tang}^2 x + 2\,\text{tang}\,x + 1 = 0$
E' un'equazione di secondo grado nell'incognita tang x: applico la formula risolutiva.

Veramente, se l'osservi bene si puo' risolvere in modo piu' semplice

---

$$\text{tang}x = \frac{-2 \pm \sqrt{(4-4)}}{2}$$

Potevamo usare la formula ridotta
Otteniamo $\text{tang}\,x = -1$

Il valore dell'angolo corrispondente a tang x = 1 e' 45°
Quindi abbiamo:
$x = -45° + k\,180°$
o preferibilmente:
$x = -\pi/4 + k\,\pi$
Non e' finita!
Siccome ho supposto $\cos x \neq 0$ devo controllare se la soluzione $\cos x = 0$ soddisfa l'equazione di partenza; siccome $\cos x = 0$ si ottiene nel primo giro per gli angoli 90° e 270° devo controllare i valori dell'equazione:
$2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -2$
a 90° ed a 270°

- Controllo per x = 90° (se vuoi essere preciso usa $\pi/2$):
  $2 \operatorname{sen} 90° \cos 90° - \operatorname{sen}^2 90° - \cos^2 90° = -2$
  $-1 = 2$ x = 90° non e' soluzione.
- Controllo per x = 270° (se vuoi essere preciso usa $3\pi/2$):
  $2 \operatorname{sen} 270° \cos 270° - \operatorname{sen}^2 270° - \cos^2 270° = -2$
  $-1 = 2$ x = 270° non e' soluzione.

Quindi la soluzione finale e':
$x = -45° + k\,180°$
oppure (utilizzando il primo angolo dall'origine degli angoli):
$x = 135° + k\,180°$
o meglio:
$x = 3\pi/4 + k\,\pi$

c) Equazioni in seno e coseno di vario tipo

Tutte le equazioni trigonometriche vanno o ricondotte ai tre tipi fondamentali, oppure ai tipi specifici della trigonometria.
Per fare questo, a livello indicativo, vi sono alcune regole da seguire:
1) ridurre tutti gli angoli allo stesso angolo
2) portare tutti i termini prima dell'uguale
3) applicare le regole della scomposizione di un polinomio in fattori
4) se non riesci a scomporre ridurre (senza introdurre radicali) tutte le funzioni alla stessa funzione (tutto in seno, oppure tutto in coseno) poi torna al punto precedente;
5) uguagliare a zero ogni fattore
Naturalmente, come in tutte le regole, esistono delle eccezioni, che dovranno essere considerate esercizio per esercizio.
Potra' essere necessario applicare solo qualche regola o tutte le regole, le regole potranno essere applicate nell'ordine dato od in ordine diverso, potremo utilizzare delle scorciatoie se possibile, eccetera.

Qualche esercizio chiarira' meglio il metodo. Prova a risolvere:
Esercizio 1 - Risolvere l'equazione:
$\operatorname{sen} 4x = \cos 2x$
Il primo angolo e' 4x, il secondo e' 2x riduciamo tutto a 2x (formule di duplicazione):
$2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x = \cos 2x$
Portiamo tutto prima dell'uguale:
$2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x - \cos 2x = 0$
Raccogliamo cos 2x a fattor comune:
$\cos 2x\,(2 \operatorname{sen} 2x - 1) = 0$

Spesso i miei alunni mi dicono che per loro e' difficile fare le scomposizioni con seno e coseno; il mio consiglio e' quello di sostituire sen x e cos x con 2 lettere, ad esempio a e b e scomporre nel nostro caso poniamo:
sen 2x = a
cos 2x = b
Otteniamo:
2 a b - b = 0
Scompongo raccogliendo a fattor comune:
b(2a - 1) = 0
Man mano che si acquistera' dimestichezza con i calcoli non sara' piu' necessario operare lo scambio.

Poniamo ora uguali a zero entrambe i fattori; devo risolvere le due equazioni:

- cos 2x = 0
- 2 sen 2x - 1 = 0

- Risolvo la prima:
cos 2x = 0
So che il coseno vale zero per l'angolo di ±90°, quindi:
2x = ±90° + k 360°
Pero' io cerco l'angolo x e quindi dividiamo per 2:
x = ±45° + k 180°
- Risolvo la seconda:
2 sen 2x - 1 = 0
Ricavo sen 2x:
2 sen 2x = 1
sen 2x = 1/2
So che il seno vale 1/2 per gli angoli 30° e 150° quindi posso scrivere:
  - 2x = 30° + k 360°
  - 2x = 150° + k 360°

Pero' io cerco l'angolo x e quindi dividiamo per 2:

- x = 15° + k 180°
- x = 75° + k 180°

Raccogliendo ho quindi le soluzioni:
x = 15° + k 180°
x = ±45° + k 180°
x = 75° + k 180°
O meglio, ordinando le soluzioni e ricordando che 180 - 45 = 135 per togliere il ±:
x = 15° + k 180°
x = 45° + k 180°
x = 75° + k 180°
x = 135° + k 180°

Ecercizio 2 - Risolvere l'equazione:
sen x - cos x = 2 $\cos^2$x - sen 2x
Abbiamo l'angolo x e l'angolo 2x; riduciamo allo stesso angolo x (formule di duplicazione):
sen x - cos x = 2 $\cos^2$x - 2 sen x cos x
Portiamo tutto prima dell'uguale:
sen x - cos x - 2 $\cos^2$x + 2 sen x cos x = 0
Sono 4 termini; e' un raccoglimento parziale. Raccolgo sen x fra il primo ed il quarto e - cos x fra il secondo ed il terzo:
sen x (1 + 2 cos x) - cos x (1 + 2 cos x) = 0

Ora raccolgo la parentesi:
$(1 + 2 \cos x)(\text{sen } x - \cos x) = 0$

Come nell'altro esercizio, se ti e' difficile scomporre con sen x e cos x sostituiamo delle lettere e scomponiamo:
$\text{sen } x = a$
$\cos x = b$
Otteniamo:
$a - b - 2b^2 + 2ab = 0$
Raccolgo a fra il primo ed il quarto e $-b$ fra il secondo ed il terzo termine:
$a(1 + 2b) - b(1 + 2b) = 0$
$(1 + 2b)(a - b) = 0$

Poniamo ora uguali a zero entrambe i fattori; devo risolvere le due equazioni:

- $1 + 2 \cos x = 0$
- $\text{sen } x - \cos x = 0$

- Risolvo la prima:
$1 + 2\cos x = 0$
Ricavo cos x:
$2\cos x = -1$
$\cos x = -1/2$
So che il coseno vale -1/2 per l'angolo di ±120°, quindi:
$x = \pm 120° + k\,360°$
- Risolvo la seconda:
$\text{sen } x - \cos x = 0$
e' un'equazione lineare omogenea; dividiamo per cos x:
$$\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$
Ricordando che seno fratto coseno vale tangente:
$\text{tang } x - 1 = 0$
$\text{tang } x = 1$
so che la tangente vale 1 per l' angolo di 45° quindi posso scrivere:
$x = 45° + k\,180°$
Controllo che cos x = 0 non sia soluzione: cos x = 0 corrisponde a x= 90° sostituisco nell'equazione
$\text{sen } 90° - \cos 90° = 0$
$1 + 0 = 0$ impossibile
Raccogliendo ho quindi le soluzioni:
$x = 45° + k\,180°$
$x = \pm 120° + k\,360°$

Esercizio 3 - Risolvere l'equazione:
$4\,\text{sen}^2x \cos^2x = 1$
Stavolta abbiamo gli stessi angoli.
Spostiamo l'1 prima dell'uguale:
$4\,\text{sen}^2x \cos^2x - 1 = 0$
Otteniamo una differenza di quadrati:
$(2\,\text{sen}x \cos x + 1)(2\,\text{sen}x \cos x - 1) = 0$
Poniamo ora uguali a zero entrambe i fattori; devo risolvere le due equazioni:

- $2\,\text{sen } x \cos x + 1 = 0$
- $2\,\text{sen } x \cos x - 1 = 0$
- Risolvo la prima:
$2\,\text{sen } x \cos x + 1 = 0$

E' un'equazione lineare non omogenea di secondo grado:
$2 \text{ sen } x \cos x + \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0$
Divido tutti i termini per $\cos^2 x$, ottengo:
$2 \text{ tang } x + \text{tang}^2 x + 1 = 0$
Ordino:
$\text{tang}^2 x + 2 \text{ tang } x + 1 = 0$
Osservo che si tratta di un quadrato di binomio; se non te ne accorgi devi risolvere l'equazione:
$(\text{tang } x + 1)^2 = 0$
$\text{tang } x + 1 = 0$
$\text{tang } x = -1$
So che la tangente vale -1 per l'angolo di 135°, quindi:
$x = 135° + k\, 180°$

- Risolvo la seconda:
$2 \text{ sen } x \cos x - 1 = 0$
E' un'equazione lineare non omogenea di secondo grado:
$2 \text{ sen } x \cos x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$
Divido tutti i termini per $-\cos^2 x$, ottengo:
$-2 \text{ tang } x + \text{tang}^2 x + 1 = 0$
Ordino:
$\text{tang}^2 x - 2 \text{ tang } x + 1 = 0$
Osservo che si tratta di un quadrato di binomio; se non te ne accorgi devi risolvere l'equazione ($tang x = \frac{2 \pm \sqrt{(4-4)}}{2} = 1$):
$(\text{tang } x - 1)^2 = 0$
$\text{tang } x - 1 = 0$
$\text{tang } x = 1$
So che la tangente vale 1 per l'angolo di 45°, quindi:
$x = 45° + k\, 180°$
Raccogliendo ho quindi le soluzioni:
$x = 45° + k\, 180°$
$x = 135° + k\, 180°$
o meglio, osservando le soluzioni, posso scrivere:
$x = 45° + k\, 90°$

Esercizio 4 - Risolvere l'equazione:
$\sqrt{3}\,(1 - \text{senx } \cos x) + 2 \text{ senx} = \text{senx sen } 2x$
Abbiamo l'angolo x e l'angolo 2x; riduciamo allo stesso angolo x (formule di duplicazione):
$\sqrt{3}\,(1 - \text{senx } \cos x) + 2 \text{ senx} = \text{senx } (2 \text{ senx } \cos x)$
$\sqrt{3}\,(1 - \text{senx } \cos x) + 2 \text{ senx} = 2 \text{ sen}^2 x \cos x$
Moltiplichiamo e portiamo tutto prima dell'uguale:
$\sqrt{3} - \sqrt{3} \text{ senx } \cos x + 2 \text{ senx} - 2 \text{ sen}^2 x \cos x = 0$
Sono 4 termini: e' un raccoglimento parziale. Raccolgo $\sqrt{3}$ fra il primo ed il secondo e $2 \text{sen } x$ fra il terzo ed il quarto:
$\sqrt{3}\,(1 - \text{senx } \cos x) + 2 \text{ sen } x\,(1 - \text{senx } \cos x) = 0$
Ora raccolgo la parentesi:
$(1 - \text{senx } \cos x)\,(\sqrt{3} + 2 \text{ sen } x) = 0$

Come negli altri esercizi se ti e' difficile scomporre con sen x e cos x sostituiamo delle lettere e scomponiamo:
poniamo $\text{sen } x = a$ $\cos x = b$

Otteniamo:
$\sqrt{3}$ - ab$\sqrt{3}$+ 2a - 2a^{2}b
Raccolgo $\sqrt{3}$ fra il primo ed il secondo e 2a fra il terzo ed il quarto termine:
$\sqrt{3}$ (1 - ab) + 2a(1 - ab) = 0
(1 - ab) ($\sqrt{3}$+ 2a) = 0

Poniamo ora uguali a zero entrambe i fattori; devo risolvere le due equazioni:

- 1 - senx cosx = 0
- $\sqrt{3}$+ 2 sen x = 0

- Risolvo la prima:
1 - senx cosx = 0
Cambio segno:
senx cosx - 1 = 0
E' un'equazione lineare non omogenea di secondo grado:
sen x cos x - sen^{2}x - cos^{2}x = 0
Divido tutti i termini per - cos^{2}x ottengo:
-tang x + tang^{2}x + 1 = 0
Ordino:
tang^{2}x - tang x + 1 = 0
Per scomporre risolvo l'equazione di secondo grado:
$$\text{tangx} = \frac{1 \pm \sqrt{(1-4)}}{2} = 1$$
il termine sotto radice e' minore di zero quindi nessuna soluzione.
- risolvo la seconda
$\sqrt{3}$+ 2 senx = 0
e' un'equazione tipica; ricaviamo senx:
$$\text{senx} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$
So che il seno e' $\sqrt{3}$ /2 per l' angolo di 60°.
Quindi avra' valore - $\sqrt{3}$/2 per l'angolo 240 ° (ho usato gli archi associati)
ricordando poi che 180° - 240° = - 60° = 300° posso scrivere:
x = 240° + k 360°
x = 300° + k 360°
Raccogliendo ho quindi le soluzioni:
x = 240° + k 360°
x = 300° + k 360°

Esercizio 5 - Risolvere l'equazione:
sen 3x cos 5x = sen 2x cos 6x
Abbiamo gli angoli 3x 5x 2x e 6x; non e' il caso di ridurre allo stesso angolo; utilizziamo le formule di Werner .
Scriviamo prima le funzioni con gli angoli maggiori (dovendo fare la sottrazione):
cos 5x sen 3x = cos 6x sen 2x
Applico ora la seconda formula ed ottengo:
$$\frac{\text{sen}(5x+3x) - \text{sen}(5x-3x)}{2} = \frac{\text{sen}(6x+2x) - \text{sen}(6x-2x)}{2}$$
Sommo ai numeratori e tolgo i denominatori:
sen 8x - sen 2x = sen 8x - sen 4x
Porto prima dell'uguale:
sen 8x - sen 2x - sen 8x + sen 4x = 0

Sommo ed ordino:
$\text{sen } 4x - \text{sen } 2x = 0$
Il primo angolo e' 4x, il secondo e' 2x; riduciamo tutto a 2x (formule di duplicazione):
$2 \text{ sen } 2x \cos 2x - \text{sen } 2x = 0$
Raccogliamo sen 2x a fattor comune:
$\text{sen } 2x\,(2 \cos 2x - 1) = 0$
Poniamo ora uguali a zero entrambe i fattori; devo risolvere le due equazioni :

- $\text{sen } 2x = 0$
- $2 \cos 2x - 1 = 0$

- Risolvo la prima:
  $\text{sen } 2x = 0$
  So che il seno vale zero per l'angolo di 0° e di 180°, quindi:
  $2x = 0° + k\, 360°$
  $2x = 180° + k\, 360°$
  Pero' io cerco l'angolo x e quindi dividiamo per 2:
  $x = 0° + k\, 180°$
  $x = 90° + k\, 180°$
- Risolvo la seconda:
  $2 \cos 2x - 1 = 0$
  Ricavo cos 2x:
  $2 \cos 2x = 1$
  $\cos 2x = 1/2$
  So che il coseno vale 1/2 per gli angoli ±60° quindi posso scrivere:
  $2x = \pm 60° + k\, 360°$
  pero' io cerco l'angolo x e quindi dividiamo per 2:
  $x = \pm 30° + k\, 180°$

Raccogliendo, ho quindi le soluzioni:
$x = 0° + k\, 180°$
$x = \pm 30° + k\, 180°$
$x = 90° + k\, 180°$
o meglio, ordinando le soluzioni e ricordando che 180 - 30 = 150 per togliere il ±:
$x = 0° + k\, 180°$
$x = 30° + k\, 180°$
$x = 90° + k\, 180°$
$x = 150° + k\, 180°$

4. Sistemi trigonometrici

I sistemi trigonometrici sono piuttosto complicati: e' possibile che con due equazioni ci siano 4 funzioni: senx cosx seny cosy, oppure che vi siano solo due funzioni. Ricordiamoci che un sistema di due equazioni per essere risolvibile deve avere due incognite: cioe' se ci son 4 funzioni le incognite saranno x e y; mentre, se ci sono due funzioni, potremo considerare incognite le funzioni stesse. Sono possibili quindi vari casi; ne enumeriamo alcuni.

5. Disequazioni trigonometriche

Sono disequazioni in cui l'incognita e' l'angolo.

Anche qui bisogna tener presente che il seno ed il coseno sono funzioni limitate tra -1 ed 1 quindi scritture quali:
$\text{sen } x < 3$
sara' sempre verificata; mentre:
$\cos x > 4$
non sara' mai verificata.

Si possono suddividere in tre tipi fondamentali:

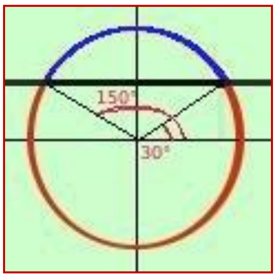
- $\text{sen } x > h$
- $\cos x > n$
- $\text{tang } x > p$

Naturalmente il segno potra' essere $>$ o $<$

a) sen x > h

Vediamo come risolvere la disequazione:

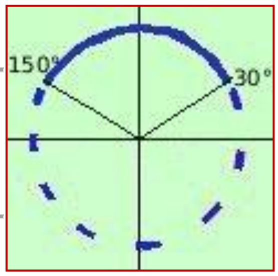
$$\text{senx} > \frac{1}{2}$$



Il valore del seno (1/2) e' un valore che si trova sull'asse verticale del cerchio trigonometrico.
Se dal valore 1/2 sull'asse verticale traccio un'orizzontale la circonferenza viene suddivisa in due archi: nell'arco superiore (quello blu) il valore del seno e' > di ½, mentre nell'arco inferiore (quello rosso) il valore del seno e' < di ½.
So che il valore di 1/2 per il seno corrisponde a 30° e 150°.

Avremo quindi che il seno e' > di 1/2 se l'angolo e' compreso fra 30° e 150°:
$30° < x < 150°$
e siccome siamo sul cerchio trigonometrico dovremo considerare tutte le soluzioni che differiscono di un giro completo:

$$30° + k\,360° < x < 150° + k\,360°$$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)



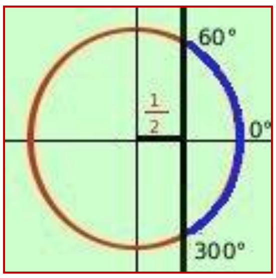
Di solito, quando si risolve una disequazione, si preferisce indicare graficamente la soluzione con un tratto continuo dove e' verificata e con il tratteggio dove non e' verificata, come vedi qui di fianco.

---

b) cos x > n

Anche qui risolviamo su un esempio pratico.
Vediamo come risolvere la disequazione:

$$\cos x > \frac{1}{2}$$

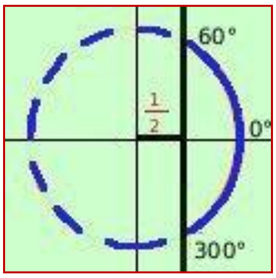


Il valore del coseno (1/2) e' un valore che si trova sull'asse orizzontale del cerchio trigonometrico.
Se dal valore 1/2 sull'asse orizzontale traccio una verticale, la

circonferenza viene suddivisa in due archi: nell'arco a destra (quello blu) il valore del coseno e' > di 1/2, mentre nell'arco a sinistra (quello rosso) il valore del coseno e' < di 1/2 so che il valore di 1/2 per il coseno corrisponde a +60° e -60° (meglio 300°).

Avremo quindi che il coseno e' > di 1/2 se l'angolo e' compreso fra 0° e 30° ed anche fra 300° e 360°:
$0° < x < 60°$
$300° < x < 360°$
e, siccome siamo sul cerchio trigonometrico, dovremo considerare tutte le soluzioni che differiscono di un giro completo:

$$0° + k\,360° < x < 60° + k\,360°$$
$$300° + k\,360° < x < 360° + k\,360°$$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)



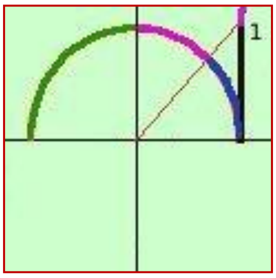
Di solito, quando si risolve una disequazione, si preferisce indicare graficamente la soluzione con un tratto continuo dove e' verificata e con il tratteggio dove non e' verificata come vedi qui di fianco.

---

c) tang x > p

Anche qui risolviamo su un esempio pratico.
Vediamo come risolvere la disequazione:

$$\tan x > 1$$



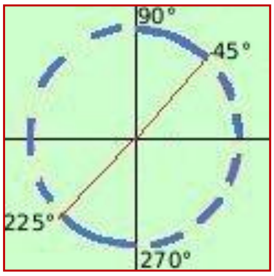
Intanto consideriamo solo una semicirconferenza (da 0° a 180°) perche' la tangente e' periodica di periodo 180°.
Il valore della tangente (1) e' un valore che si trova sulla verticale condotta dall'origine degli archi all'asse x.
La tangente sara' maggiore di 1 per valori piu' in alto del valore 1
Se dal valore 1 cosi' individuato traccio la congiungente al centro posso considerare sulla circonferenza tre archi: nell'arco a destra (quello blu) il valore della tangente e' < di 1, mentre nell'arco al centro (quello viola) il valore va da 1 a +∞; invece a sinistra (quello verde) il valore della tangente va da -∞ a 0.
So che il valore di 1 per la tangente corrisponde a 45°.

Avremo quindi che la tangente e' > di 1 se l'angolo e' compreso fra 45° e 90°:
$45° < x < 90°$
e, siccome siamo sul semicerchio trigonometrico, dovremo considerare tutte le soluzioni che differiscono di un mezzo giro completo:

$$45 + k\,180° < x < 90° + k\,180°$$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)

Qualcuno (tra cui io) preferisce indicare tutte le soluzioni per il primo giro completo:

$45° + k\,360° < x < 90° + k\,360°$
$225° + k\,360° < x < 270° + k\,360°$
con k numero naturale (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...)



Di solito, quando si risolve una disequazione, si preferisce indicare graficamente la soluzione con un tratto continuo dove e' verificata e con il tratteggio dove non e' verificata; inoltre conviene indicare tutte le soluzioni per il primo giro completo come vedi qui di fianco.

d) Esercizi sulle disequazioni trigonometriche

Esercizio 1 - Risolvere la disequazione:

sen 4x > cos 2x

Il primo angolo e' 4x, il secondo e' 2x; riduciamo tutto a 2x (formule di duplicazione):

2 sen 2x cos 2x > cos 2x

Portiamo tutto prima dell'uguale:

2 sen 2x cos 2x - cos 2x > 0

Raccogliamo cos 2x a fattor comune:

cos 2x (2 sen 2x - 1) > 0

E' un prodotto: sara' maggiore di zero quando i fattori avranno segno concorde (cioe' quando entrambe i fattori sono positivi oppure sono entrambe negativi).
Pongo in un sistema entrambe i fattori maggiori di zero e trovo gli intervalli dove i segni sono concordi un piccolo ripasso.

$$\begin{cases} \cos 2x > 0 \\ 2 \operatorname{sen} 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

Risolvo la prima:

cos 2x > 0

So che il coseno e' positivo tra 0° e 90° ed anche tra 270° e 360°, quindi:

0° < 2x < 90° U 270° < 2x < 360°

Con U indico l'unione degli intervalli; pero' io cerco l'angolo x e quindi dividiamo per 2:

0° < x < 45° U 135° < x < 180°

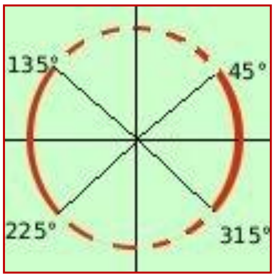
Inoltre, siccome dividendo per 2 ottengo che ho la periodicita' di 180°, dovro' anche considerare:

180° < x < 225° U 315° < x < 360°

Mettendo assieme:

0° < x < 45° U 135° < x < 225° U 315° < x < 360°

A destra la rappresentazione grafica:



Risolvo la seconda:

$2 \text{ sen } 2x - 1 > 0$

Ricavo sen 2x:

$2 \text{ sen } 2x > 1$

$\text{sen } 2x > 1/2$

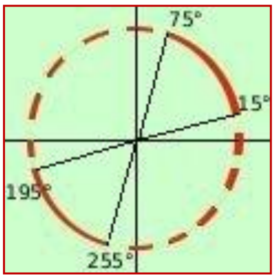
So che il seno e' superiore ad 1/2 per gli angoli tra 30° e 150° quindi posso scrivere:

$30° < 2x <+ 150$, pero' io cerco l'angolo x e quindi dividiamo per 2:

$15° < x < 75°$

Inoltre, siccome dividendo per 2 ottengo che ho la periodicita' di 180°, dovro' anche considerare:

$195° < x < 255°$

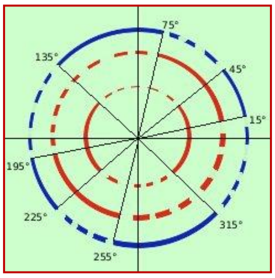


Mettendo assieme:

$15° < x < 75° \cup 195° < x < 255°$

Ora cerco le soluzioni concordi della prima e della seconda disequazione; riporto all'interno i due grafici trovati.
Indico in blu a linea continua dove sono concordi, in blu a linea tratteggiata dove sono discordi.
Raccogliendo ho quindi le soluzioni:

$15°<x<45° \cup 75°<x<135° \cup 195°<x<225° \cup 255°<x<315°$



Esercizio 2 - Risolvere la disequazione:

$\text{sen } x - \cos x < 0$

Si potrebbe risolvere in modo semplice disegnando i grafici delle due funzioni y=senx ed y=cosx e considerare i punti dove il grafico della prima e' inferiore al grafico della seconda, ma vediamo come risolverlo in modo "algebrico".

Stavolta l'equazione associata e' di tipo gia' visto: per risolverla come equazione basterebbe dividere tutti i termini per cos x.
Essendo una disequazione non posso dividere immediatamente per cos x perche' non ne conosco il segno (ti ricordo che moltiplicando una disequazione per un termine negativo il verso cambia).
Allora per risolvere la disequazione distinguiamo due casi:

- $\cos x > 0$ in questo caso, dividendo per cos x, il verso della disequazione resta lo stesso.
- $\cos x < 0$ in questo caso, dividendo per cos x, cambieremo il verso alla disequazione.

Primo caso:

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x} < \dfrac{0}{\cos x} \end{cases}$$

Siccome senx/cosx = tangx

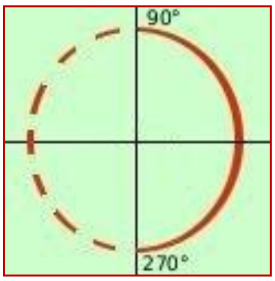
$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \text{tang } x - 1 < 0 \end{cases}$$

Attenzione! Stavolta e' un sistema e dobbiamo cercare solo le soluzioni valide e anche se cercando i segni discordi otterremmo lo stesso risultato (di entrambe i casi) e' concettualmente sbagliato il considerarlo.

$\cos x > 0$

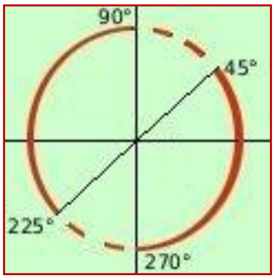
So che il coseno e' positivo tra 0° e 90° ed anche tra 270º e 360°, quindi:

$0° < x < 90° \quad \cup \quad 270° < x < 360°$



Con U indico l'unione degli intervalli:
A destra la rappresentazione grafica; il punto 0° = 360° e' escluso.

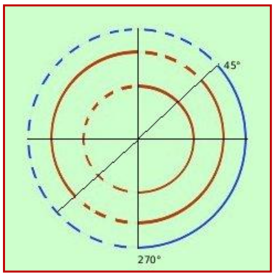
tang x - 1 < 0
tang x < 1
So che la tangente e' minore di 1 se l' angolo e' compreso fra 0° 45° ed anche tra 90° e 180°; inoltre, essendo la tangente periodica di 180° fra 180° e 225° e tra 270° e 360°. quindi posso scrivere:
0° < x < 45° U 90° < x < 225° U 270° < x < 360°
A destra, la rappresentazione grafica.



Mettiamo assieme le soluzioni e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 0° < x < 90° \; U \; 270° < x < 360° \\ 0° < x < 45° \; U \; 90° < x < 225° \; U \; 270° < x < 360° \end{cases}$$

A destra la rappresentazione grafica.



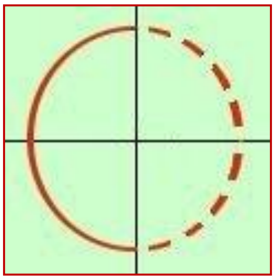
Soluzione prima parte:
0° < x < 45° U 270° < x < 360°
Secondo caso:

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x} > \dfrac{0}{\cos x} \end{cases}$$

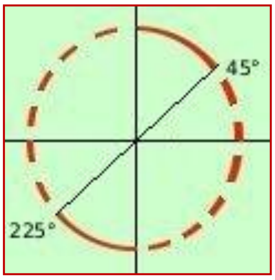
Siccome senx/cosx = tangx:

$$\begin{cases} \cos x < 0 \\ \text{tang } x - 1 > 0 \end{cases}$$

Anche qui e' un sistema e dobbiamo cercare solo le soluzioni valide e, anche se cercando i segni discordi, otterremmo lo stesso risultato (di entrambe i casi); e' concettualmente sbagliato il considerarlo:
cos x < 0
So che il coseno e' negativo tra 90°; e 270° quindi:
90° < x < 270°
A destra, la rappresentazione grafica.



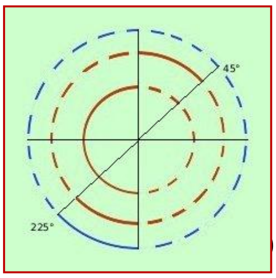
tang x - 1 > 0
tang x > 1
So che la tangente e' maggiore di 1 se l' angolo e' compreso fra 45° e 90° e inoltre (essendo la tangente periodica di 180° fra 225° e 270°; quindi posso scrivere:
45° < x < 90° U 225° < x < 270°
a destra la rappresentazione grafica



Mettiamo assieme le soluzioni e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 90° < x < 270° \\ 45° < x < 90° \; U \; 225° < x < 270° \end{cases}$$

a destra la rappresentazione grafica
Soluzione seconda parte:
225° < x < 270°
Siccome dividiamo per **cos x** dobbiamo considerare a parte il caso di
cos x = 0
sen x - cos x < 0
diventa:
sen x < 0 con x=90° e x = 270°



Per x=90° il seno e' positivo quindi la disequazione non e' verificata
Per x=270° il seno e' negativo quindi la disequazione e' verificata.
$x = 270°$

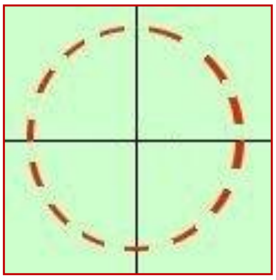
Ora devo prendere sia le soluzioni del primo che del secondo sistema; quindi:
$0° < x < 45° \quad U \quad 225° < x < 360°$

Esercizio 3 - Risolvere la disequazione:
$2\cos^2 x + 3\,\text{sen}x - 3 > 0$
Poiche' abbiamo $\cos^2 x$ cerchiamo di trasformare le funzioni in un unico tipo ricordando la prima relazione fondamentale ($\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$):
$2(1 - \text{sen}^2 x) + 3\,\text{sen}x - 3 > 0$
$2 - 2\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}x - 3 > 0$
$-2\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}x - 1 > 0$
Cambio di segno e di verso:
$2\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}x + 1 < 0$
Considero l'equazione associata:
$2\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}x + 1 = 0$
E' un'equazione di secondo grado in sen x; la risolvo:

$$\text{sen}x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

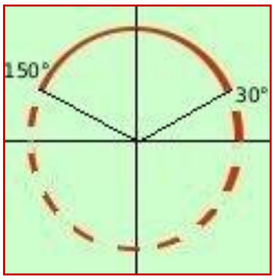
$$\text{sen}x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Ottengo due soluzioni:
$\text{sen}\,x = 1 \qquad \text{sen}\,x = 1/2$
Quindi la mia disequazione diventa decomposizione del trinomio:
$2(\text{sen}\,x - 1)(\text{sen}\,x - 1/2) < 0$
Siccome 2 e' una costante positiva, posso trascurarla:
$(\text{sen}\,x - 1)(\text{sen}\,x - 1/2) < 0$
E' un prodotto: sara' minore di zero quando i fattori avranno segno discorde (cioe' quando il primo fattore sara' positivo ed il secondo negativo o viceversa).
Pongo in un sistema entrambe i fattori maggiori di zero e trovo gli intervalli dove i segni sono discordi, Un piccolo ripasso



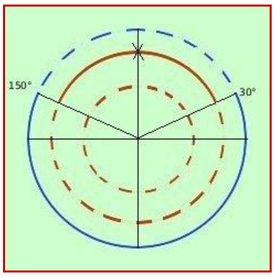
$$\begin{cases} \text{sen}\,x > 1 \\ \text{sen}\,x > 1/2 \end{cases}$$

- Risolvo la prima:
  $\text{sen}\,x > 1$
  So che il seno e' sempre compreso fra -1 ed 1, quindi la disequazione non e' mai verificata.
  A destra la rappresentazione grafica
- Risolvo la seconda:
  $\text{sen}\,x > 1/2$
  So che il seno e' superiore ad 1/2 per gli angoli tra 30° e 150°, quindi posso scrivere:
  $30° < x < 150°$
  A destra la rappresentazione grafica



Ora cerco le soluzioni discordi della prima e della seconda disequazione; riporto all'interno i due grafici trovati.
Indico in blu a linea continua dove sono concordi, in blu a linea tratteggiata dove sono

discordi.
Raccogliendo ho quindi le soluzioni:
$30° < x < 150°$
Non basta: devo controllare se ci sono soluzioni da escludere nell'intervallo; se sostituisco nell'equazione iniziale ad x il valore 90° ottengo:



$$2\cos^2 x + 3\,\mathrm{sen}x - 3 > 0$$
$$2\cos^2 90° + 3\,\mathrm{sen}90° - 3 > 0$$
$$0 + 3 - 3 > 0$$

Quindi devo escludere il valore $x = 90°$
Quindi il risultato finale e':
$30° < x < 150°$ e $x \neq 90°$

D. *Misura dei triangoli (trigonometria)*

Quello che abbiamo fatto sin ora e' la *goniometria*, anche se nell'uso normale viene chiamata trigonometria; ora iniziamo la "vera" trigonometria, cioe' la scienza che studia i triangoli.

1. Introduzione

L'uso della trigonometria segue uno schema di pensiero molto semplice (che pero' non ho trovato in evidenza in nessun libro).
Se consideri i criteri di uguaglianza (congruenza) dei triangoli sai dire quando due triangoli sono uguali, cioe':

- *Due triangoli sono uguali se hanno uguali due lati e l'angolo compreso*
- *Due triangoli sono uguali se hanno uguali due angoli ed il lato compreso*
- *Due triangoli sono uguali se hanno uguali tutti e tre i lati*

Ora se con quei criteri sai dire che due triangoli sono uguali significa anche che quei criteri ti sono sufficienti per risolvere il triangolo (cioe' trovare il valore dei lati ed angoli mancanti).

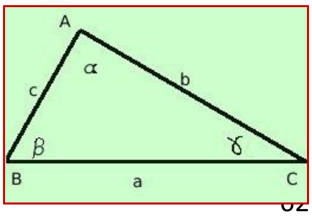
Quindi noi dovremo trovare dei teoremi che ci permettano di risolvere un triangolo, conoscendone:

- *due lati e l'angolo compreso*
- *due angoli ed un lato*
- *tutti e tre i lati*

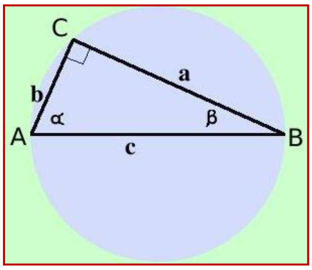
Ultimamente il ministero ha i limitato nei programmi il numero dei teoremi, perche' in effetti, quelli che si facevano un tempo erano sovrabbondanti, nel senso che per trovare qualcosa potevamo usare contemporaneamente piu' teoremi; io preferisco utilizzare tutti quelli che sono stati sempre utilizzati: tu limitati a quelli che fa il tuo docente.

2. Convenzioni

In un triangolo qualunque:
indicheremo i vertici con le lettere maiuscole dell'alfabeto greco:
A B C
indicheremo gli angoli con le lettere dell'alfabeto greco accostandole alle lettere corrispondenti latine:



α β γ
cioe' α sara' sempre nel vertice A,
β sara' sempre nel vertice B eccetera
Indicheremo i lati con le lettere minuscole dell'alfabeto latino:
a b c
in modo che il lato abbia la stessa lettera del vertice opposto;
quindi il lato BC opposto al vertice A si chiamera' a;
quindi il lato AB opposto al vertice C si chiamera' c;
eccetera, come da figura a lato



Quando sara' utile, considereremo il triangolo rettangolo con l'angolo retto in alto e per costruirlo decentemente utilizzeremo la proprieta' che il triangolo inscritto in una semicirconferenza e' sempre rettangolo.

3. Relazioni fra elementi di un triangolo rettangolo

Sul triangolo rettangolo possiamo definire diversi tipi di relazioni:

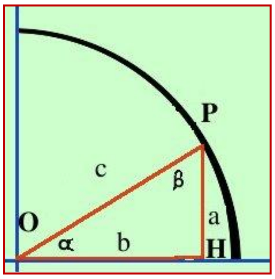
a. dipendenti dal seno
b. dipendenti dal coseno
c. dipendenti dalla tangente
d. dipendenti dalla cotangente
e. riepilogo
f. esercizi

Ricordo che nel triangolo rettangolo conosciamo a priori il valore di un angolo (90ï¿½), quindi potremo risolvere il triangolo conoscendone semplicemente:

- un lato ed un angolo
- due lati

a) Dipendenti dal seno

Considero il triangolo rettangolo inscritto in un quarto di circonferenza come nella figura a fianco.



Dalla definizione di seno abbiamo:

$$\text{sen}\alpha = \frac{PH}{OP}$$

Sostituendo ai lati il loro valore:

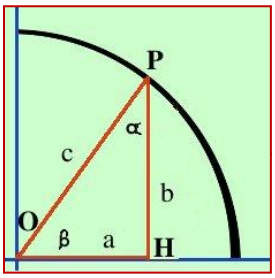
$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$$

Ricavo **a**

$c \text{ sen } \alpha = a$

Quindi per la proprieta' simmetrica:

$a = c \text{ sen } \alpha$



Ora posso ribaltare il triangolo in modo che nel punto O vada l'angolo β; dopo il ribaltamento ho cambiato le lettere ai vertici mantenendo

inalterati invece i nomi degli angoli e dei lati.
Dalla definizione di seno abbiamo:

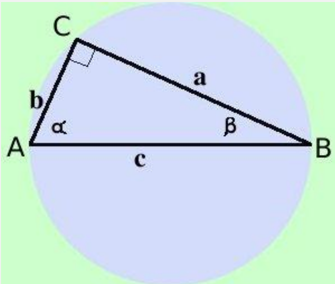
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{PH}{OP}$$

Sostituendo ai lati il loro valore:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$$

Ricavo **b** :
$c \operatorname{sen} \beta = b$
Quindi per la proprieta' simmetrica:
$b = c \operatorname{sen} \beta$
Quindi raccogliendo possiamo dire:

In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto considerato

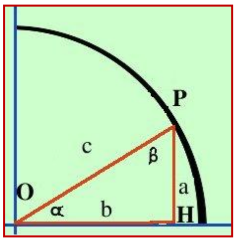


$a = c \operatorname{sen} \alpha$

$b = c \operatorname{sen} \beta$

b) Dipendenti dal coseno

Considero il triangolo rettangolo inscritto in un quarto di circonferenza come nella figura a fianco.



Dalla definizione di coseno abbiamo:

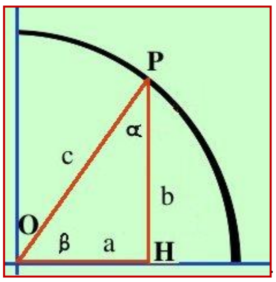
$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP}$$

Sostituendo ai lati il loro valore :

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Ricavo **b** :
$c \cos \alpha = b$
Quindi per la proprieta' simmetrica:
$b = c \cos \alpha$

Ora posso ribaltare il triangolo in modo che nel punto O vada l'angolo β;
dopo il ribaltamento ho cambiato le lettere ai vertici mantenendo inalterati invece i nomi degli angoli e dei lati.
Dalla definizione di coseno abbiamo:



$$\cos\beta = \frac{OH}{OP}$$

Sostituendo ai lati il loro valore:

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

Ricavo **a** :

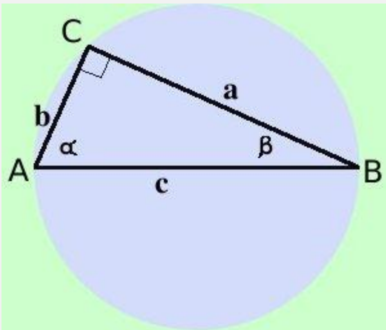
$c \cos \beta = a$

Quindi :

$a = c \cos \beta$

Quindi raccogliendo possiamo dire:

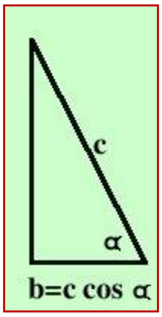
In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto considerato



$b = c \cos \alpha$

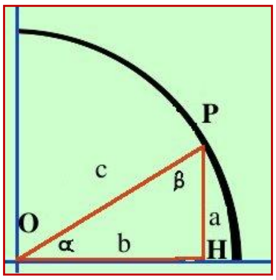
$a = c \cos \beta$

Per farla piu' intuitiva si puo' dire che il coseno proietta l'ipotenusa sul cateto.
Vedi l'esempio a fianco
Il lato **b** e' la proiezione verticale del lato **c**; questo fatto assumera' molta importanza in fisica.



c) Dipendenti dalla tangente

Considero il triangolo rettangolo inscritto in un quarto di circonferenza come nella figura a fianco.
Dalla seconda relazione fondamentale, cioe' :



$$\text{tang}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

abbiamo:

$$\text{tang}\alpha = \frac{PH}{OH}$$

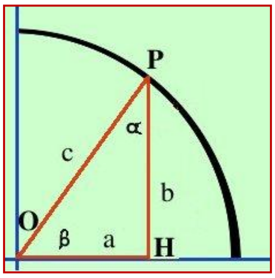
Sostituendo ai lati il loro valore:

$$\text{tang}\alpha = \frac{a}{b}$$

Ricavo **a** :

$b \,\text{tang}\, \alpha = a$

Quindi per la proprieta' simmetrica:
$a = b \text{ tang } \alpha$



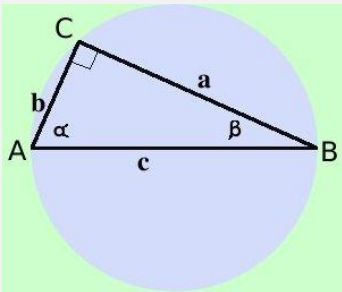
Ora posso ribaltare il triangolo in modo che nel punto O vada l'angolo β
dopo il ribaltamento ho cambiato le lettere ai vertici mantenendo inalterati invece i nomi degli angoli e dei lati
abbiamo:

$$\text{tang}\beta = \frac{PH}{OH}$$

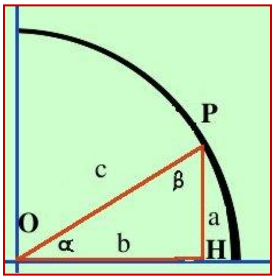
Sostituendo ai lati il loro valore:

$$\text{tang}\beta = \frac{b}{a}$$

Ricavo **b** :
$a \text{ tang } \beta = b$ quindi:
$b = a \text{ tang}\beta$
Quindi raccogliendo possiamo dire:

In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto considerato	
	$a = b \text{ tang } \alpha$ $b = a \text{ tang } \beta$

d) Dipendenti dalla cotangente



Considero il triangolo rettangolo inscritto in un quarto di circonferenza come nella figura a fianco.
Dalla relazione :

$$\text{cotang}x = \frac{1}{\text{tang}x} = \frac{\cos x}{\text{sen}x}$$

Abbiamo:

$$\text{cotang}\alpha = \frac{OH}{PH}$$

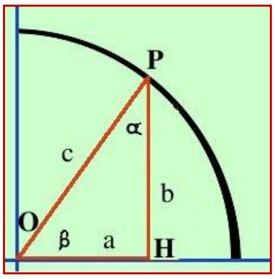
Sostituendo ai lati il loro valore:

$$\text{cotang}\alpha = \frac{b}{a}$$

Ricavo **b**
$a \text{ cotang } \alpha = b$

Quindi per la proprieta' simmetrica:
b = a cotang α

Ora posso ribaltare il triangolo in modo che nel punto O vada l'angolo β.
Dopo il ribaltamento ho cambiato le lettere ai vertici mantenendo inalterati invece i nomi degli angoli e dei lati.



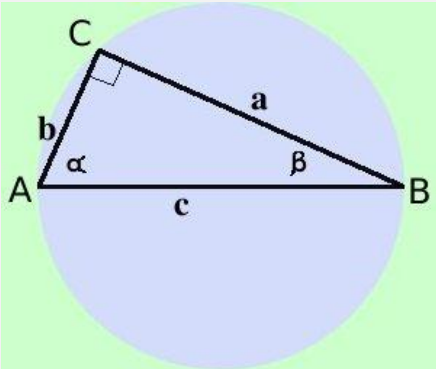
Abbiamo:

$$\text{cotang}\beta = \frac{OH}{PH}$$

Sostituendo ai lati il loro valore:

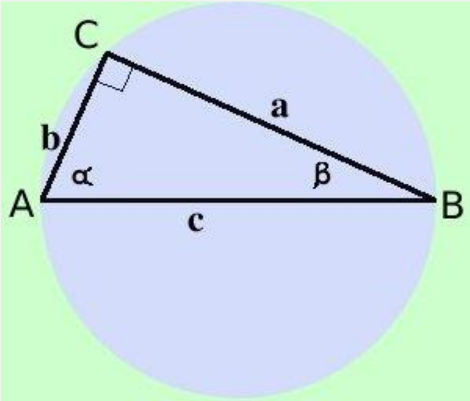
$$\text{cotang}\beta = \frac{a}{b}$$

Ricavo **a** :
b cotang β= a
quindi
a = b cotang β
Quindi raccogliendo possiamo dire:

In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al primo cateto considerato	
	b = a cotang α a = b cotang β

e) Tabella di riepilogo

	a = c senα b = c sen β In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto considerato
	b = c cosα a = c cos β In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto considerato



$a = b \tan\alpha$ $\quad b = a \tan\beta$
In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto considerato

$b = a \cot\alpha$ $\quad a = b \cot\beta$
In ogni triangolo rettangolo un cateto e' uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al primo cateto considerato

4. Teorema dei seni

Iniziamo qui una serie di teoremi che ci permetteranno di risolvere i triangoli qualunque utilizzando il teorema dei seni; posso:

- conoscendo due lati ed un angolo, trovare l'altro angolo
- conoscendo due angoli ed un lato, trovare l'altro lato

Esempi:

Primo esempio:

Nel triangolo ABC ho:

a=5 cm. $\quad \alpha = 30°$ $\quad \beta = 45°$

In queste condizioni posso trovare **b.**

Imposto l'uguaglianza:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}$$

cioe':

$$\frac{5}{\text{sen}30°} = \frac{b}{\text{sen}45°}$$

Faccio il minimo comune multiplo sen 30° sen 45°:

$$\frac{5 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30° \text{ sen } 45°} = \frac{b \text{ sen } 30°}{\text{sen } 30° \text{ sen } 45°}$$

Leggo alla rovescia:

$$\frac{b \text{ sen } 30°}{\text{sen } 30° \text{ sen } 45°} = \frac{5 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30° \text{ sen } 45°}$$

Elimino i denominatori:

$b \text{ sen } 30° = 5 \text{ sen } 45°$

Ricavo **b** :

$$b = \frac{5 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30°}$$

$$b = \frac{5\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{1}} = 5\sqrt{2}$$

Secondo esempio:

Nel triangolo ABC ho:

a = 6 cm. $\quad$ b = 8 cm. $\quad \alpha = 30°$

In queste condizioni posso trovare β:

Imposto l'uguaglianza:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}$$

cioe':

$$\frac{6}{sen30°} = \frac{8}{sen\beta}$$

Faccio il minimo comune multiplo sen 30° sen β:

$$\frac{6\text{sen}\beta}{\text{sen}30°\text{sen}\beta} = \frac{8\text{sen}30°}{\text{sen}30°\text{sen}\beta}$$

Elimino i denominatori:

6 sen β= 8 sen 30°

Ricavo sen β:

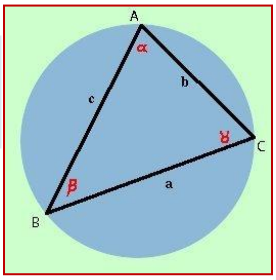
$$\text{sen}\beta = \frac{8\text{sen}30°}{6}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{2}{3}$$

Quindi ho il valore del seno di beta e possiamo risalire all'angolo con le tavole od una calcolatrice e troviamo circa 42°, o meglio lo indichiamo nel seguente modo:
b = arcsen 2/3

Teorema:

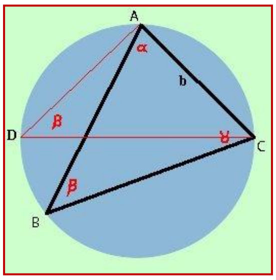
In ogni triangolo e' costante il rapporto fra ogni lato ed il seno dell'angolo opposto e tale costante equivale al doppio del raggio del cerchio circoscritto al triangolo



$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2r$$

Dimostriamolo!

Consideriamo un triangolo ed il suo cerchio circoscritto; prendiamo un vertice, ad esempio C, e da esso tracciamo il diametro del cerchio CD, colleghiamo poi D con A.



Il triangolo CDA e' rettangolo perche' iscritto in una semicirconferenza (CD=2r); inoltre l'angolo in D come angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AC vale β e quindi possiamo scrivere per i teoremi sui triangoli rettangoli :

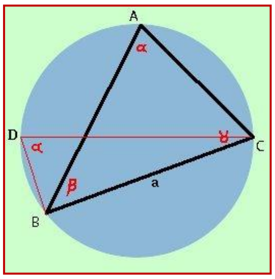
b = 2r sen β

e quindi

$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = 2r$$

Consideriamo ancora lo stesso vertice C e tracciamo sempre il diametro CD ma stavolta colleghiamo il punto D al vertice B.

Otteniamo il triangolo CDB.



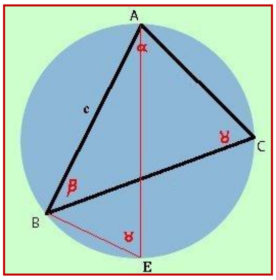
Il triangolo CDB e' rettangolo perche' iscritto in una semicirconferenza (CD=2r), inoltre l'angolo in D come angolo alla circonferenza che insiste sull'arco BC vale α e quindi possiamo scrivere per i teoremi sui triangoli rettangoli:

a = 2r sen α

e quindi

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = 2r$$

Adesso invece cambiamo vertice per poter considerare il terzo angolo e prendiamo il vertice A.
Tracciamo il diametro AE e colleghiamo il punto E al vertice B; otteniamo il triangolo AEB .
Il triangolo AEB e' rettangolo perche' iscritto in una semicirconferenza (AE=2r), inoltre l'angolo in E come angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AB vale γ
e quindi possiamo scrivere per i teoremi sui triangoli rettangoli:
$c = 2r \operatorname{sen} \gamma$
e quindi



$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r$$

Quindi mettendo assieme le tre relazioni, ottengo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r$$

In qualche testo il teorema viene anche chiamato teorema delle corde

5. Teorema delle proiezioni

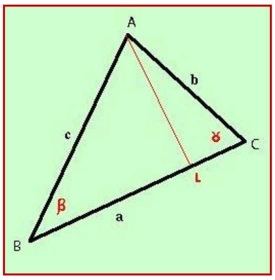
Si chiama *delle proiezioni* perche' e' come se proiettiamo due lati del triangolo sul terzo lato

Con questo teorema conoscendo due lati e due angoli posso trovare il terzo lato.
Non e' che sia molto esaltante, anche perche' i dati sono sovrabbondanti (2 lati e 2 angoli) pero' servira' per dimostrare il teorema di Carnot.

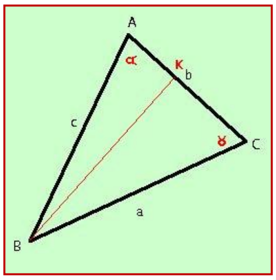
Teorema:
In ogni triangolo un lato e' uguale alla somma dei prodotti degli altri due lati per il coseno degli angoli compresi fra quei lati e il lato cercato

$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta$$
$$b = a \cos\gamma + c \cos\alpha$$
$$c = a \cos\beta + b \cos\alpha$$

Dimostriamo la prima relazione.
Dal punto A mando la perpendicolare AL sul lato BC.
Ottengo i due triangoli ABL e ALC; il triangolo ABL e' rettangolo e quindi, per il teorema del coseno sui triangoli rettangoli abbiamo
$BL = AB \cos \beta = c \cos \beta$.
Anche il triangolo ACL e' rettangolo; quindi, per lo stesso teorema, abbiamo:
$LC = AC \cos \gamma = b \cos \gamma$
ma noi abbiamo che:
$BC = a = BL + LC = c \cos \beta + b \cos \gamma$
Come volevamo.

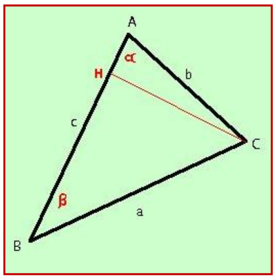


Dimostriamo la seconda relazione.



Dal punto B mando la perpendicolare BK sul lato AC.
Ottengo i due triangoli ABK e BKC; il triangolo ABK e' rettangolo e quindi, per il teorema del coseno sui triangoli rettangoli abbiamo:
$AK = AB \cos \alpha = c \cos \alpha$
Anche il triangolo BKC e' rettangolo; quindi, per lo stesso teorema, abbiamo:
$KC = BC \cos \gamma = a \cos \gamma$
ma noi abbiamo che:
$AC = b = AK + KC = c \cos \alpha + a \cos \gamma$
Come volevamo.

Dimostriamo la terza relazione.



Dal punto C mando la perpendicolare CH sul lato AB.
Ottengo i due triangoli ACH e CHB; il triangolo ACH e' rettangolo e quindi, per il teorema del coseno sui triangoli rettangoli abbiamo
$AH = AC \cos \alpha = b \cos \alpha$
Anche il triangolo CHB e' rettangolo; quindi, per lo stesso teorema, abbiamo:
$HB = CB \cos \beta = a \cos \beta$
ma noi abbiamo che:
$AB = c = AH + HB = b \cos \alpha + a \cos \beta$
Come volevamo:

6. Teorema di Carnot (o teorema di Pitagora generalizzato)

Questo e' uno di quei pochi teoremi che e' assolutamente necessario sapere e saper applicare.
Equivale al secondo criterio di congruenza: conoscendo due lati e l'angolo compreso posso trovare il terzo lato.
Esempio:
Nel triangolo ABC ho:
$a = 5$ cm. $b = 7$ cm. $\gamma = 60°$
Devo trovare **c**; imposto la relazione:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
$c^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos 60°$
$c^2 = 25 + 49 - 70(1/2)$
$c^2 = 25 + 49 - 35$
$c^2 = 39$
Estraendo la radice e considerando solo la soluzione positiva (e' un segmento!):
$c = \sqrt{39}$

Teorema:
In ogni triangolo il quadrato di un lato e' uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio prodotto degli stessi lati per il coseno dell' angolo fra essi compreso

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

Dimostriamo la prima relazione:

Prendiamo le relazioni delle proiezioni:
$a = b \cos\gamma + c \cos\beta$
$b = a \cos\gamma + c \cos\alpha$
$c = a \cos\beta + b \cos\alpha$
Moltiplichiamo la prima relazione per a;
moltiplichiamo la seconda relazione per $-b$;
moltiplichiamo la terza relazione per $-c$:
$a^2 = ab \cos\gamma + ac \cos\beta$
$-b^2 = -ab \cos\gamma - bc \cos\alpha$
$-c^2 = -ac \cos\beta - bc \cos\alpha$
Sommiamo tra loro tutti i termini prima dell'uguale e tutti i termini dopo l'uguale; essendo delle uguaglianze, il risultato e' ancora un'uguaglianza:
$a^2 - b^2 - c^2 = ab \cos\gamma + ac \cos\beta - ab \cos\gamma - bc \cos\alpha - ac \cos\beta - bc \cos\alpha$
Sommo i termini simili:
$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \alpha$
e quindi:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
Come volevamo.

Anche le altre relazioni si dimostrano nello stesso modo; prova a farle da solo per esercizio e poi confronta i risultati:
per la seconda moltiplica la prima per -a la seconda per b e la terza per –c;
per la terza moltiplica la prima per -a, la seconda per -b e la terza per c.

Dimostriamo la seconda relazione:
Partiamo dalle relazioni delle proiezioni:
$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$
$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$
$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$
Moltiplichiamo la prima relazione per $-a$;
moltiplichiamo la seconda relazione per b;
moltiplichiamo la terza relazione per $-c$:
$-a^2 = -ab \cos \gamma - ac \cos \beta$
$b^2 = ab \cos \gamma + bc \cos \alpha$
$-c^2 = -ac \cos \beta - bc \cos \alpha$
Sommiamo tra loro tutti i termini prima dell'uguale e tutti i termini dopo l'uguale; essendo delle uguaglianze, il risultato e' ancora un'uguaglianza:
$-a^2 + b^2 - c^2 = -ab \cos \gamma - ac \cos \beta + ab \cos \gamma + bc \cos \alpha - ac \cos \beta - bc \cos \alpha$
Sommo i termini simili:
$-a^2 + b^2 - c^2 = -2ac \cos \beta$
e quindi:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
Come volevamo.

Dimostriamo la terza relazione:
Partiamo dalle relazioni delle proiezioni:
$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$
$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$
$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$
Moltiplichiamo la prima relazione per $-a$;
moltiplichiamo la seconda relazione per $-b$;
moltiplichiamo la terza relazione per c:
$-a^2 = -ab \cos \gamma - ac \cos \beta$
$-b^2 = -ab \cos \gamma - bc \cos \pm$
$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha$
Sommiamo tra loro tutti i termini prima dell'uguale e tutti i termini dopo l'uguale; essendo delle uguaglianze, il risultato e' ancora un'uguaglianza:
$-a^2 - b^2 + c^2 = -ab \cos \gamma - ac \cos \beta - ab \cos \gamma - bc \cos \alpha + ac \cos \beta + bc \cos \alpha$
Sommo i termini simili:

$- a^2 - b^2 + c^2 = -2ab \cos \gamma$
e quindi:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
Come volevamo.

Equivale anche al terzo criterio di congruenza dei triangoli; conoscendo i tre lati posso trovare gli angoli con le formule inverse:

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Formule inverse: vediamo di calcolare la prima formula inversa, le altre le lascio fare a te:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
Devo ricavare $\cos\alpha$, lo porto prima dell'uguale e porto a^2 dopo l'uguale:
$2bc \cos \alpha = -a^2 + b^2 + c^2$
Divido tutto per 2bc:

$$\frac{2bc \cos\alpha}{2bc} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

Semplifico ed ottengo:

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

Esempio:
Nel triangolo ABC ho
a = 5 cm. b = 4 cm. c = 3 cm
troviamo un angolo ad esempio α

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-5^2 + 4^2 + 3^2}{2 \cdot (4)(3)} = \frac{0}{24} = 0$$

In questo caso ho ottenuto 0 quindi si tratta di un angolo di 90° (il triangolo di lati 3,4 e 5 e' rettangolo)

Vediamo invece di trovare il valore dell'angolo β

$$\cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \frac{5^2 - 4^2 + 3^2}{2 \cdot (5)(3)} = 30 = 0$$

quindi, usando le tavole o la calcolatrice ottengo per beta un valore di circa 53°.
se voglio un valore preciso devo scrivere
β= arc cos 0,6
Cioe' beta e' l'arco il cui coseno vale 0,6

E. Applicazioni della trigonometria

Vediamo ora di applicare quanto studiato a problemi effettivi, anche pratici; vedremo applicazioni in vari ambiti

---

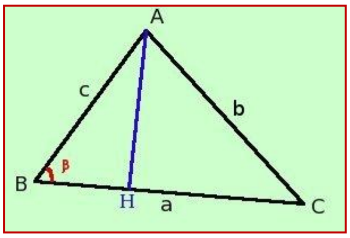
- Applicazioni alla Geometria
- Applicazioni alla Topografia e Geodesia
- Applicazioni all'Astronomia
- Applicazioni alla Fisica
- Applicazioni alla Tecnica

1. Applicazioni alla Geometria

Vediamone alcune perche' sono tante che e' impossibile catalogarle tutte

- Area del triangolo
- Area del parallelogramma
- Formula di Erone
- Raggio circonferenza inscritta
- Raggio circonferenza circoscritta
- Mediane di un triangolo
- Bisettrici di un triangolo
- Area di un quadrilatero qualunque

a) Area del triangolo *(conoscendone due lati e l'angolo compreso)*



Consideriamo un triangolo qualunque **ABC** e supponiamo di conoscerne due lati e l'angolo compreso: in queste condizioni posso ricavare una formula che mi permette di avere l'area del triangolo stesso.
Supponiamo di conoscere:

$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{c}$

$\overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{a}$

con **a** e **c** numeri noti ed anche la misura di β.
Per trovare l'area del triangolo devo eseguire il calcolo:

$$\text{Area} = \frac{\text{Base x Altezza}}{2}$$

Consideriamo come base $\overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{a}$
Per calcolare la misura dell'altezza **AH** considero il triangolo rettangolo **ABH**, e applico il teorema gia' visto sui triangoli rettangoli:
un cateto e' uguale all'ipotenusa per i seno dell'angolo opposto al primo cateto considerato:

$\overline{\mathbf{AH}} = \overline{\mathbf{AB}}\ \mathbf{sen}\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{a\ sen}\ \boldsymbol{\beta}$

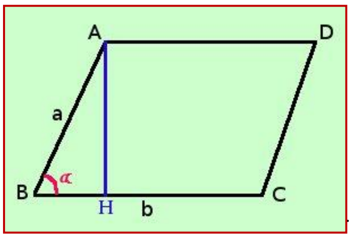
Sostituendo nell'espressione dell'area ottengo:

$$\text{Area} = \frac{\text{Base x Altezza}}{2} = \frac{\text{c} \cdot \text{a sen}\beta}{2}$$

Quindi possiamo dire che:
L'area di un triangolo e' uguale la prodotto fra la misura di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso, il tutto moltiplicato per ½

$$A_s = \frac{1}{2} a\ c\ sen\beta$$

b) Area del parallelogramma *(conoscendone due lati adiacenti e l'angolo compreso)*



Consideriamo un parallelogramma qualunque **ABC** e supponiamo di conoscerne due lati e l'angolo compreso: in queste condizioni posso ricavare una formula che mi permette di avere l'area del parallelogramma stesso.
Supponiamo di conoscere:

$\overline{\mathbf{AB}} = a$
$\overline{\mathbf{BC}} = b$
con **a** e **c** numeri noti ed anche la misura di α.
Per trovare l'area del parallelogramma devo eseguire il calcolo:

Area = Base x Altezza

Consideriamo come base $\overline{\mathbf{BC}} = b$.
Per calcolare la misura dell'altezza **AH** considero il triangolo rettangolo **ABH**, e applico il teorema gia' visto sui triangoli rettangoli:
un cateto e' uguale all'ipotenusa per i seno dell'angolo opposto al primo cateto considerato
$\overline{\mathbf{AH}} = \overline{\mathbf{AB}}\ \text{sen}\ \alpha = a\ \text{sen}\ \alpha$
Sostituendo nell'espressione dell'area, ottengo:

Area = Base x Altezza = b · a sen α

Quindi possiamo dire che:
L'area di un parallelogramma e' uguale al prodotto fra la misura di due lati consecutivi per il seno dell'angolo fra essi compreso

$$A_S = ab\ \text{sen}\alpha$$

c) Introduzione alla formula di Erone

La formula di Erone ci permette di trovare l'area di un triangolo conoscendone le misure dei tre lati (in pratica equivale al terzo criterio di congruenza).
Per dimostrare la formula di Erone abbiamo bisogno di usare le formule di Briggs, che prima dovremo dimostrare.

- Formule di Briggs
- Formula di Erone

(1) Formule di Briggs

Le formule di Briggs ci permettono di esprimere il seno, il coseno e la tangente dell'angolo meta' mediante i lati del triangolo.

Per dimostrarle partiamo dalle formula di bisezione per il seno ed il coseno; essendo un angolo di un triangolo sempre minore dell'angolo piatto, l'angolo meta' sara' sempre minore di un angolo retto, cioe' sara' acuto, quindi nelle formule avremo davanti alla radice sempre il segno positivo:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}} \qquad cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$$

Dalle formule inverse del teorema di Carnot abbiamo visto che il coseno si puo' esprimere:

$$cos\alpha = \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

Sostituiamo al coseno (sotto radice) la sua espressione; avremo:

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

ed otteniamo:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$$

Ecco i calcoli per la prima e per la seconda formula.

Calcoli per la prima formula:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

Faccio il mcm al numeratore:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc}}{2}}$$

Ora tolgo la parentesi e, per togliere il 2 al denominatore moltiplico per 1/2:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2}}$$

Sotto moltiplico e sopra metto in evidenza il meno fra i primi 3 termini:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{-(-2bc+b^2+c^2)+a^2}{4bc}}$$

Dentro parentesi ho il quadrato di un binomio, siccome ha davanti il meno scrivo prima il termine positivo:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

Ora scompongo il numeratore come differenza di due quadrati:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

Calcoli per la seconda formula:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

Faccio il mcm al numeratore:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

Ora per togliere il 2 al denominatore moltiplico per 1/2 :

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2}}$$

Sotto moltiplico e sopra metto in evidenza il quadrato del binomio fra i primi 3 termini:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(2bc+b^2+c^2)-a^2}{4bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

Ora scompongo il numeratore come differenza di due quadrati:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

o meglio, ordinando il primo polinomio:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$$

Poniamo ora:

a+b+c = 2p

in questo modo avremo le relazioni:

- **b+c-a = 2(p-a)** Calcolo:

  Partiamo dall'uguaglianza
  a+b+c = 2p
  ricavo **b+c** spostando **a** dopo l'uguale
  b+c = 2p-a
  sottraggo **a** al primo ed al secondo membro dell'uguaglianza
  b+c-a= 2p-a-a
  sommo le **a** al secondo membro
  b+c-a = 2p-2a
  raccolgo il **2** ed ottengo
  b+c-a = 2(p-a)

- **a-b+c = 2(p-b)** Calcolo:

  Partiamo dall'uguaglianza
  a+b+c = 2p
  ricavo **a+c** spostando **b** dopo l'uguale
  a+c = 2p-b
  sottraggo **b** al primo ed al secondo membro dell'uguaglianza
  a+c-b= 2p-b-b
  sommo le **b** al secondo membro
  a+c-b = 2p-2b
  raccolgo il **2** ed ottengo
  a-b+c = 2(p-b)

- **a+b-c = 2(p-c)** Calcolo:

  Partiamo dall'uguaglianza
  a+b+c = 2p
  ricavo **a+b** spostando **c** dopo l'uguale
  a+b = 2p-c
  sottraggo **c** al primo ed al secondo membro dell'uguaglianza
  a+b-c= 2p-c-c
  sommo le **c** al secondo membro
  a+b-c = 2p-2c
  raccolgo il **2** ed ottengo
  a+b-c = 2(p-c)

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4(p-b)(p-c)}{4bc}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4p(p-a)}{4bc}}$$

e semplificando per 4:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

e dividendo fra loro le due relazioni ottengo la relazione per la tangente. Ecco i calcoli:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Qui di seguito metto le varie formule di Briggs relative ai vari angoli del triangolo.

- per α

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\tan g\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

- per $\boldsymbol{\beta}$

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{bc}}$$

$$\tan g\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

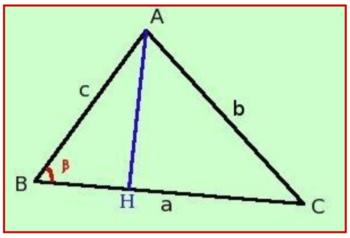
- per $\boldsymbol{\gamma}$

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan g\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

(2) Formula di Erone



Calcolo dell'area del triangolo conoscendone la misura dei tre lati.
Consideriamo un triangolo qualunque **ABC** e supponiamo di conoscerne la misura dei tre lati; in queste condizioni posso ricavare una formula che mi permette di avere l'area del triangolo stesso.
Supponiamo di conoscere:

$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{c}$

$\overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{a}$

$\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{b}$

con **a**, **b** e **c** numeri noti.
Partiamo dalla formula trovata dell'area del triangolo conoscendone due lati e l'angolo compreso:

$$\mathbf{A_s = \frac{1}{2} ac\ sen\beta}$$

Naturalmente possiamo scegliere un angolo qualunque e i due lati che lo comprendono.
Per la formula di duplicazione del seno possiamo scrivere:

$$A_s = \frac{1}{2} 2ac \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$A_s = ac\,\text{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

Ora applico le formule di Briggs:

$$A_s = ac\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

Moltiplico:

$$A_s = ac\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2c^2}}$$

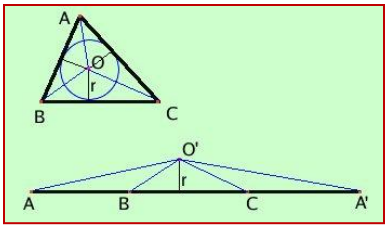
Ora estraggo $\mathbf{a^2c^2}$ di radice :

$$A_s = \frac{ac}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Semplifico ed ottengo:

$$\mathbf{A_s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

a) Raggio del cerchio inscritto nel triangolo



Partiamo dall'area del triangolo conoscendone il perimetro ed il raggio del cerchio inscritto che abbiamo trovato in geometria euclidea nel capitolo dedicato all'equivalenza; l'area del triangolo vale:

$$\mathbf{A_S(ABC) = \frac{2p \cdot r}{2}}$$

Da questa formula posso ricavare il raggio del cerchio inscritto nel triangolo:

$$\mathbf{r = \frac{Area}{2}}$$

essendo **p** il semiperimetro.
Sostituendo all'area la formula di Erone, avremo la formula per trovare il raggio del cerchio inscritto essendo noti i lati:

$$\mathbf{r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}}$$

Ora portiamo il semiperimetro ad denominatore dentro radice:

$$r = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}}$$

Semplifico sopra e sotto per **p:**

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Adesso moltiplico sopra e sotto per **(p-a)**; cerco di trasformare in modo da avere una delle formule di Briggs:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Estraggo di radice (p-a) ed ottengo:

$$r = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

ma per le formule di Briggs so che:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Quindi posso scrivere la relazione:

$$\mathbf{r = (p\text{-}a)\ tang\ \frac{\alpha}{2}}$$

Potendo applicare lo stesso ragionamento per estrarre di radice **(p-b)** e **(p-c)** , avremo le tre formule per il raggio del cerchio inscritto nel triangolo

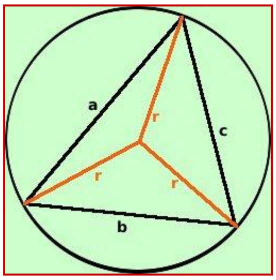
---

$$\mathbf{r = (p\text{-}a)\ tang\ \frac{\alpha}{2}}$$

$$\mathbf{r = (p\text{-}b)\ tang\ \frac{\beta}{2}}$$

$$\mathbf{r = (p\text{-}c)\ tang\ \frac{\gamma}{2}}$$

b) Raggio del cerchio circoscritto al triangolo



Questo e' molto piu' semplice: basta far riferimento al teorema dei seni; infatti abbiamo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r$$

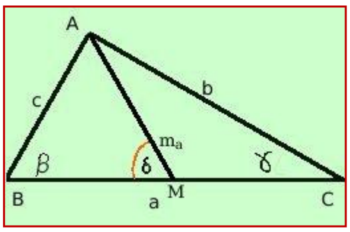
e quindi ricavando **r** avremo le formule:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

$$r = \frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}$$

$$r = \frac{c}{2\operatorname{sen}\gamma}$$

c) Mediane di un triangolo



Chiamiamo **δ** l'angolo **BMA**, di conseguenza l'angolo **CMA** sara' **180-δ .**
Applichiamo il teorema di Carnot ai triangoli **BMA** e **CMA** ricordando che essendo **AM** la mediana sara':

$$BM = MC = \frac{a}{2}$$

Applico al triangolo **BMA** :

$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2\ AM\ BM\ \cos\delta$
Sostituisco ai lati il loro valore:

$$c^2 = {m_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a\frac{a}{2}\cos\delta$$

$$c^2 = {m_a}^2 + \frac{a^2}{4} - a\ m_a\cos\delta$$

Ora applico il teorema di Carnot al triangolo **CMA:**
$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2\ AM\ CM\ \cos(180-\delta)$
Sostituisco ai lati il loro valore:

$$b^2 = {m_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a\frac{a}{2}\cos(180-\delta)$$

Calcolando e ricordando che **$\cos(180-\delta) = -\cos\delta$:**

$$b^2 = {m_a}^2 + \frac{a^2}{4} + a\ m_a\cos\delta$$

Ora sommo termine a termine le due uguaglianze trovate:

$$b^2 + c^2 = {m_a}^2 + \frac{a^2}{4} - a\ m_a\cos\delta + {m_a}^2 + \frac{a^2}{4} + a\ m_a\cos\delta$$

e sommando i termini simili trovo:

$$b^2 + c^2 = 2{m_a}^2 + \frac{a^2}{2}$$

Ora da questa uguaglianza ricavo **m_a** cioe' il valore della mediana:

$$2{m_a}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$${m_a}^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$${m_a}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}$$

Estraggo la radice ed ottengo la formula finale:

$$\mathbf{m_a} = \sqrt{\frac{\mathbf{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{\mathbf{4}}}$$

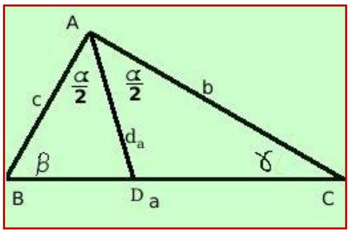
Siccome posso fare lo stesso ragionamento partendo da uno qualunque dei vertici del triangolo, otteniamo le formule delle tre mediane del triangolo:

$$\mathbf{m_a} = \sqrt{\frac{\mathbf{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{\mathbf{4}}}$$

$$\mathbf{m_b} = \sqrt{\frac{\mathbf{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{\mathbf{4}}}$$

$$\mathbf{m_c} = \sqrt{\frac{\mathbf{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{\mathbf{4}}}$$

a) Bisettrici di un triangolo



Per calcolare il valore della bisettrice **AD** dell'angolo **α** cacoliamo le aree dei due triangoli **ADB** e **ADC** in cui il triangolo **ABC** viene diviso dalla bisettrice.
Ponendo poi che la somma delle aree dei due triangoli **ADB** e **ADC** equivale all'area del triangolo **ABC,** potremo trovare il valore d_a della bisettrice.
Area del triangolo **ADB:**

$$A_S(ADB) = \frac{1}{2}\, c\, d_a \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

Area del triangolo **ADC:**

$$A_S(ADC) = \frac{1}{2}\, b\, d_a \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

Area del triangolo **ABC:**

$$A_S(ABC) = \frac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen}\alpha$$

Essendo $A_s(ADC) + A_s(ADB) = A_s(ABC)$ avremo:

$$\frac{1}{2}\, c\, d_a \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\, b\, d_a \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen}\alpha$$

Moltiplico tutti i termini per 2 ed ottengo:

$$c\, d_a \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + b\, d_a \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = b\, c \operatorname{sen}\alpha$$

Ora raccolgo d_a :

$$d_a(c + b)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = b\, c \operatorname{sen}\alpha$$

Ricavo d_a :

$$d_a = \frac{b\, c \operatorname{sen}\alpha}{(b + c)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

Per la formula di duplicazione so che **sen α= 2 sen α/2 cos α/2** :

$$d_a = \frac{2\, b\, c \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}{(b + c) \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

Semplifico ed ottengo la formula finale:

$$d_a = \frac{2\, b\, c \cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}$$

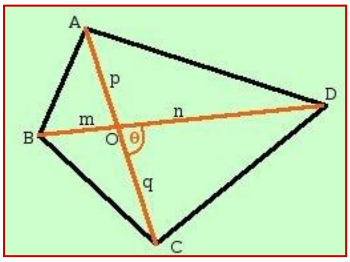
e quindi, ricavando le varie bisettrici d_a, d_b, d_c, avremo le formule:

$$d_a = \frac{2\, b\, c \cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}$$

$$d_b = \frac{2\, a\, c \cos\frac{\beta}{2}}{a + c}$$

$$d_c = \frac{2\, a\, b\, \cos\frac{\gamma}{2}}{a + b}$$

b) Area di un quadrilatero qualunque



Chiamiamo **O** l'intersezione delle due diagonali e poniamo:

$\overline{AC} = d_1$ $\overline{BD} = d_2$
Poniamo inoltre :
$\overline{AO} = p \overline{OC} = q \overline{BO} = m \overline{OD} = n$
$B\hat{O}A = C\hat{O}D = \theta$
$A\hat{O}D = B\hat{O}C = 180° - \theta$

Per trovare l'area totale facciamo la somma delle aree dei vari triangoli componenti il quadrilatero:
$A_s(ABCD) = A_s(AOB) + A_s(BOC) + A_s(COD) + A_s(DOA)$
Utilizziamo per trovare l'area dei triangoli la formula trovata all'inizio del capitolo:
$A_s(ABCD) == 1/_2 pm \text{ sen } \theta + 1/_2 mq \text{ sen } (180° - \theta) + 1/_2 qn \text{ sen } \theta + 1/_2 np \text{ sen } (180° - \theta)$
Ricordando che **sen (180° - θ) = senθ** avremo:
$A_s(ABCD) = 1/_2 pm \text{ sen}\theta + 1/_2 mq \text{ sen}\theta + 1/_2 qn \text{ sen}\theta + 1/_2 np \text{ sen}\theta$
Prima metto in evidenza i fattori comuni:
$A_s(ABCD) = 1/_2 \text{ sen}\theta \, (pm + mq + qn + np) =$
Dentro parentesi posso raccogliere a fattor comune parziale:
$= 1/_2 \text{ sen}\theta \, [m(p + q) + n(p + q)] =$
$= 1/_2 \text{ sen}\theta (p + q)(m+n)$
Essendo $\mathbf{p + q = d_1}$ e $\mathbf{m + n = d_2}$ otteniamo la formula finale:

$$A_s(ABCD) = 1/2 \, d_1 \, d_2 \text{ sen } \theta$$

Cioe':
L'area di un quadrilatero e' data dal semiprodotto delle diagonali per il seno dell'angolo compreso fra le diagonali stesse.

2. Applicazioni alla Topografia e Geodesia

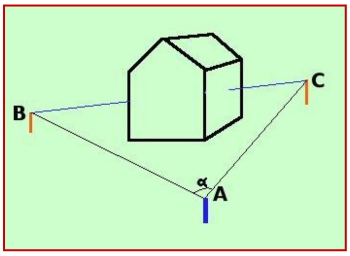
Premetto che, come al solito, e' essenziale rifarsi ai teoremi di congruenza fra triangoli, cioe' devi conoscere molto bene i criteri di congruenza sia fra i triangoli qualunque:
- Due lati e l'angolo compreso
- Due angoli ed un lato
- tutti e 3 i lati

che fra i triangoli rettangoli:
- Due lati
- Un angolo diverso dal retto ed un lato
- tutti e 3 i lati

Cio' detto si tratta di costruire triangoli che puoi "risolvere" in modo da conoscere tutti i lati e gli angoli.
Vediamo quali sono i problemi piu' tipici
- Distanza fra due punti accessibili ma non visibili tra loro
- Distanza fra due punti visibili ma uno non accessibile
- Problema di Snellius
- Altezza di una torre
- Altezza di una montagna rispetto al piano orizzontale dell'osservatore
- Misura del raggio della terra (Eratostene)

Distanza fra due punti accessibili ma non visibili tra loro

Supponiamo di voler calcolare la distanza fra due punti B e C ma che fra essi ci sia un ostacolo (nella figura una specie di casetta)



Possiamo calcolare le distanze **AB** e **AC** ed inoltre l'angolo **BAC**
Per calcolare **AB** ed **AC** possiamo usare un decametro a nastro e per misurare l'angolo si usa un teodolite.

Abbiamo quindi il triangolo **ABC** in cui conosciamo due lati e l'angolo compreso; quindi per calcolare il terzo lato possiamo usare, ad esempio, il teorema di Carnot:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos\alpha$$

quindi:

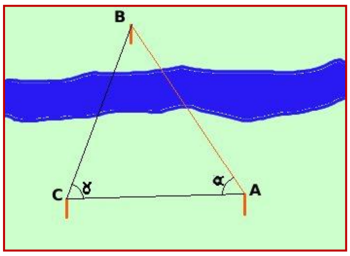
$$\mathbf{BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos\alpha}}$$

Vediamo un esercizio.
Supponiamo di avere:
AB = 20 m
AC = 30 m
BAC = 120°

$$\mathbf{BC = \sqrt{(20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cos 120°} = \sqrt{[400 + 900 - 1200 \cdot (-0,5)]} = \sqrt{1900} = 43,6\ \mathit{M}}$$

Distanza fra due punti visibili ma uno non accessibile

Supponiamo di voler calcolare la distanza fra due punti A e B: io mi trovo in A ma non posso raggiungere B perche' e' al di la' del fiume



Possiamo spostarmi in un punto C e calcolare la distanza **AC** ed inoltre gli angoli **ACB** e **CAB**

Abbiamo quindi il triangolo **ABC** in cui conosciamo due angoli ed i l lato compreso, quindi per risolvere il triangolo possiamo calcolare il terzo angolo β ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo e' un angolo piatto:

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma$$

e poi applicare il teorema dei seni:

$$\mathbf{\frac{AC}{sen\ \beta} = \frac{AB}{sen\ \gamma}}$$

$$\mathbf{\frac{AC}{sen\ \beta} = \frac{AB}{sen\ \gamma}}$$

e quindi ottenere:

$$\mathbf{AB = \frac{AC\ sen\ \gamma}{sen\ \beta}}$$

Vediamo anche qui un esercizio.
Supponiamo di spostarci dal punto A di 20 metri
AC = 20 m
Calcolo gli angoli (con il teodolite)

Nota: questo e' un esercizio teorico e quindi considero numeri semplici; se calcoli effettivamente gli angoli, nella realta' troverai anche primi e secondi e quindi i calcoli saranno molto piu' complicati:

BAC = α= **80°**

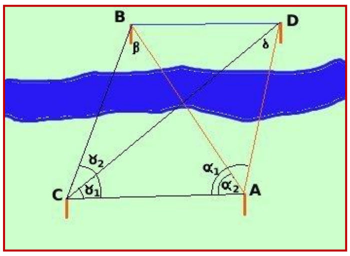
BCA = γ= **60°**

e quindi per differenza:

β = ABC = 180°-80°- 60° = 40°

$$AB = \frac{20 \text{ sen } 60°}{\text{sen } 40°} = \frac{20 \cdot 0,87}{0,64} = 26,9 \text{ m}$$

Problema di Snellius



Vediamo ora come e' possibile determinare la distanza fra due punti **B** e **D** entrambe inaccessibili.

Come nel problema precedente, spostandoci da **A** a **B** possiamo considerare i triangoli:

ADC ed **ABC**

Di **ADC** conosciamo:

- la misura di **AC**
- L'angolo **DAC** = α_1
- L'angolo **DCA** = γ_1

quindi il triangolo e' risolvibile e posso calcolare **AD** (vedi pagina precedente):

$$AD = \frac{AC \text{ sen } \gamma_1}{\text{sen } \delta}$$

Di **ABC** conosciamo:

- la misura di **AC**
- L'angolo **BAC** = α_2
- L'angolo **BCA** = γ_2

Quindi il triangolo e' risolvibile e posso calcolare **AB** (vedi pagina precedente):

$$AB = \frac{AC \text{ sen } \gamma_2}{\text{sen } \beta}$$

Se ora considero il triangolo **ABD** conosco:

- la misura di **AD:**
  $$= \frac{AC \text{ sen } \gamma_1}{\text{sen } \delta}$$
- La misura di **AB:**
  $$= \frac{AC \text{ sen } \gamma_2}{\text{sen } \beta}$$
- L'angolo **BAD** come differenza:
  Angolo **BAD** = $\alpha_1 - \alpha_2$

Quindi il triangolo **ABD** e' risolvibile e posso calcolare **BD** ad esempio con Carnot

$$BD = \sqrt{[AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]}$$

Esercizio:

Supponiamo di spostarci dal punto A di 20 metri:

AC = **20 m**

Calcolo gli angoli (con il teodolite)

Nota: questo e' un esercizio teorico e quindi considero numeri semplici; se calcoli effettivamente gli angoli nella realta' troverai anche primi e secondi e quindi i calcoli

saranno molto piu' complicati:
CAD = α= **100°**
CDA = γ= **50°**
e quindi per differenza:
δ= ADC = 180°-100°- 50° = 40°
Inoltre
BAC = α= **60°**
BCA = γ= **70°**
e quindi per differenza:
β= ABC = 180°-60°- 70° = 50°
Troviamo:

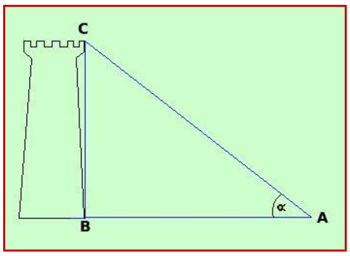
$$AD = \frac{20 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 40°} = \frac{20 \cdot 0{,}77}{0{,}64} = 24{,}06 \text{ m}$$

$$AB = \frac{20 \text{ sen } 70°}{\text{sen } 50°} = \frac{20 \cdot 0{,}94}{0{,}77} = 24{,}42 \text{ m}$$

Essendo l'angolo **BAD** = $\alpha_1 - \alpha_2$ **= ADC = 100°- 60° = 40°** avremo:

$$\mathbf{BD} = \sqrt{(24,42^2 + 24,06^2 - 2 \cdot 24,42 \cdot 24,06 \cos 40°)} = \mathbf{15\ m}$$

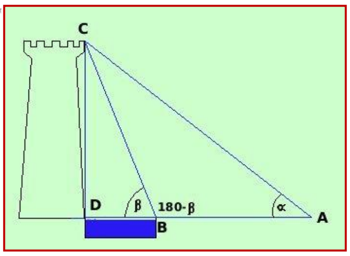
(Naturalmente e' calcolato dalla calcolatrice)



Altezza di una torre (distinguiamo 4 casi).
Piede della torre sul piano dell'osservatore ed accessibile

In questo caso il problema si presenta in modo piuttosto semplice. Spostandoci dalla base **A** della torre ad un punto **B,** calcoliamo la distanza **AB** e consideriamo il triangolo rettangolo **ABC.**
Calcoliamo poi l'angolo α e possiamo risolvere il triangolo **ABC.**
Per la proprieta' dei triangoli rettangoli ho:
BC = AB tang α
Come volevamo.

Esercizio:
Supponiamo di spostarci dal punto B di 30 metri:
AB = **30 m**
e che l'angolo **α** misuri **50°**
e quindi ho:
BC = AB tangα= 30m·tang 50° = 30m·1,192 = 35,76 m
Naturalmente possiamo approssimare ad una cifra decimale perche' la nostra misura certamente non e' esatta al centimetro; in queste misure un'approssimazione al decimetro e' un buon risultato:
BC = 35,8 m



Altezza di una torre.
Piede della torre sul piano dell'osservatore e non accessibile

Supponiamo di non poter raggiungere la torre nel punto **D** perche'

c'e' un fossato pieno d'acqua.
Allora fisso un punto **B**, punto piu' vicino alla torre che posso raggiungere e ci spostiamo, allontanandoci dalla torre, fino ad un punto **A** .
Calcoliamo la distanza **AB** e misuriamo gli angoli **BAC** e **CBD.**
Se l'angolo:
CBD = β
allora l'angolo:
CBA = 180° - β
e possiamo risolvere il triangolo **ABC.**

L'angolo **BCA = 180° - (180° - β) - α= 180° - 180° + β - α= β - α.**
Per il teorema dei seni posso calcolare **BC:**

$$\frac{BC}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{AB}{\text{sen}\,(\beta-\alpha)}$$

e quindi:

$$BC = \frac{AB\ \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\beta-\alpha)}$$

Se ora considero il triangolo rettangolo **BCD** ne conosco l'ipotenusa ed un angolo oltre all'angolo retto, quindi posso risolverlo e trovare **CD.**
Per le relazioni sui triangoli rettangoli un cateto e' uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto e quindi abbiamo:

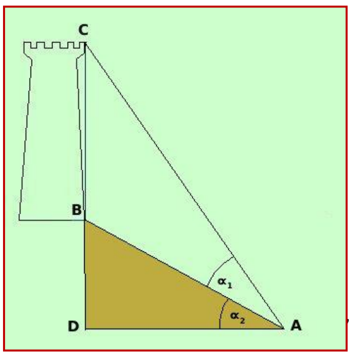
$$CD = CB\ \text{sen}\,\beta = \frac{AB\ \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\beta-\alpha)}$$

Esercizio
Supponiamo di spostarci dal punto B di 30 metri:
AB = 30 m
e di avere i valori degli angoli:
α=**40°**
β=**70°**
e quindi ho:

$$CD = CB\ \text{sen}\,70° = \frac{AB\ \text{sen}\,40°\ \text{sen}\,70°}{\text{sen}\,(70°-40°)} = \frac{AB\ \text{sen}\,40°\ \text{sen}\,70°}{\text{sen}\,30°} = \frac{30m\cdot 0.642788\cdot 0.9396926}{0.5} =$$

$= 36.241388\ m \sim 36{,}2\ m$
E' importante fare i calcoli con molti decimali e arrotondare solamente il risultato finale, altrimenti, se arrotondassi all'inizio, l'errore potrebbe compromettere il risultato.

Altezza di una torre.
Piede della torre accessibile ma non sul piano dell'osservatore



Distinguiamo due casi:
- la base della torre e' piu' alta del piano dell'osservatore
- la base della torre e' piu' bassa del piano dell'osservatore

Ecco i due casi:
La base della torre e' piu' alta del piano dell'osservatore
Conosciamo:
La distanza **AB**

L'angolo α_1 (angolo di visuale)
L'angolo α_2 (angolo di elevazione)
Possiamo misurare AB con un decametro a nastro e gli angoli mediante il teodolite
Essendo il triangolo **ACD** rettangolo avremo che l'angolo:
ACD = 90°- ($\alpha_1 + \alpha_2$) = ACB
Se ora considero il triangolo **ABC** conosco:
la distanza **AB**
l'angolo **BAC = α_1**
l'angolo **ACB = 90°- ($\alpha_1 + \alpha_2$)**
Quindi conoscendo due angoli ed un lato posso risolvere il triangolo: applico il teorema dei seni per trovare la misura di **BC:**

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{AB}{\operatorname{sen} [90° - (\alpha_1 + \alpha_2)]}$$

e, per la relazione tra gli archi associati:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{AB}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

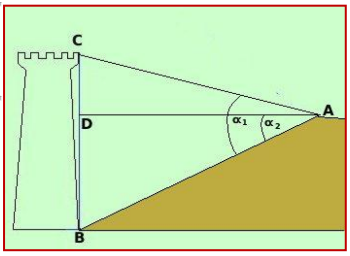
e quindi avremo:

$$BC = \frac{AB \operatorname{sen} \alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Esercizio:
Supponiamo di spostarci dal punto B di 30 metri:
AB = 40 m
e che l'angolo di visuale α_1 misuri**30°**
e l'angolo di elevazione α_2 misuri**18°**
e quindi ho:

$$BC = \frac{AB \operatorname{sen} 30°}{\cos(30°+18°)} = \frac{40m \operatorname{sen} 30°}{\cos 48°} = 29.88953 \sim 29,9 \text{ m}$$

La base della torre e' piu' bassa del piano dell'osservatore



Veramente io non ho mai visto costruire una torre per metterla in una depressione, ma consideriamo solo come un esempio di tipo matematico.

Conosciamo:
La distanza **AB**
L'angolo α_1 (angolo di visuale)
L'angolo α_2 (angolo di elevazione)
Possiamo misurare AB con un decametro a nastro e gli angoli mediante il teodolite.
L'angolo **CAD** vale **α_1 - α_2**
Essendo il triangolo **ACD** rettangolo avremo che l'angolo:
ACD=90°- ($\alpha_1 - \alpha_2$) = ACB

Se ora considero il triangolo **ABC** conosco:
la distanza **AB**
l'angolo **BAC = α_1**
l'angolo **ACD=90°- ($\alpha_1 - \alpha_2$)**
Quindi conoscendo due angoli ed un lato posso risolvere il triangolo: applico il teorema dei seni per trovare la misura di **BC**

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{AB}{\operatorname{sen} [90° - (\alpha_1 - \alpha_2)]}$$

e, per la relazione tra gli archi associati:

$$\frac{BC}{\text{sen}\ \alpha_1} = \frac{AB}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

e quindi avremo:

$$BC = \frac{AB\ \text{sen}\ \alpha_1}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Esercizio:
Supponiamo di spostarci dal punto B di 30 metri:
AB = 30 m
e che l'angolo di visuale α_1 misuri **60°**
e l'angolo di elevazione α_2 misuri **20°**
e quindi ho:

$$BC = \frac{AB\ \text{sen}\ 60°}{\cos(60°-20°)} = \frac{30m\ \text{sen}\ 60°}{\cos 40°} = 33.915476 \sim 33,9\ m$$

Possiamo comunque raggruppare i due risultati nella formula:

$$BC = \frac{AB\ \text{sen}\ \alpha_1}{\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2)}$$

in cui il segno + si riferisce alla torre con base piu' alta ed il segno - alla torre con base piu' bassa dell'osservatore.

<u>Altezza di una torre.</u>
<u>Piede della torre non accessibile e non sul piano dell'osservatore</u>

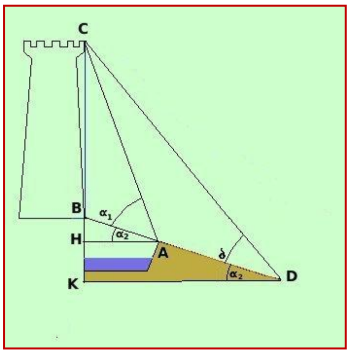
Anche qui distinguiamo due casi:

- la base della torre e' piu' alta del piano dell'osservatore
- la base della torre e' piu' bassa del piano dell'osservatore

Ecco i due casi.

La base della torre e' piu' alta del piano dell'osservatore

Prima di tutto devo avere la possibilita' di calcolare una distanza AD che sia allineata con la base della torre.
Conosciamo:
La distanza **AD**
L'angolo α_1 (angolo di visuale da A)
L'angolo γ (angolo di visuale da D)
L'angolo α_2 (angolo di elevazione)
Essendo i triangoli **ABH** e **DBK** simili avro' inoltre che:
angolo **BAH** = angolo **BDK** = α_2
Al solito possiamo misurare AD con un decametro a nastro e gli angoli mediante il teodolite.



Se considero il triangolo **ACD,** in esso l'angolo **BAC** e' un angolo esterno e quindi uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti:
BAC = ADC + ACD
e quindi, ricavando **ACD:**
ACD = BAC - ADC = $\alpha_1 - \delta$

Quindi se considero il triangolo **CAD** ne conosco due angoli ed un lato e quindi posso risolverlo: possiamo calcolare **AC** con il teorema dei seni:

$$\frac{AC}{\text{sen }\delta} = \frac{AD}{\text{sen }(\alpha_1 - \delta)}$$

Quindi:

$$AC = \frac{AD \text{ sen }\delta}{\text{sen }(\alpha_1 - \delta)}$$

Se ora considero il triangolo **BAH** in esso l'angolo **CBA** e' esterno e quindi uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti, cioe':

CBA = BAH + HAB = 90° + α_2

Se quindi considero il triangolo CBA in esso conosco due angoli ed un lato:

CBA = 90° + α_2

CAB = α_1

$$AC = \frac{AD \text{ sen }\delta}{\text{sen }(\alpha_1 - \delta)}$$

Quindi posso risolverlo (teorema dei seni):

$$\frac{CB}{\text{sen }\alpha_1} = \frac{AC}{\text{sen }(90° + \alpha_2)}$$

Ma per la relazione tra gli archi associati:

$$\frac{CB}{\text{sen }\alpha_1} = \frac{AC}{\cos \alpha_2}$$

Prima ricavo **CB:**

$$CB = \frac{AC \text{ sen }\alpha_1}{\cos \alpha_2}$$

Poi sostituisco ad **AC** il suo valore e trovo il risultato finale:

$$CB = \frac{AD \text{ sen }\alpha_1 \text{ sen }\delta}{\cos \alpha_2 \text{ sen}(\alpha_1 - \delta)}$$

La base della torre e' piu' bassa del piano dell'osservatore

Anche qui devo avere la possibilita' di calcolare una distanza AD che sia allineata con la base della torre.

Conosciamo:

La distanza **AD**

L'angolo α_1 (angolo di visuale da A)

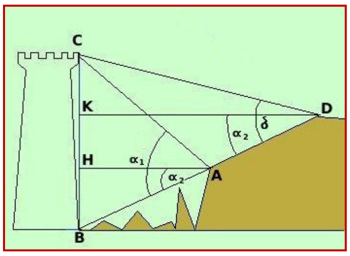
L'angolo γ (angolo di visuale da b)

L'angolo α_2 (angolo di depressione)

Considerando i triangoli simili **ABH** e **DBK,** avro' inoltre che:

angolo **BAH** = angolo **BDK** = α_2

Al solito possiamo misurare AD con un decametro a nastro e gli angoli mediante il teodolite.



Se considero il triangolo **ACD** in esso l'angolo **BAC** e' un angolo esterno e quindi uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti:

BAC = ADC + ACD

e quindi, ricavando **ACD:**

ACD = BAC - ADC = $\alpha_1 - \delta$

Quindi se considero il triangolo **CAD** ne conosco due angoli ed un lato e quindi posso risolverlo: possiamo calcolare **AC** con il teorema dei seni:

$$\frac{AC}{\text{sen }\delta} = \frac{AD}{\text{sen }(\alpha_1 - \delta)}$$

Quindi:

$$AC = \frac{AD \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} (\alpha_1 - \delta)}$$

Considero il triangolo **BAH.**
So che per ogni triangolo la somma degli angoli interni e' un angolo piatto:
angolo **BAH** + angolo **ABH** + angolo **AHB** = 180°
Quindi, ricavando **ABH:**
$ABH = 180° - BAH - HAB = 180° - 90° - \alpha_2 = 90° - \alpha_2 = ABC$
Se ora considero il triangolo CBA in esso conosco due angoli ed un lato:
$CBA = 90° - \alpha_2$
$CAB = \alpha_1$

$$AC = \frac{AD \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} (\alpha_1 - \delta)}$$

Quindi posso risolverlo (teorema dei seni):

$$\frac{CB}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{AC}{\operatorname{sen} (90° - \alpha_2)}$$

Ma per la relazione tra gli archi associati :

$$\frac{CB}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{AC}{\cos \alpha_2}$$

Prima ricavo **CB** :

$$CB = \frac{AC \operatorname{sen} \alpha_1}{\cos \alpha_2}$$

Poi sostituisco ad **AC** il suo valore e trovo il risultato finale

$$CB = \frac{AD \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \delta}{\cos \alpha_2 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \delta)}$$

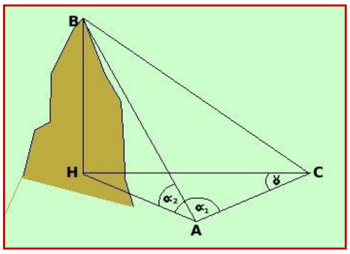
Possiamo raggruppare i due risultati nella formula:

$$BC = \frac{AD \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \delta}{\cos \alpha_2 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \delta)}$$

<u>Altezza di una montagna rispetto al piano orizzontale dell'osservatore</u>

Distinguiamo due casi:
- Posso prendere una base di riferimento orizzontale
- Non posso prendere una base di riferimento orizzontale

Ecco i due casi:



Posso prendere una base di riferimento orizzontale
Supponiamo che il segmento **AC** sia orizzontale.
In tal caso il triangolo **ACH** giace sul piano orizzontale.
Misuriamo:
La distanza **AD**
L'angolo **HAC** = α_1
L'angolo **ACH** = γ
L'angolo **BAH** = α_2 (angolo di aelevazione da A)

Posso prima risolvere il triangolo **ACH** per trovare il valore di **AH** poi nel triangolo rettangolo **AHB** conosco, oltre l'angolo retto, un angolo ed un lato quindi posso risolverlo e trovare **BH.**

Considero il triangolo **ACH** ne conosco due angoli ed un lato e quindi posso risolverlo:
Angolo **AHC** = $180° - (\alpha_1 + \gamma)$
Possiamo calcolare **AH** con il teorema dei seni

$$\frac{AH}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{AC}{\text{sen}\,[180° - (\alpha_1 + \gamma)]}$$

e, per la relazione sugli angoli supplementari

$$\frac{AH}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{AC}{\text{sen}\,(\alpha_1 + \gamma)}$$

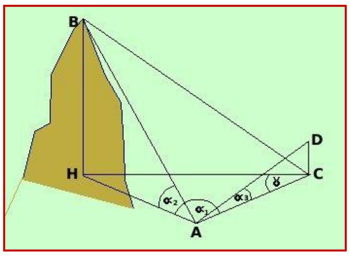
Quindi otteniamo:

$$AH = \frac{AC\ \text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,(\alpha_1 + \gamma)}$$

Considero poi il triangolo rettagolo **BAH:**
Per le relazioni sui triangoli rettangoli ho**:**
$BH = AH\ \text{tang}\ \alpha_2$ e quindi la mia formula diventa:

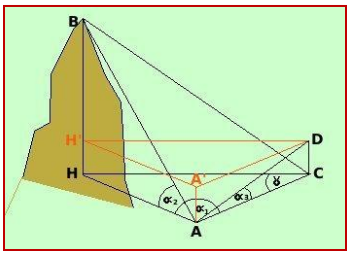
$$BH = \frac{AC\ \text{sen}\,\gamma\ \text{tang}\ \alpha_2}{\text{sen}\,(\alpha_1 + \gamma)}$$

Non posso prendere una base di riferimento non orizzontale
Se la base di riferimento **AD** non e' orizzontale prima calcolo una base di riferimento orizzontale **AC** con il teorema delle proiezioni:
$AC = AD \cos \alpha_3$
Poi lo adatto alla formula precedente:



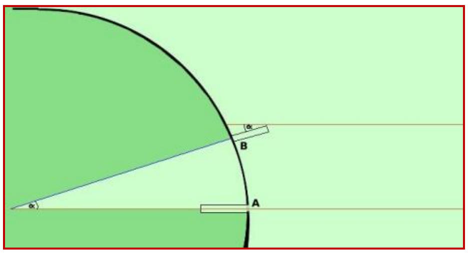
$$BH = \frac{AD \cos \alpha_3\ \text{sen}\gamma\ \text{tang}\ \alpha_2}{\text{sen}\,(\alpha_1 + \gamma)}$$

Si potrebbe obiettare che in questo caso e' difficile individuare l'angolo **ACH** cioe' γ.



Comunque possiamo sempre considerare il triangolo DA'H' e calcolarne gli angoli e siccome il triangolo DA'H' e' congruente al triangolo **DAH** possiamo calcolare facilmente l'angolo γ

<u>Misura del raggio della Terra (Eratostene)</u>



Eratostene osservo' che il giorno 21 giugno (solstizio di estate) a Siene il sole riusciva a specchiarsi nei pozzi, cioe' i raggi del sole arrivavano perpendicolari senza che le cose verticali facessero ombra.
Invece, nello stesso giorno dell'anno, ad Alessandria d'Egitto (distante da Siene circa 5000 stadi) un oggetto verticale proiettava un'ombra secondo un angolo α (del valore di circa 7 gradi).

Se osservi la figura vedi che i due angoli α sono congruenti perche' alterni interni rispetto a due rette parallele tagliate da una trasversale.

Eratostene ipotizzo' che la distanza terra-sole fosse tanto grande da pensare i raggi solari paralleli e quindi, con questa ipotesi, riusci' a calcolare il valore della circonferenza e quindi del raggio terrestre; infatti:

circonferenza : 360° = arco AB : α

$$2\pi r : 360° = \text{arco } AB : \alpha$$

$$2\pi r = \frac{\text{arco } AB \cdot 360°}{\alpha}$$

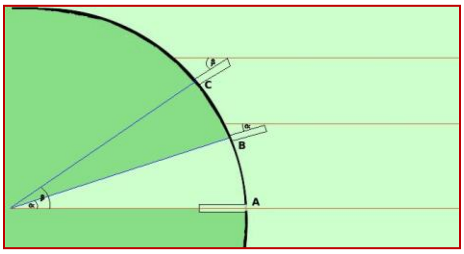
Ricavo **r**

$$r = \frac{\text{Arco } AB \cdot 360°}{\alpha \cdot 2\pi}$$

e siccome, considerando gli angoli in radianti, **360°** corrisponde a **2π** posso semplificare:

$$r = \frac{\text{arco } AB}{\alpha}$$

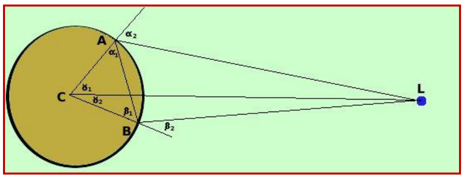
Naturalmente possiamo fare il ragionamento anche con il sole non allo zenith in un punto: sceglieremo due punti sullo stesso meridiano e in tal caso avremo due ombre e quindi due angoli diversi, ma il ragionamento sara' lo stesso.
Bastera' fare la proporzione:
circonferenza : 360° = arco CB : (β - α)



3. Applicazioni all'Astronomia

Distanza terra luna

Ormai l'argomento e' non piu' d'attualita: se vuoi misurare la distanza terra-luna oggi basta usare un raggio laser e misurare il tempo che impiega per esere riflesso verso l'osservatore: ottieni una misura con una precisione sbalorditiva. Quando gli astronauti sono sbarcati sulla luna hanno lasciato uno specchio appositamente per questo.
Comunque storicamente questi calcoli hanno avuto la loro importanza e quindi conviene conoscerli: qui misuriamo la distanza fra i centri della terra e della luna.



Consideriamo due punti **A** e **B** sulla superficie terrestre e sullo stesso meridiano, per semplicita' da parti opposte rispetto all'equatore terrestre.
Conosciamo:
Il valore del raggio terrestre **AC** e **BC**
il valore dell'angolo **ACL** = γ_1 (latitudine di **A**)
il valore dell'angolo **BCL** = γ_2 (latitudine di **B**)
il valore degli angoli **CAB = CBA** = $\alpha_1 = \beta_1 = (180° - \gamma_1 - \gamma_2) : 2$
Il triangolo **ACB** e' isoscele avendo come lati due raggi della sfera terrestre (effettivamente la terra non e' sferica, comunque, per noi che studiamo la distanza per ragioni storiche, e'

sufficiente considerarla sferica).
Misuriamo inoltre:
L'angolo β_2 declinazione della luna rispetto alla verticale

Considero il triangolo **LCB**:
so che l'angolo $LBC = 180° - \beta_2$
inoltre l'angolo $BLC = 180° - (\gamma_2 + 180° - \beta_2) = \beta_2 - \gamma_2$

Puoi anche osservare che β_2 e' esterno al triangolo **LCB** mentre γ_2 e' interno e non adiacente: allora l'altro angolo interno e non adiacente vale $\beta_2 - \gamma_2$.

Quindi conosco due angoli ed un lato e posso risolverlo:
Applico il teorema dei seni:

$$\frac{LC}{\text{sen}\,(180° - \beta_2)} = \frac{AC}{\text{sen}\,(\beta_2 - \gamma_2)}$$

e, per la relazione sugli angoli supplementari :

$$\frac{LC}{\text{sen}\,\beta_2} = \frac{AC}{\text{sen}\,(\beta_2 - \gamma_2)}$$

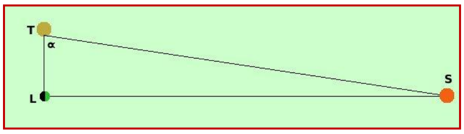
Quindi otteniamo:

$$LC = \frac{AC\ \text{sen}\,\beta_2}{\text{sen}\,(\beta_2 - \gamma_2)}$$

Per esercizio puoi ripetere la misura per una latitudine sopra l'equatore (punto **A**) oppure puoi calcolare la distanza fra il punto **B** (superficie della terra) e la luna.

Distanza Terra-Sole

Data la grande distanza Terra-Sole non possiamo prendere come base il raggio terrestre per fare lo stesso ragionamento fatto nella pagina precedente perche' l'angolo da misurare sarebbe troppo esiguo: possiamo pero' prendere come base la distanza Terra-Luna



Date le grandi distanze possiamo considerare la Terra, la Luna ed il Sole come puntiformi; la figura naturalmente non corrisponde alla realta': dovrei disegnare un triangolo sottilissimo e lunghissimo.

Consideriamo un triangolo rettangolo **LST** con vertici la Luna, il Sole e la Terra: per fare questo dobbiamo prendere il giorno in cui la Luna e' esattamente al primo quarto (sul calendario quando la Luna sembra uno spicchio di arancia con la gobba verso destra) oppure anche all'ultimo quarto (gobba verso sinistra): in questo modo la Luna presentera' la faccia illuminata al Sole e noi, vedento solo mezza Luna illuminata, saremo perpendicolari ai raggi che illuminano la Luna stessa.
Misuriamo (al tramonto) direttamente l'angolo $LTS = \alpha$
Conosciamo quindi anche l'angolo $TSL = 90° - \alpha$
Possiamo applicare il teorema dei seni:

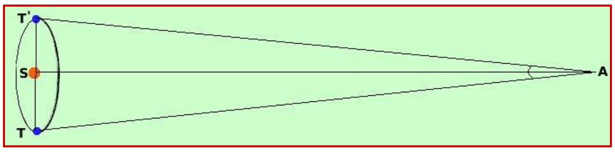
$$\frac{TS}{\text{sen}\,90°} = \frac{TL}{\text{sen}\,(90° - \alpha)}$$

essendo **sen 90° = 1**, considerando inoltre la relazione sugli angoli complementari, avremo quindi per la distanza Terra-Sole:

$$TS = \frac{TL}{\cos \alpha}$$

Avrei potuto usare anche la formula inversa della relazione fra triangoli rettangoli:
l'ipotenusa e' uguale ad un cateto fratto il coseno dell'angolo adiacente al cateto considerato
ma siccome abbiamo sinora usatoil teorema dei seni.....

Parallasse secondo



Ora possiamo usare la distanza Terra-Sole trovata per costruire un'unita' di misura astronomica: il Parsec (o parallasse secondo).
Consideriamo un giorno dell'anno e poi consideriamo il giorno che cade sei mesi dopo avremo che la terra si trova in punti opposti **T** e **T'** rispetto alla sua orbita attorno al sole (l'orbita e' quasi circolare).
Se osserviamo la stella alfa del centauro vediamo che tra sei mesi prima e sei mesi dopo notiamo una differenza di posizione: poco piu' di un secondo di grado questo sara' dovuto al fatto che, procedendo la terra nella sua orbita, dopo sei mesi sembrera' che la stella si sia mossa sulla sfera celeste; essendo la stella fissa la variazione e' dovuta all'orbita terrestre quindi possiamo considerare il triangolo **TT'A** dato dalle due posizioni della terra e con un angolo di un secondo di grado per definire una unita' di misura.

Al solito dovrei fare un triangolo lunghissimo e stretto, perche' l'angolo **A** sia di un secondo di grado, ma cio' e' graficamente impossibile, quindi la figura e' solamente per capire il ragionamento.

In astronomia si definisce parallasse l'angolo secondo cui da un punto si vede il diametro dell'orbita della terra attorno al sole.

Definizione:
Parsec (o Parallasse secondo) **e' la distanza di un oggetto da cui si vede il diametro dell'orbita della terra attorno al sole con l'angolo di un secondo di grado**

Oggi come oggi il Parsec non si usa piu', sostituito dall'anno-luce. Siccome la luce viaggia nel vuoto sempre con velocita' costante di 299.998 Km al secondo, un anno luce vale:
299.998Km · 60 sec · 60 minuti · 24 ore · 364 giorni = 9.434.817.100.800 Km
Abbiamo che:
1 parsec ~ 3,26 anni luce
