Ενότητα

5

Στερεομετρία

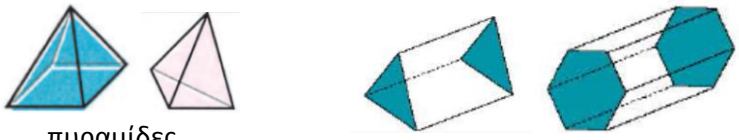
Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να αναγνωρίζουμε τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στον χώρο.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν και τον όγκο ορθού πρίσματος.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν και τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν και τον όγκο κυλίνδρου.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν και τον όγκο κώνου.
- Να υπολογίζουμε το εμβαδόν και τον όγκο σφαίρας.

Έχουμε μάθει …

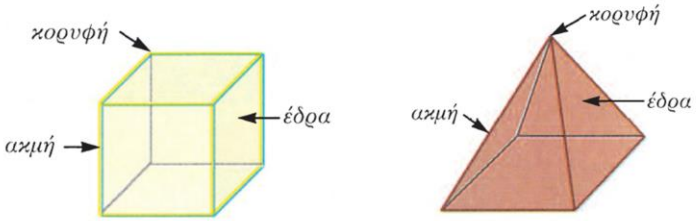
- Να αναγνωρίζουμε στερεά σχήματα όπως:

ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο — κύβος — κύλινδρος — κώνος

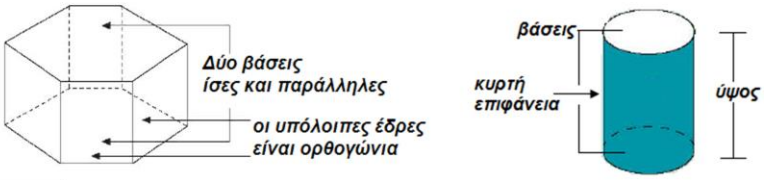


πυραμίδες — πρίσματα

- Να αναγνωρίζουμε χαρακτηριστικά στοιχεία τους όπως:

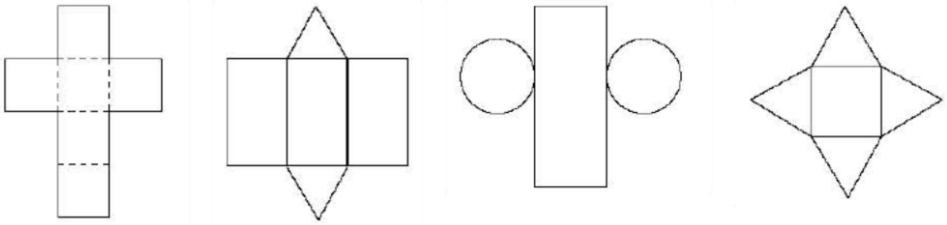


κορυφές – έδρες – ακμές στερεών



<u>Πρίσμα</u> **<u>Κύλινδρος</u>**

- Να αναγνωρίζουμε τα αναπτύγματα στερεών σχημάτων όπως:



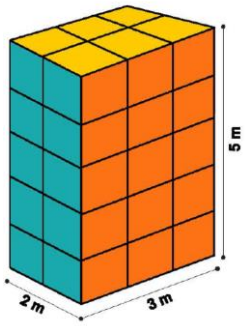
κύβος — πρίσμα — κύλινδρος — πυραμίδα

Έχουμε μάθει …

- Να υπολογίζουμε το Εμβαδόν της επιφάνειας παραλληλεπιπέδου.

Παράδειγμα:
Το διπλανό παραλληλεπίπεδο έχει
2 **κόκκινες** επιφάνειες με εμβαδόν $3 \cdot 5 = 15\ m^2$
2 **μπλε** επιφάνειες με εμβαδόν $\mathbf{2} \cdot 5 = \mathbf{10}\ m^2$ και
2 **κίτρινες** επιφάνειες με εμβαδόν $\mathbf{2 \cdot 3 = 6}\ m^2$
Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι

$$\mathbf{2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 62}\ m^2$$

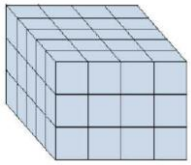


- Να υπολογίζουμε τον Όγκο παραλληλεπιπέδου.

Παράδειγμα:
Το διπλανό παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις

$$\mathbf{4}\ m \times \mathbf{5}\ m \times \mathbf{3}\ m$$

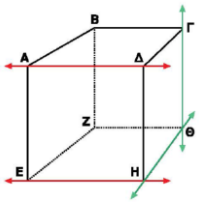
Άρα ο όγκος του είναι $\mathbf{4 \cdot 5 \cdot 3 = 60}\ m^3$



- Να αναγνωρίζουμε σχέσεις ευθειών στο χώρο.

Παράδειγμα:
Οι **κόκκινες** ευθείες είναι **παράλληλες**.

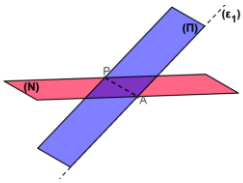
Οι **πράσινες** ευθείες τέμνονται στο σημείο Θ και ονομάζονται **τεμνόμενες**.



- Να αναγνωρίζουμε την τομή δύο επιπέδων καθώς και την τομή ευθείας και επιπέδου.

Παράδειγμα:
Η τομή των επιπέδων (Π) και (Ν) είναι η ευθεία ΑΡ.

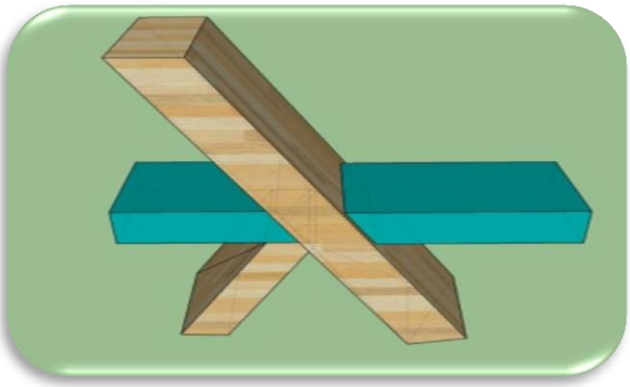
Η τομή ευθείας της ευθείας ε_1 και του επιπέδου (N) είναι το σημείο A.



Ευθείες και Επίπεδα στο Χώρο

Εξερεύνηση

- Να μελετήσετε τις πιο κάτω εικόνες και να σχολιάσετε τι παρατηρείτε για τις ευθείες και τα επίπεδα που φαίνονται.



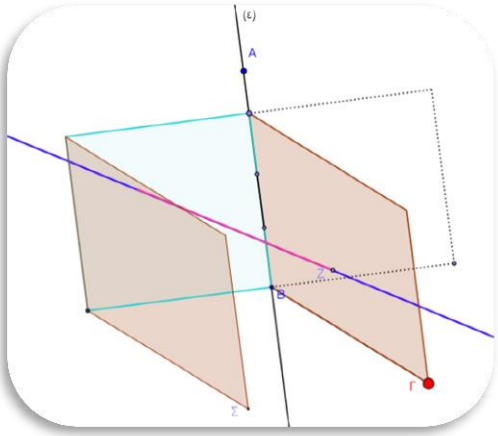
Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn05_EythiesEpipeda.ggb».*

✓ Μέσω των κουτιών επιλογής μπορείτε να εμφανίσετε ή να αποκρύψετε σημεία, ευθείες και επίπεδα.

✓ Να κάνετε τις κατάλληλες επιλογές, να μετακινήσετε το σημείο Γ σε διάφορες θέσεις και να μελετήσετε τις διάφορες σχέσεις μεταξύ:

- ευθείας και επιπέδου
- δύο επιπέδων

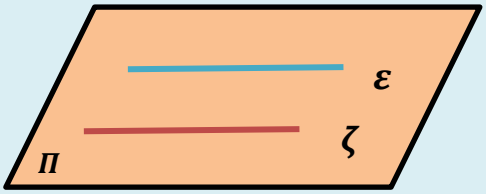


Μαθαίνω

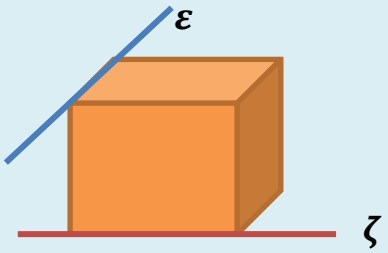
Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο

- Δύο διαφορετικές ευθείες (ε) και (ζ) του χώρου μπορεί να είναι:

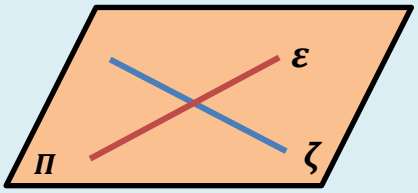
➢ **Παράλληλες**, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.



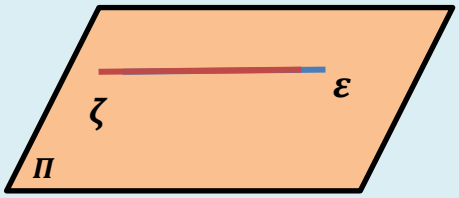
➢ **Ασύμβατες**, δηλαδή να μη βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (δεν έχουν κανένα κοινό σημείο).



➢ Να **τέμνονται**, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο (έχουν ένα κοινό σημείο).



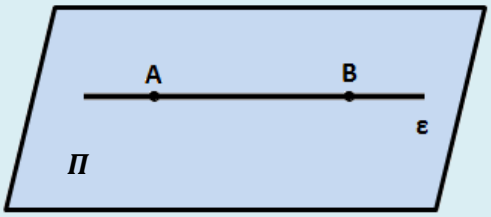
➢ Να **ταυτίζονται**, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να έχουν όλα τα σημεία τους κοινά.



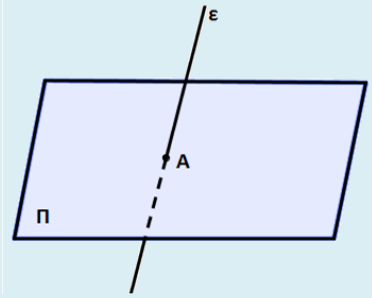
Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

- Μια ευθεία (ε) μπορεί να είναι **παράλληλη με ένα επίπεδο** (π), δηλαδή η ευθεία να μην έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο.

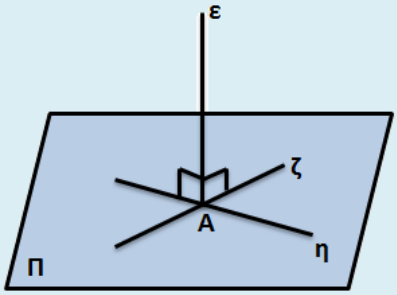
- Μια ευθεία (ε) μπορεί να **ανήκει σε ένα επίπεδο** (π), δηλαδή όλα τα σημεία της ανήκουν στο επίπεδο.



- Μια ευθεία (ε) μπορεί να **τέμνει ένα επίπεδο** (π) σε ένα σημείο. Το σημείο στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει το επίπεδο (π) λέγεται ίχνος της ευθείας (ε) στο (π).

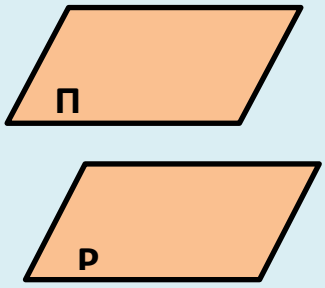


  - Μια ευθεία (ε) είναι **κάθετη** σε ένα επίπεδο (π), αν είναι κάθετη σε οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου η οποία διέρχεται από το ίχνος της (ε) στο (π).

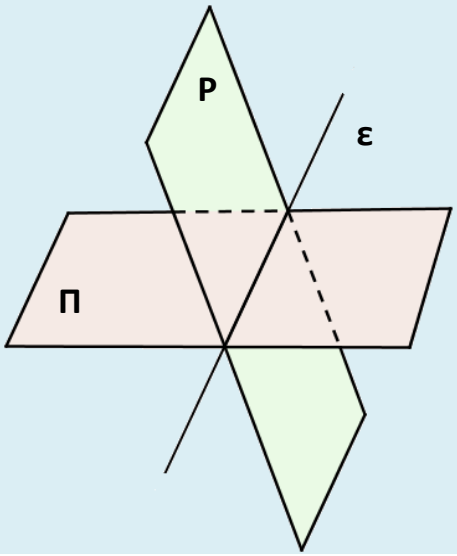


Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στο χώρο

- Δύο διαφορετικά επίπεδα του χώρου μπορεί:
  - Να είναι **παράλληλα**.

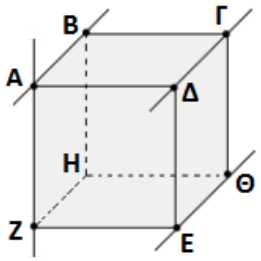


  - Να **τέμνονται**. Η τομή τους είναι μία ευθεία.



Παράδειγμα

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύβος. Να ονομάσετε:
   (α) δύο παράλληλα επίπεδα
   (β) δύο τεμνόμενα επίπεδα
   (γ) δύο ασύμβατες ευθείες
   (δ) δύο ευθείες κάθετες στο επίπεδο $(B\Gamma\Theta H)$.

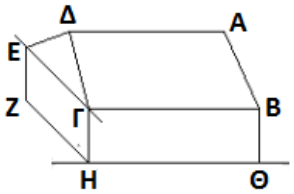


Λύση:

(α) Τα επίπεδα $(AB\Gamma\Delta)$ και $(EZH\Theta)$ είναι παράλληλα.
(β) Τα επίπεδα $(\Gamma\Delta E\Theta)$ και $(A\Delta EZ)$ τέμνονται.
(γ) Οι ευθείες (AZ) και $(E\Theta)$ είναι ασύμβατες.
(δ) Οι ευθείες (AB) και (ZH) είναι κάθετες στο επίπεδο $(B\Gamma\Theta H)$.

Δραστηριότητες

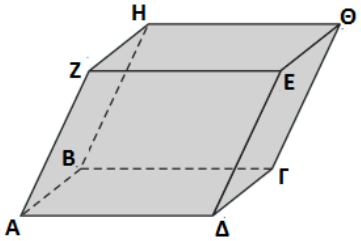
1. Με βάση το διπλανό σχήμα, να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.



(α) Οι ευθείες $(\boldsymbol{E\Gamma})$ και $(\boldsymbol{H\Theta})$ είναι ασύμβατες.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β) Τα επίπεδα $(\boldsymbol{\Delta E\Gamma})$ και $(\boldsymbol{AB\Gamma\Delta})$ δεν τέμνονται.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ) Τα ευθύγραμμα τμήματα $(\boldsymbol{A\Delta})$ και $(\boldsymbol{\Theta H})$ ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

2. Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας σας:
   α. Δύο ευθείες παράλληλες και το επίπεδο που ορίζουν.
   β. Τρεις ευθείες ανά δύο ασύμβατες.
   γ. Μια ευθεία κάθετη στο επίπεδο του δαπέδου.

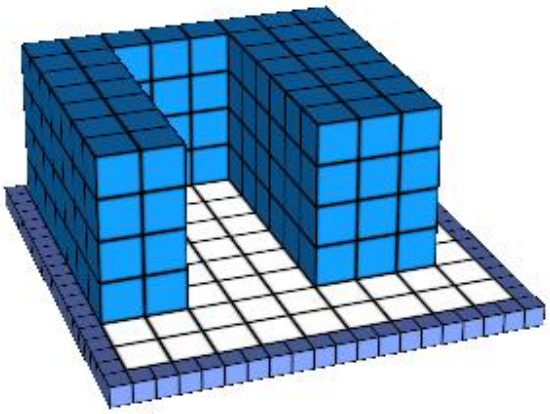
3. Στο σχήμα δίνεται ένα παραλληλεπίπεδο. Να ονομάσετε:
   (α) Δύο παράλληλα επίπεδα.
   (β) Δύο επίπεδα που τέμνονται.
   (γ) Δύο ασύμβατες ευθείες.



Εμβαδόν και Όγκος Ορθού Πρίσματος

Διερεύνηση

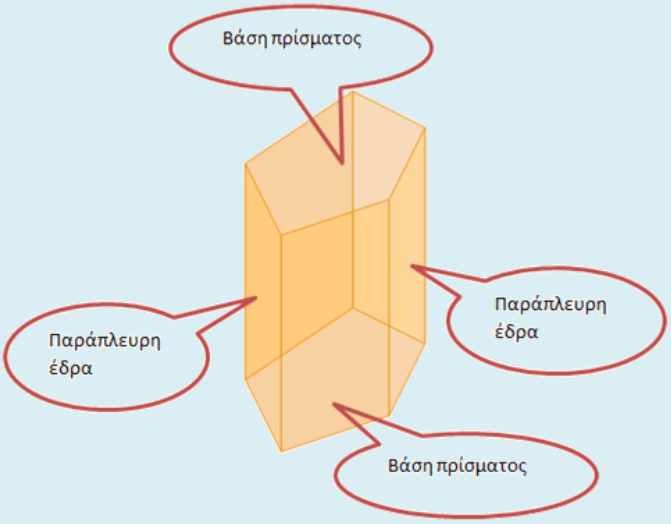
- Να παρατηρήσετε το πιο κάτω σχήμα και να υπολογίσετε τον όγκο του.



  - ✓ Να καλύψετε το κενό και να δώσετε έναν γενικό τύπο για τον υπολογισμό του όγκου του σχήματος που θα δημιουργηθεί.

Μαθαίνω

- **Ορθό πρίσμα** ή απλώς **πρίσμα** είναι το στερεό που έχει:
  - ✓ δύο έδρες παράλληλες και ίσες, οι οποίες ονομάζονται **βάσεις** του πρίσματος
  - ✓ τις άλλες έδρες οι οποίες είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες**.
  - ✓ Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται **ακμές**.

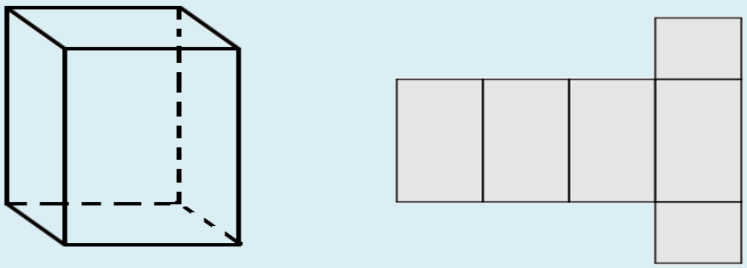


- Το **εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας** $(\boldsymbol{E_\pi})$ ενός πρίσματος είναι το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων εδρών του. Ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του $(\boldsymbol{\Pi_\beta})$ επί το ύψος $(\boldsymbol{\upsilon})$ του πρίσματος. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{E_\pi = (\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma)\cdot(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma)} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{E_\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon}$$

- Το **ολικό εμβαδόν** ενός πρίσματος $(\boldsymbol{E_{o\lambda}})$ είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας $(\boldsymbol{E_{\pi}})$ και των εμβαδών$(\boldsymbol{E_{\beta}})$ των δύο βάσεων. Δηλαδή:

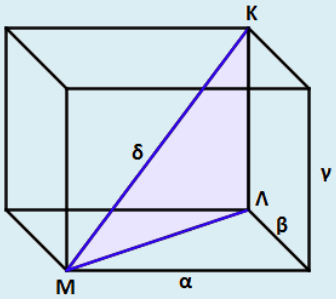
$$\boldsymbol{E_{o\lambda} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta}}$$



- Ο **όγκος** $(\boldsymbol{V})$ ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του $(\boldsymbol{E_{\beta}})$ επί το ύψος $(\boldsymbol{\upsilon})$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{V = (E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma) \cdot (\acute{\upsilon}\psi o\varsigma)} \text{ ή } \boldsymbol{V = E_{\beta} \cdot \upsilon.}$$

- **Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** ονομάζεται το πρίσμα του οποίου οι βάσεις είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.



✓ **Διαστάσεις** $(\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma})$ ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ονομάζονται τα μήκη των τριών ακμών που έχουν κοινό το ένα άκρο τους.

✓ **Διαγώνιος** $(\boldsymbol{\delta})$ του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές του που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα.

✓ Το τετράγωνο της διαγωνίου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τριών διαστάσεων του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, δηλαδή

$$\boldsymbol{\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.}$$

Απόδειξη:
Το ΛΜ είναι η διαγώνιος της βάσης. Άρα, θα έχουμε $(\Lambda M)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.
Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ.
$(KM)^2 = (K\Lambda)^2 + (\Lambda M)^2$
$(KM) = \delta$ και $(\Lambda M) = \delta$, άρα $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

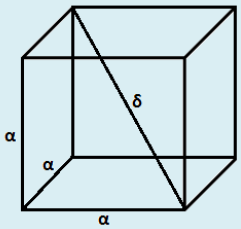
✓ Το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας** ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι

$$\boldsymbol{E_{o\lambda} = 2(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma).}$$

✓ Ο **όγκος** ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι

$$\boldsymbol{V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma.}$$

- **Κύβος** ονομάζεται το πρίσμα του οποίου οι βάσεις είναι τετράγωνα με πλευρά $\boldsymbol{\alpha}$ και οι παράπλευρες έδρες είναι τετράγωνα.



  ✓ Η **διαγώνιος** δ, είναι

$$\boldsymbol{\delta = \alpha\sqrt{3}}\,.$$

  ✓ Το **εμβαδό της ολικής επιφάνειας** ενός κύβου είναι

$$\boldsymbol{E_{o\lambda} = 6\,\alpha^2.}$$

  ✓ Ο **όγκος** ενός κύβου είναι

$$\boldsymbol{V = \alpha^3.}$$

Σημείωση: *Ως μονάδα μέτρησης όγκου θεωρούμε ένα κύβο με ακμή μήκους* $1\ m$.
Ο όγκος του ισούται με $1\,m^3$ *(κυβικό μέτρο). Για τη μέτρηση του όγκου των υγρών χρησιμοποιούμε το* dm^3*(κυβικό δεκατόμετρο) το οποίο ονομάζουμε ως λίτρο*(l). *Το* cm^3*(κυβικό εκατοστόμετρο) λέγεται χιλιοστόλιτρο* (ml).

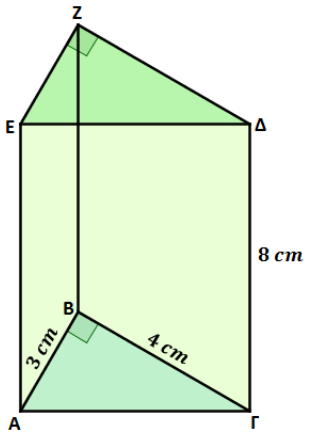
Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $4\ cm, 6\ cm$ και $8\ cm$.
   Λύση:
   $\alpha = 4\ cm, \beta = 6\ cm$ και $\gamma = 8\ cm$
   $E_{o\lambda} = 2(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma)$
   $E_{o\lambda} = 2(4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8) \Rightarrow\ E_{o\lambda} = 208\ cm^2$
   $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$
   $V = 4 \cdot 6 \cdot 8 \Rightarrow\ V = 192\ cm^3$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ορθού πρίσματος του οποίου το ύψος είναι $8\ cm$ και οι βάσεις του είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές $3\ cm$ και $4\ cm$, αντίστοιχα.
   Λύση:
   Υπολογίζουμε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$:
   $(A\Gamma)^2 = 3^2 + 4^2\ \Rightarrow\ (A\Gamma)^2 = 9 + 16$
   $\Rightarrow\ (A\Gamma)^2 = 25\ \Rightarrow A\Gamma = \sqrt{25}\ \Rightarrow A\Gamma = 5\ cm$

   Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του ορθού πρίσματος είναι:

   $E_\pi =\ \Pi_\beta \cdot \upsilon = (3 + 4 + 5) \cdot 8 = 12 \cdot 8 = 96\ cm^2$



Το εμβαδόν της βάσης είναι: $E_\beta = \frac{3\cdot 4}{2} = 6\ cm^2$

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι:

$E_{o\lambda} = E_\pi + 2\cdot E_\beta = 96 + 2\cdot 6 = 108\ cm^2$

3. Ένα ενυδρείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οι διαστάσεις της βάσης του είναι $85\ cm$ και $60\ cm$ και το ύψος του είναι $45\ cm$. Να υπολογίσετε πόσα λίτρα νερό θα χρειαστούν, για να γεμίσει το ενυδρείο κατά τα $\frac{8}{9}$ του.

Λύση:

Υπολογίζουμε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου:

$$V = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 85\cdot 60\cdot 45 = 229\,500\ cm^3$$

Ο όγκος του νερού είναι: $V_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} = \frac{8}{9}\cdot 229\,500 = 204\,000\ cm^3$

Γνωρίζουμε ότι $1\ cm^3 = 1\ ml = \frac{1}{1000}\ l$, $V_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} = \frac{204\,000}{1000} = 204\ l$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή $\alpha = 5\ cm$.
2. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $V = 420\ cm^3$. Οι διαστάσεις της βάσης είναι $6\ cm$ και $7\ cm$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου.
3. Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο. Το ύψος του πρίσματος είναι $15\ cm$ και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του $540\ cm^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.

4. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Αν διπλασιάσουμε την πλευρά της βάσης ενός κύβου, ο όγκος του οκταπλασιάζεται.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β) Αν διπλασιάσουμε το ύψος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τότε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του διπλασιάζεται.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ) Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όλες τις διαγώνιές του ίσες.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(δ) Σε κάθε ορθό πρίσμα οι παράπλευρες έδρες του είναι ίσα ορθογώνια.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

5. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι $352\ cm^2$. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του, αν γνωρίζετε ότι είναι ανάλογες προς τους αριθμούς $1, 2, 3$.

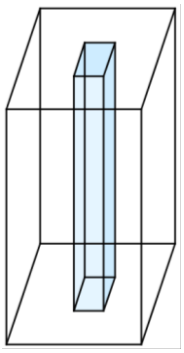
6. Οι διαστάσεις της βάσης ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι $6\ cm$ και $8\ cm$. Αν η διαγώνιος του είναι $\delta = 26\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του και τον όγκο του.

7. Αν η διαγώνιος κύβου είναι $\delta = 5\sqrt{3}\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του και τον όγκο του.

8. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου του οποίου οι διαστάσεις είναι διπλάσιες από τις διαστάσεις άλλου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με όγκο $120\ cm^3$.

9. Ορθό πρίσμα έχει βάση ρόμβο με διαγώνιους $\delta_1 = 24\ dm$ και $\delta_2 = 10\ dm$. Το ύψος του πρίσματος είναι $12\ dm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος σε m^2.

10. Επενδύσαμε μια μεταλλική δοκό που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ξύλινο πλαίσιο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η βάση της μεταλλικής δοκού έχει διαστάσεις $15\ cm$ και $20\ cm$ και το ύψος της είναι $3\ m$. Το ξύλινο πλαίσιο έχει το ίδιο ύψος με τη μεταλλική δοκό και η βάση του είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $35\ cm$ και $40\ cm$. Γεμίσαμε το κενό που δημιουργείται με συμπαγές μονωτικό υλικό. Να υπολογίσετε τον όγκο του υλικού που χρησιμοποιήσαμε.

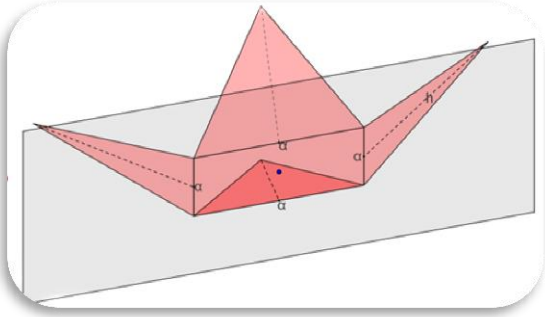


Εμβαδόν και Όγκος Κανονικής Τετραγωνικής Πυραμίδας

Διερεύνηση (1)

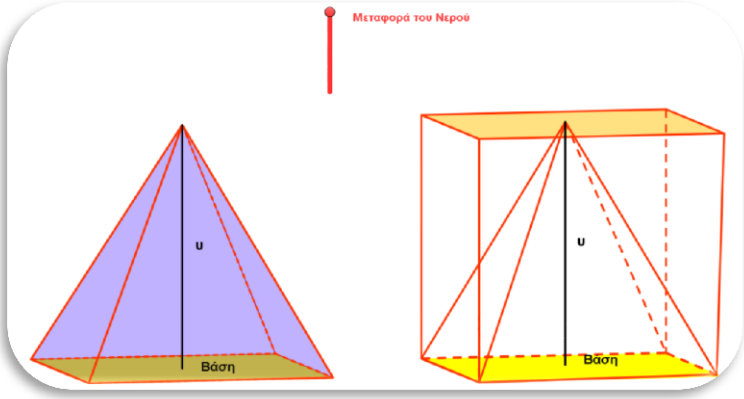
- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn05_Pyramida.ggb».*

  ✓ Να περιστρέψετε την πυραμίδα, να ανοίξετε και να κλείσετε το ανάπτυγμά της.
  ✓ Τι σχήμα έχουν οι επιφάνειες μιας τετραγωνικής πυραμίδας;
  ✓ Να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.



Διερεύνηση (2)

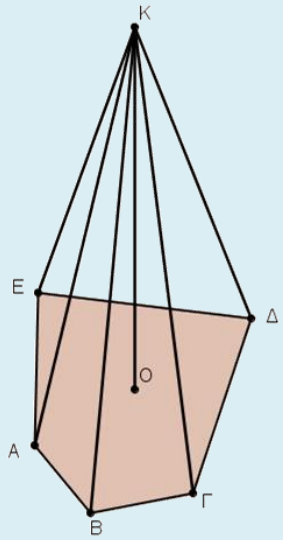
- Να ανοίξετε το αρχείο *«AlykEn05_OgkosPyramida.ggb».*



  ✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα, για να μεταφέρετε το νερό, από την πυραμίδα, στο πρίσμα που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.
  ✓ Να παρατηρήσετε τη σχέση μεταξύ των όγκων των δύο στερεών.

Μαθαίνω

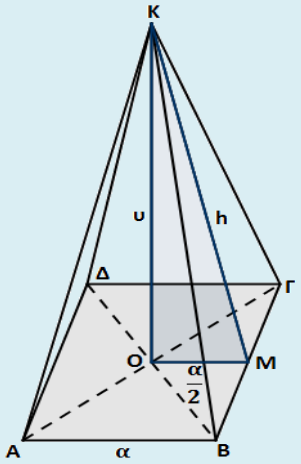
- **Πυραμίδα** ονομάζεται το στερεό, που έχει μια έδρα του να είναι πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του να είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.



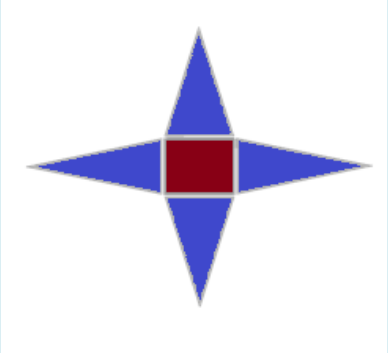
  - ✓ Το πολύγωνο ονομάζεται **βάση** της πυραμίδας.
  - ✓ Η κοινή κορυφή των τριγώνων ονομάζεται **κορυφή** της πυραμίδας.
  - ✓ Οι τριγωνικές έδρες της πυραμίδας, που έχουν κοινή κορυφή, ονομάζονται **παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας.
  - ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας και είναι κάθετο στη βάση της, ονομάζεται **ύψος** της πυραμίδας.

  Παράδειγμα: Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο $ΑΒΓΔΕ$ είναι η βάση της πυραμίδας, το σημείο K είναι η κορυφή της, τα τρίγωνα $ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ$ και $ΚΕΑ$ είναι οι παράπλευρες έδρες της και το ευθύγραμμο τμήμα KO, το οποίο είναι κάθετο στη βάση της πυραμίδας, είναι το ύψος της πυραμίδας.

- **Κανονική τετραγωνική πυραμίδα** ονομάζεται το στερεό του οποίου η μία έδρα είναι τετράγωνο και ονομάζεται **βάση** της πυραμίδας και οι άλλες έδρες του είναι ισοσκελή τρίγωνα ίσα μεταξύ τους με κοινή κορυφή και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες** της.



  - ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας κάθετα στο επίπεδο της βάσης ονομάζεται **ύψος** $(\boldsymbol{\upsilon})$ της πυραμίδας.
  - ✓ Το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της πυραμίδας ονομάζεται **παράπλευρο ύψος** ή **απόστημα** $(\boldsymbol{h})$ της πυραμίδας.
  - ✓
  - ✓ Το **εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας** της κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι
  $$\boldsymbol{E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2}}.$$
  - ✓ Το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας** της πυραμίδας είναι
  $$\boldsymbol{E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta}.$$
  - ✓ Ο **όγκος** της πυραμίδας είναι
  $$\boldsymbol{V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3}}.$$



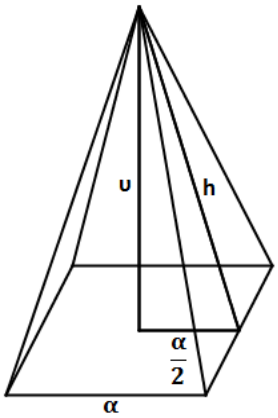
Παράδειγμα

- Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης $64\ cm^2$ και παράπλευρο ύψος $12\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση:

Υπολογίζουμε την πλευρά της βάσης της πυραμίδας:

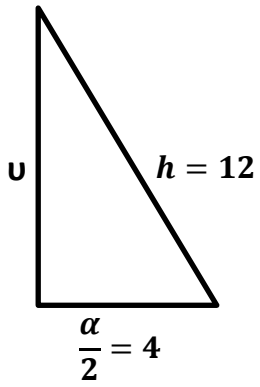
$E_\beta = 64 \Rightarrow \alpha^2 = 64 \Rightarrow \alpha = 8\ cm$



Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίσουμε το ύψος της πυραμίδας:

$\upsilon^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 144 - 16$

$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{128} \Rightarrow \upsilon = 8\sqrt{2}\ cm$



Υπολογίζουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας:

$E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta$

$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{2} = 192\ cm^2$

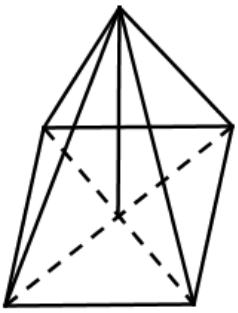
$E_{o\lambda} = 192 + 64 = 256\ cm^2$

Ο όγκος της πυραμίδας είναι:

$V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} = \frac{64 \cdot 8\sqrt{2}}{3} = \frac{512\sqrt{2}}{3} cm^3$

Δραστηριότητες

1. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης $12\,cm$ και απόστημα $10\,cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
2. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς $9\,cm$. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι $279\,cm^2$. Να υπολογίσετε το απόστημα της πυραμίδας.
3. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ισούται με $144\,cm^2$ και το παράπλευρο ύψος της είναι $8\,cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
4. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με περίμετρο $48\,cm$ και ύψος $15\,cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο της.
5. Η διαγώνιος της βάσης κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $5\sqrt{2}\,cm$. Αν το ύψος της πυραμίδας είναι $12\,cm$, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
6. Το εμβαδόν της βάσης κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $81\,cm^2$. Το ύψος της πυραμίδας είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ της περιμέτρου της βάση της. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
7. Στο σχήμα φαίνεται η ξύλινη στέγη μιας κατοικίας που είναι κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Η πλευρά της βάσης έχει μήκος $10m$ και οι παράπλευρες έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα. Η στέγη στηρίζεται από μια κεντρική δοκό, κάθετη στο κέντρο της βάσης. Οι παράπλευρες έδρες θα καλυφθούν με ειδικό υλικό που στοιχίζει €25 το τετραγωνικό μέτρο. Οι δοκοί για την κατασκευή του σκελετού της στέγης και της δοκού αντιστήριξης (όπως φαίνονται στο σχήμα με έντονες γραμμές) στοιχίζουν €15 το μέτρο. Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος κατασκευής της ξύλινης στέγης.

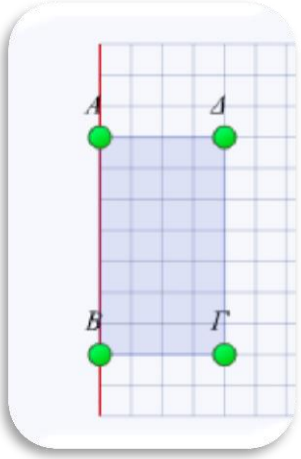


Εμβαδόν και Όγκος Κυλίνδρου

Διερεύνηση

- Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26_Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)_1.0»*.

  ✓ Να επιλέξετε την «ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κύλινδρος» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες των παραγράφων 1.1, 1.2 και 1.3.

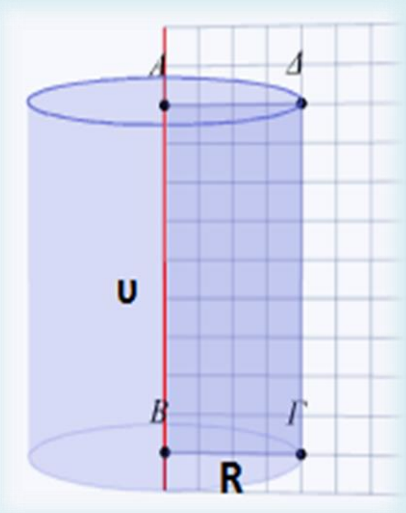


Μαθαίνω

- **Ορθός κύλινδρος** ή **κύλινδρος** ονομάζεται το στερεό που παράγεται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο εκτελεί μια πλήρη περιστροφή στον χώρο γύρω από μια πλευρά του.

  ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα γύρω από το οποίο περιστρέφεται, λέγεται **άξονας** ή **ύψος** ($\boldsymbol{\upsilon}$) του κυλίνδρου.

  ✓ Οι παράλληλοι κύκλοι που δημιουργούνται από την περιστροφή ονομάζονται **βάσεις** και η ακτίνα τους, **ακτίνα** ($\boldsymbol{R}$) του κυλίνδρου.



- ✓ Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή του τμήματος που είναι παράλληλο με τον άξονα ονομάζεται **κυρτή επιφάνεια** του κυλίνδρου. **Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας** του κυλίνδρου είναι

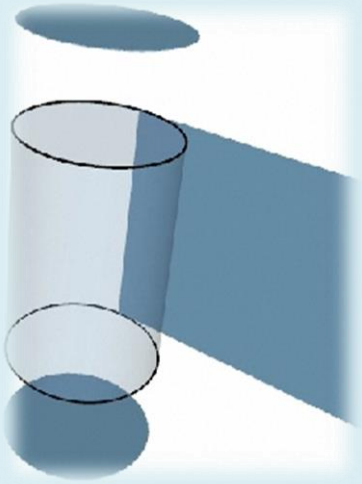
$$\boldsymbol{E_{\kappa} = 2\pi R\upsilon.}$$

- ✓ Το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας** είναι

$$\boldsymbol{E_{o\lambda} = E_{\kappa} + 2E_{\beta}} \text{ ή } \boldsymbol{E_{o\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2.}$$

- ✓ Ο **όγκος** του κυλίνδρου είναι

$$\boldsymbol{V = \pi R^2 \upsilon.}$$



Παράδειγμα

- Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης $4\ cm$ και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $40\pi\ cm^2$. Να υπολογίσετε:
  (α) το ύψος του κυλίνδρου
  (β) το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου.

  Λύση:

  (α) $E_{\pi} = 40\pi$

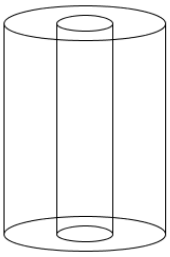
  $2\pi R\upsilon = 40\pi$

  $2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \upsilon = 40\pi \Rightarrow 8\pi\upsilon = 40\pi \ \Rightarrow \upsilon = \frac{40\pi}{8\pi} = 5\ cm$

  (β) $V = \pi R^2 \upsilon$
  $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 80\pi\ cm^3$

Δραστηριότητες

1. Ένας κύλινδρος έχει διάμετρο βάσης $10\ cm$ και ύψος $8\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.
2. Ένας κύλινδρος έχει όγκο ίσο με $175\pi\ cm^3$. Αν το ύψος του είναι ίσο με $7\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
3. Ένα κυλινδρικό κουτί, ανοικτό από πάνω, έχει ύψος $12\ cm$ και ακτίνα βάσης $8\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της συνολικής του επιφάνειας.
4. Μια κυλινδρική δεξαμενή έχει ύψος $6\ m$ και ακτίνα βάσης ίση με τα $\frac{2}{3}$ του ύψους της. Να υπολογίσετε τον όγκο της δεξαμενής.
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου, αν η διάμετρος της βάσης του είναι ίση με $6\ cm$ και το ύψος του είναι διπλάσιο της ακτίνας του.
6. Στο σχήμα δίνονται δύο κύλινδροι. Οι βάσεις τους είναι ομόκεντροι κύκλοι και η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου είναι $2\ cm$ και του εξωτερικού κύκλου $6\ cm$. Αν το ύψος των δύο κυλίνδρων είναι $10\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται αν ο εσωτερικός κύλινδρος είναι κενός.

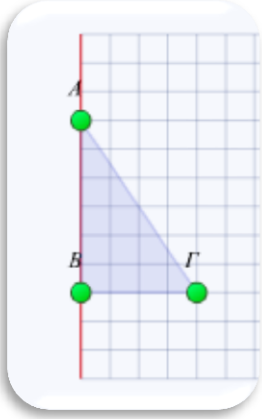


Εμβαδόν και Όγκος Κώνου

Διερεύνηση

- Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26_Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)_1.0».*

  ✓ Να επιλέξετε την «ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Κώνος» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες των παραγράφων 2.1, 2.2 και 2.3.

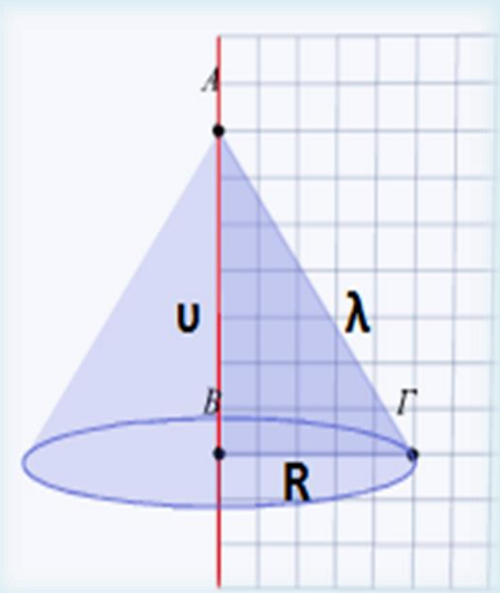


Μαθαίνω

- **Ορθός κώνος** ή απλώς **κώνος** λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.

  ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα γύρω από το οποίο περιστρέφεται, λέγεται **άξονας** ή **ύψος** $(\boldsymbol{\upsilon})$ του κώνου.

  ✓ Ο κύκλος που δημιουργείται από την περιστροφή ονομάζεται **βάση** και η ακτίνα της, **ακτίνα** $(\boldsymbol{R})$ του κώνου.



- ✓ Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της υποτείνουσας ονομάζεται **κυρτή επιφάνεια** του κώνου και η υποτείνουσα ονομάζεται **γενέτειρα** $(\boldsymbol{\lambda})$ του κώνου. Το **εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας** του κώνου είναι

$$\boldsymbol{E_\kappa = \pi R \lambda.}$$

- ✓ Το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας** είναι

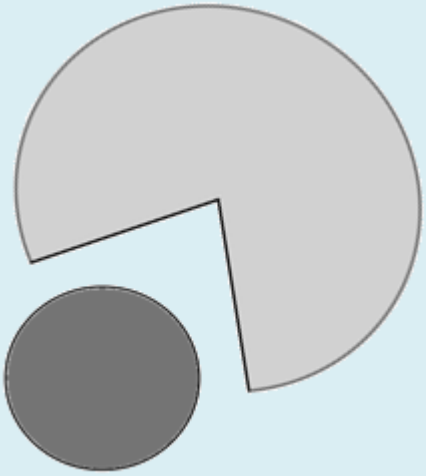
$$\boldsymbol{E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta}$$

ή

$$\boldsymbol{E_{o\lambda} = \pi R \lambda + \pi R^2.}$$

- ✓ Ο **όγκος** κώνου είναι

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}.}$$



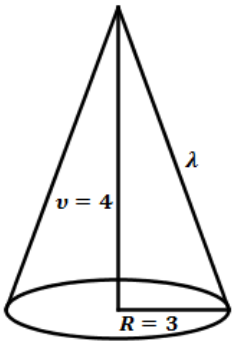
Παράδειγμα

- Ένας κώνος έχει ύψος $\upsilon = 4\ cm$ και ακτίνα βάσης $R = 3\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδό της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

Λύση:

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίσουμε τη γενέτειρα λ του κώνου:

$\lambda^2 = 4^2 + 3^2 \ \Rightarrow \lambda = \sqrt{25} \ \Rightarrow \lambda = 5\ cm$



Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι:

$E_\kappa = \pi R \lambda = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\ cm^2$

Ο όγκος του κώνου είναι:

$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 4}{3} = 12\pi\ cm^3$

Δραστηριότητες

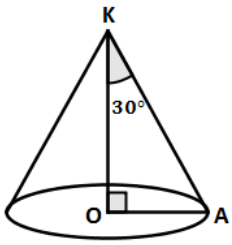
1. Ένας κώνος με διάμετρο βάσης $6\ cm$ έχει γενέτειρα $\lambda = 5\ cm$. Να υπολογίσετε:
   (α) το ύψος του κώνου
   (β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.

2. Το εμβαδόν της βάσης ενός κώνου είναι $25\pi\ cm^2$. Αν η γενέτειρα του κώνου είναι ίση με $13\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

3. Ένας κώνος έχει όγκο $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}\ cm^3$ και ακτίνα βάσης $2\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.

4. Η κυρτή επιφάνεια ενός κώνου είναι $204{,}1\ cm^2$ και η γενέτειρα του είναι $13\ cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

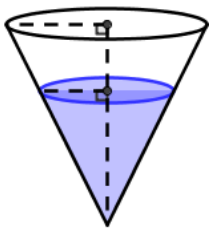
5. Το ύψος του κώνου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα έχει μήκος $KO = 6\sqrt{3}\ cm$ και σχηματίζει γωνία $O\widehat{K}A = 30°$ με τη γενέτειρα λ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.



6. Σε έναν κώνο η γενέτειρα λ είναι ίση με τα $\frac{13}{12}$ του ύψους του υ. Αν $\lambda + \upsilon = 75\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

7. Να υπολογίσετε τον λόγο του εμβαδού της βάσης ενός κώνου προς το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του, αν το ύψος του είναι ίσο με τη διάμετρο της βάσης του.

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα κωνικό δοχείο με ακτίνα $9x\ cm$ και ύψος $12x\ cm$. Τοποθετούμε υγρό στο δοχείο και η στάθμη του υγρού φτάνει σε ύψος $8x\ cm$. Αν η ακτίνα του κύκλου που σχηματίζεται από το υγρό είναι $6x\ cm$, να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό του όγκου του δοχείου που είναι άδειο.



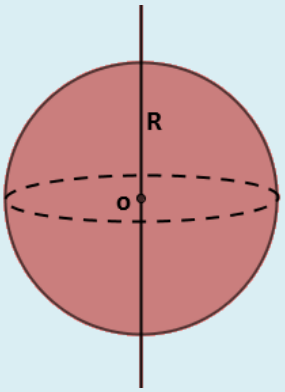
Εμβαδόν και Όγκος Σφαίρας

Διερεύνηση

- Να χρησιμοποιήσετε το ***λογισμικό «Dalest - Elica – potter's wheel»***.
  - ✓ Να επιλέξετε το πλήκτρο *«Another set»* μέχρι να εμφανιστεί η ένδειξη *«circle set».*
  - ✓ Στη συνέχεια να επιλέξετε το πλήκτρο *«Another figure»* μέχρι να εμφανιστεί στην οθόνη σας ένας κύκλος.
  - ✓ Να επιλέξετε το πλήκτρο *«Design»* και να μετακινήσετε τον κύκλο έτσι ώστε το κέντρο του να είναι στον άξονα περιστροφής.
  - ✓ Στη συνέχεια να επιλέξετε το πλήκτρο *«See in 3D»* και στη συνέχεια το πλήκτρο *«Split».*
  - ✓ Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

- **Σφαίρα** ονομάζεται το στερεό που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κύκλο (O, R) γύρω από μία διάμετρό του.



  - ✓ Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή του κύκλου ονομάζεται **επιφάνεια της σφαίρας**.
  - ✓ Το κέντρο O του κύκλου (O, R) είναι το **κέντρο της σφαίρας.**
  - ✓ Η απόσταση οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας της σφαίρας από το κέντρο O είναι ίση με την ακτίνα R του κύκλου (O, R) και είναι η **ακτίνα της σφαίρας**.
  - ✓ Το **εμβαδό της επιφάνειας** της σφαίρας είναι $\boldsymbol{E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2}$
  - ✓ Ο **όγκος** της σφαίρας είναι $\boldsymbol{V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi R^3}$**.**

Σημείωση: Η τομή ενός επιπέδου και μιας σφαίρας είναι κύκλος. Όταν το κέντρο της σφαίρας ανήκει στο επίπεδο, τότε ο κύκλος στον οποίο τέμνονται ονομάζεται ***μέγιστος κύκλος***

Παράδειγμα

- Να υπολογίσετε τον όγκο σφαίρας με επιφάνεια $64\pi\ cm^2$.

Λύση:

$E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2$
$4\pi R^2 = 64\pi \ \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4\ cm$
$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi R^3$
$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi\ cm^3$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο σφαίρας με ακτίνα $R = 7\ cm$.

2. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.
   Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε ο όγκος της:

   Α. Διπλασιάζεται **Β**. Τριπλασιάζεται **Γ**. Τετραπλασιάζεται **Δ**. Οκταπλασιάζεται

3. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.
   Το εμβαδόν μιας σφαίρας με ακτίνα R και το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου της σφαίρας έχουν λόγο:

   Α. 1 **Β.** $\frac{1}{2}$ **Γ.** $\frac{1}{3}$ **Δ.** 4

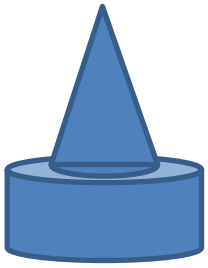
4. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου της.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β)Η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι πάντα κύκλος.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ) Η τομή σφαίρας και επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο του είναι πάντα κύκλος.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

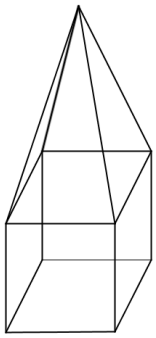
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο ενός κλειστού κουτιού που έχει σχήμα ημισφαίριο με ακτίνα $R = 7\ cm$.
6. Μια μπάλα από ελαστικό έχει εσωτερική ακτίνα $15\ cm$ και το πάχος του ελαστικού είναι $0{,}4\ cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο του ελαστικού.

Δραστηριότητες Ενότητας

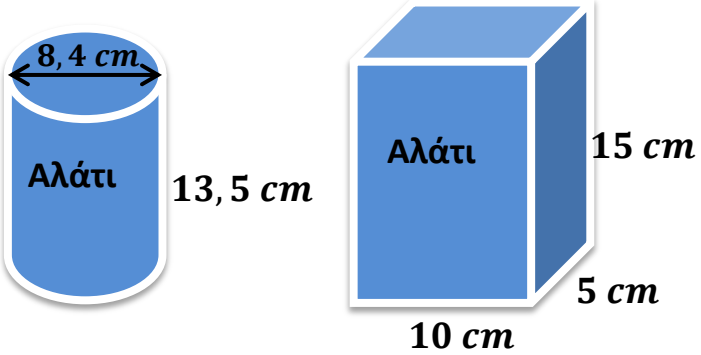
1. Στο σχήμα δίνεται ένας κύλινδρος με ύψος $\upsilon = 3\ cm$ και ακτίνα $R = 6\ cm$ και ένας κώνος με ακτίνα το μισό της ακτίνας του κυλίνδρου και γενέτειρα $\lambda = 5\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού.



2. Τοποθετούμε μια πυραμίδα σε έναν κύβο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το ύψος της πυραμίδας είναι διπλάσιο από την ακμή $2x$ του κύβου, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που δημιουργείται συναρτήσει του x.



3. Μια εταιρεία συσκευάζει αλάτι σε δύο διαφορετικές συσκευασίες όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:

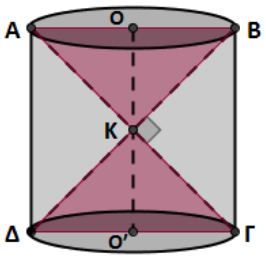


(α) Να συγκρίνετε τον όγκο των δύο συσκευασιών, αν γεμίζουν πλήρως.

(β) Ποια συσκευασία εξυπηρετεί καλύτερα την εταιρεία για σκοπούς αποθήκευσης και τακτοποίησης των προϊόντων στα ράφια των υπεραγορών; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Ένας μαθητής που βρίσκεται στο εργαστήριο της χημείας έχει στη διάθεσή του έναν κυλινδρικό δοκιμαστικό σωλήνα με διάμετρο $2\ cm$ και ύψος $30\ cm$. Ο σωλήνας περιέχει υγρό μέχρι τη μέση. Ο μαθητής άδειασε το περιεχόμενο του σωλήνα σε δοχείο σχήματος κώνου με ακτίνα βάσης $3\ cm$, ο οποίος και γέμισε. Να υπολογίσετε το ύψος του κωνικού δοχείου.

5. Στο σχήμα οι δύο κώνοι είναι ίσοι και η κορυφή τους K είναι το μέσο του ύψους υ, του κυλίνδρου.



(α) Αν $B\widehat{K}\Gamma = 90°$, να δείξετε ότι $R = \frac{\upsilon}{2}$, όπου R η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου.

(β) Αν V είναι ο όγκος του κυλίνδρου και V_κ ο όγκος του κάθε κώνου, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{V}{V_\kappa}$.

(γ) Να υπολογίσετε τον όγκο του μέρους του κυλίνδρου που περικλείεται από τον κύλινδρο και τους δύο κώνους.

6. Για να φτιάξουμε το κάλυμμα ενός πολύφωτου (αμπαζούρ) χρησιμοποιούμε ειδικό πάπυρο. Το σχήμα προκύπτει από τη διαφορά δύο κώνων.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πάπυρου που χρειαζόμαστε, αν ο μεγάλος κώνος έχει ύψος $70\ cm$ και ακτίνα βάσης $15\ cm$, ενώ ο μικρός έχει ύψος $20\ cm$ και ακτίνα βάσης $10\ cm$.

(β) Αν ο πάπυρος κοστίζει €35 το τετραγωνικό μέτρο, πόσο θα κοστίσει το κάλυμμα;

7. Ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει κεριά αγοράζει την πρώτη ύλη σε ράβδους από κερί που έχουν σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $60\ cm$, $16\ cm$, $10\ cm$. Θα χρησιμοποιήσει 10 ράβδους από κερί, για να κατασκευάσει διακοσμητικά κεριά που θα έχουν σχήμα κύβου με ακμή $2\ cm$.

(α) Πόσα διακοσμητικά κεριά θα κατασκευάσει, χωρίς να έχει απώλεια πρώτης ύλης;

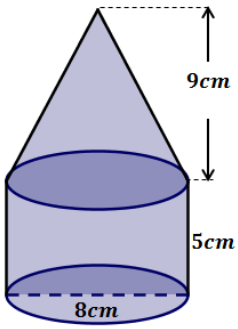
(β) Αν η κάθε ράβδος στοιχίζει €50, πληρώνει €500 για εργατικά και €200 για έξοδα συσκευασίας, πόσα τοις εκατό θα κερδίσει αν πωλεί τα διακοσμητικά κεριά προς 25 σεντ το ένα;

8. Ένα ποτήρι έχει σχήμα κυλίνδρου με διάμετρο $8\ cm$ και ύψος $14\ cm$. Είναι γεμάτο με νερό μέχρι το $\frac{1}{2}$ του ύψους του. Αν τοποθετήσουμε στο ποτήρι 3 παγάκια (συμπαγή) σχήματος κύβου με ακμή $2\ cm$, να υπολογίσετε:

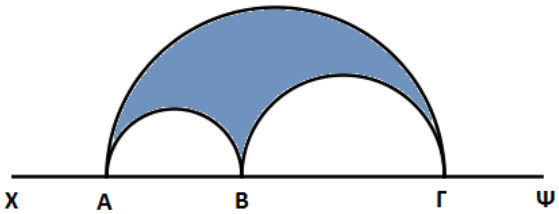
(α) το ύψος στο οποίο θα ανεβεί η στάθμη του νερού, όταν θα λιώσουν τα παγάκια

(β) τον όγκο του νερού, όταν θα λιώσουν τα παγάκια.

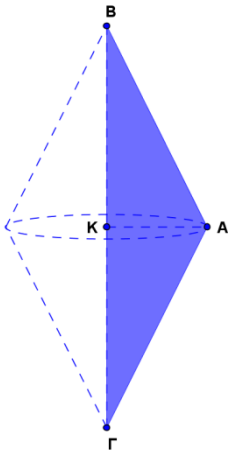
9. Στο σχήμα δίνονται ένας κύλινδρος και ένας κώνος. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.



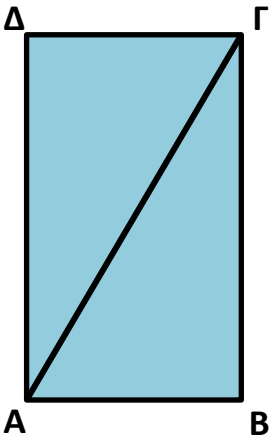
10. Στο σχήμα φαίνονται τρία ημικύκλια. Το σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $X\Psi$. Αν $AB = 4\ cm$ και $A\Gamma = 10\ cm$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το σκιασμένο χωρίο.



11. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, η γωνία $BA\Gamma = 120°$ και η $AB = 6\ cm$. Το σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



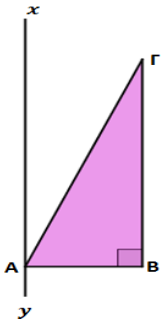
12. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος στρέφεται γύρω από την $A\Delta$ κατά $360°$ και σχηματίζει έναν κύλινδρο. Αν $A\Gamma = 30\sqrt{3}cm$ και $B\hat{A}\Gamma = 60°$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Το εμβαδόν των εδρών ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι $12\ cm^2$, $24\ cm^2$ και $32\ cm^2$. Αν οι διαστάσεις του είναι ακέραιοι αριθμοί, να υπολογίσετε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου.

2. Στο σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xAy, ο οποίος είναι κάθετος στην AB. Αν η $AB = 5\ cm$ και η $B\Gamma = 12\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

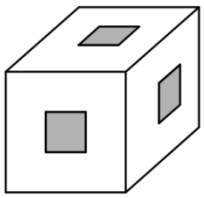
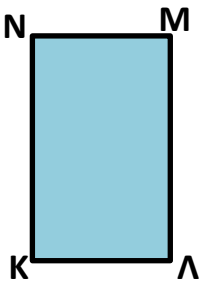


3. Ένας κώνος έχει όγκο $V = 10\ dm^3$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου που έχει:
   α. τετραπλάσιο ύψος από τον αρχικό
   β. τριπλάσια ακτίνα βάσης από τον αρχικό
   γ. τετραπλάσιο ύψος και τριπλάσια ακτίνα βάσης από τον αρχικό.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90°$, $\hat{\Gamma} = 30°$ και $B\Gamma = 10\ cm$. Περιστρέφουμε το τρίγωνο γύρω από την υποτείνουσα του κατά $360°$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.

5. Μια πυραμίδα με βάση τρίγωνο, λέγεται *τριγωνική πυραμίδα*. Αν όλες οι έδρες της είναι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, λέγεται *κανονικό τετράεδρο*. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κανονικού τετραέδρου με ακμή βάσης αcm.

6. Στο σχήμα δίνεται ένας κύβος με ακμή $3\ m$. Στο μέσο κάθε έδρας υπάρχει μια τετραγωνική τρύπα με πλευρά $1\ m$. Αν οι τρύπες αυτές διαπερνούν τον κύβο, να υπολογίσετε το ολικό εμβαδόν του στερεού.



7. Δίνεται το ορθογώνιο $K\Lambda MN$ του διπλανού σχήματος με $1cm < K\Lambda < \Lambda M$. Αν το ορθογώνιο περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την KN δημιουργεί κύλινδρο με εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_\pi = 126\pi cm^2$, ενώ αν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την $K\Lambda$ δημιουργεί έναν άλλο κύλινδρο με εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας E'_π.
   (α) Να αποδείξετε ότι $E'_\pi = E_\pi$.
   (β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, αν το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.
   (γ) Να αποδείξετε ότι $E'_{o\lambda} - E_{o\lambda} = 64\pi cm^2$.