Ex.1

1) Résoudre, pour n > 2, l'équation :

$n\,C_n^3 + C_n^2 = 3n(n-1)$.

2) Résoudre, pour n > 3, l'équation :

$A_n^4 = 42.A_n^2$

Ex.2

1) Développer $(1+x)^n$.

2) En déduire, en fonction de n, la somme $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^n$.

Ex.3

Huit garçons et sept filles désirent former une équipe de volley-ball.

Le nombre de joueurs sur le terrain est 6.

1) Combien y a-t-il d'équipes possibles ?

2) Combien peut-on former d'équipes composées de 2 garçons et 4 filles ?

3) Combien peut-on former d'équipes contenant au moins une fille ?

4) Combien peut-on former d'équipes contenant au plus 4 garçons ?

Ex.4

Deux frères, Sami et Fouad, font partie du club « Échecs » de l'école.
Ce club est constitué de 12 élèves et on compose une équipe de 4 élèves par tirage au sort.
Quel est le nombre des équipes possibles comportant :

1) les deux frères à la fois ?

2) l'un des deux frères exactement ?

3) au moins l'un des deux frères ?

Ex.5

Une urne contient 5 boules blanches, 5 boules noires et 5 boules vertes. Les boules de chaque couleur sont numérotées de 1 à 5. On tire simultanément 3 boules.

1) De combien de façons obtient-on des boules de même couleur ?

2) De combien de façons obtient-on des boules numérotées 1, 2, 3 ?

3) De combien de façons obtient-on une boule et une seule numérotée 2 ?

Ex.6

A et B sont deux événements et p une probabilité.

1) On donne $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cup B) = 0,65$.

a - Calculer $p(A/B)$.

b- A et B sont-ils indépendants ? En déduire $p(B/A)$.

2) Sachant que A et B sont *incompatibles.*

On donne $p(A) = 0,6$ et $p(B) = 0,3$. Calculer $p(A \cup B)$.

3) Sachant que A et B sont deux événements *indépendants*.

a- On donne $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,2$. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

b - On donne $p(A) = 0,2$ et $p(A \cap B) = 0,16$. Calculer $p(B)$ et $p(A \cup B)$.

c - On donne $p(A \cap B) = 0,1$ et $p(A \cup B) = 0,6$. Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

4) On donne $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,6$ et $p(A \cap B) = 0,2$. Calculer :

a - $p(A/B)$, $p(B/A)$.

b - $p(\overline{A}/B)$, $p(A/\overline{B})$.

c - $p(\overline{A} \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Ex.7

Deux machines A et B produisent le même article. 80% des articles sont fabriqués par la machine A dont 25% présentent un défaut et 5% des articles fabriqués par B présentent un défaut. Soient les événements suivants :

A : « l'article vient de la machine A ».

D : « l'article présente un défaut ».

1) Calculer $p(A \cap D)$.

2) Calculer $p(D)$.

3) Calculer $p(A/D)$ et $p(\overline{A}/D)$.

4) Calculer $p(A/\overline{D})$.

Ex.8

Une urne U_1 contient 24 boules blanches et 8 boules noires.

Une urne U_2 contient 6 boules blanches et 3 boules noires.

Soit (E) l'expérience suivante : « on choisit au hasard une urne et on en tire une boule ».

1) Sachant qu'on a choisi l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?

2) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

3) Sachant que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2 ?

4) Dans cette partie on répète l'expérience (E) n fois en remettant la boule tirée dans l'urne choisie après chaque tirage.

a) Calculer, en fonction de n, la probabilité p de tirer *au moins* une boule noire.

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $p > 0,99$.

Ex.9

Une urne U contient cinq boules : ***deux*** blanches et ***trois*** noires.
On tire de U deux boules et le tirage de ces deux boules se fait de la manière suivante :
On tire une première boule et on note sa couleur ; on la remet ensuite dans l'urne en ajoutant en plus
dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée ; on tire ensuite une seconde boule .

On considère les événements suivants :

B_1 : " on obtient une boule blanche au premier tirage "

N_1 : " on obtient une boule noire au premier tirage "

B_2 : " on obtient une boule blanche au second tirage "

N_2 : " on obtient une boule noire au second tirage "

Calculer : $p(B_2/B_1)$, $p(B_2/N_1)$, $p(B_2)$, $p(B_1/N_2)$

Ex.10

On dispose d'une urne contenant 5 boules ***rouges*** et 3 boules ***noires*** et d'une pièce de monnaie fabriquée de façon que les probabilités de pile et face sont respectivement proportionnelles à 2 et 3. Un joueur lance la pièce de monnaie.

Si la pièce de monnaie montre une pile, le joueur tire au hasard 2 boules de l'urne.

Si la pièce de monnaie montre une face, le joueur tire au hasard 3 boules de l'urne.

Le joueur gagne si toutes les boules tirées de l'urne sont rouges.

On considère les événements : F : « La pièce de monnaie montre une face »
P : « La pièce de monnaie montre une pile »
et G : « Le joueur gagne le jeu ».

1) Montrer que la probabilité $p(F) = 0,6$ et calculer $p(P)$.

2) Calculer $p(G/F)$, $p(G/P)$ et $p(G)$.

3) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « La pièce de monnaie montre une face *sachant que* le joueur gagne le jeu ».
   B : « La pièce de monnaie montre une pile *sachant que* le joueur perd le jeu ».

4) On suppose dans cette partie que le joueur joue n fois en remettant les boules tirées dans l'urne après chaque tirage.
   a) Calculer, en fonction de n, la probabilité *p* qu'il gagne *au moins* une fois.

   b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $p > 0,94$.

Ex.11

Dans une boutique il y a deux tiroirs T_1 et T_2 contenant des cravates.
Le tiroir T_1 contient 15 cravates en soie : 3 rouges, 5 vertes et 7 bleues.
Le tiroir T_2 contient 10 cravates en polyester : 2 rouges, 5 vertes et 3 bleues.

A- On choisit au hasard, une cravate de T_1 et une de T_2.
On désigne par E et F les deux événements suivants :
E : « les deux cravates choisies sont de même couleur »
F : « les deux cravates choisies sont l'une rouge et l'autre bleue »

1) Démontrer que la probabilité P(E) est égale à $\frac{26}{75}$.

2) Calculer P(F).

B- Dans cette partie, on choisit au hasard un des deux tiroirs et de ce tiroir on choisit au hasard une cravate. On considère les événements suivants :
R : « la cravate choisie est rouge »
T_1 : « la cravate choisie provient du tiroir T_1 »

1) Calculer $P(R / T_1)$ et $P(R \cap T_1)$.
2) Calculer P(R).

C- On suppose que les 25 cravates sont placées dans un même tiroir T et on choisit simultanément et au hasard trois cravates de T.
Le prix d'une cravate en soie est 50 000LL et celui d'une cravate en polyester est 10 000LL.
On désigne par X la somme des prix des trois cravates choisies.
Calculer $P(X \leq 100\,000)$.

Variable aléatoire

Ex.12

Un joueur lance 3 pièces de monnaie .Il reçoit 5000 L.L s'il obtient 3 piles, 3000 L.L s'il obtient 2 piles, 1000 L.L s'il obtient une pile et il paye n L.L s'il obtient 3 faces.
Soit X la somme reçue ou payée par le joueur.

1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

2) Donner la loi de probabilité de X.

3) Calculer l'espérance mathématique de X.

4) Calculer la valeur de n pour que le jeu soit équitable. (E(X) = 0)

Ex.13

Une boite B_1 contient 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3.
Une boite B_2 contient 3 boules blanches numérotées 2, 3 et 4.
On tire, au hasard, *une boule* de *chaque boite*.
Soit X la somme des deux numéros tirés.

1) Définir la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

Ex.14

Une usine fabrique des montres.
4 % de ces montres présentent un défaut α et 10% présentent un défaut β.
On suppose que l'existence de l'un des défauts est indépendante de l'existence de l'autre.
Une montre est tirée au hasard.
1) Calculer la probabilité pour que la montre tirée présente les deux défauts α et β.

2) On considère les événements suivants :
A : « La montre tirée présente uniquement le défaut α ».
B : « La montre tirée présente uniquement le défaut β ».
F : « La montre tirée ne présente aucun défaut ».
Démontrer que P(A) = 0,036 et calculer P(B) et P(F).

3) L'usine vend la montre à 90 000 L.L mais elle rend à l'acheteur :
- 10 000 L.L si la montre présente le défaut α.
- 15 000 L.L si la montre présente le défaut β.
- 30 000 L.L si la montre présente les deux défauts.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque montre associe le prix définitif payé par l'acheteur.
a - Déterminer la loi de probabilité de X.
b - Calculer l'espérance mathématique E(X).
Que signifie cette valeur pour l'usine.

Ex.15
Le tableau suivant représente la distribution des âges de 26 hommes et 24 femmes.

Age en années	[20;25[	[25;30[	[30;35]
Nombre d'hommes	8	8	10
Nombre de femmes	5	9	10

On choisit au hasard, 3 personnes parmi ces 50 personnes pour former un comité. Soit les événements
M : «le comité est formé de trois hommes».
F : «le comité est formé de trois femmes».
A : «le comité est mixte (formé d'hommes et de femmes)».
B : «l'âge de chaque membre du comité est inférieur à 30 ans».

1) Calculer chacune des probabilités p(M), p(F) et p(A).

2) a- Calculer p(B) et montrer que $p(B \cap \overline{A}) = \frac{33}{700}$. En déduire $p(B \cap A)$.

b- Calculer p(B/A).

3) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre des femmes d'un comité dont l'âge est inférieur à 25 ans. Déterminer la loi de probabilité de X.

Ex.16

On considère deux sacs S_1 et S_2 tels que:

S_1 contient six cartes numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

S_2 contient cinq cartes numérotées 0, 1, 2, 4, 5.

A- **Une** carte est tirée au hasard du sac $\mathbf{S_1}$:

- si elle porte l'un des numéros 1 ou 2, on tire simultanément et au hasard **trois** cartes du sac $\mathbf{S_2}$.
- si elle porte l'un des numéros 3, 4, 5 ou 6, on tire simultanément et au hasard **deux** cartes du sac $\mathbf{S_2}$.

On considère les événements :

K : « la carte tirée du sac $\mathbf{S_1}$ porte l'un des numéros 1 ou 2 ».
L : « la carte tirée du sac $\mathbf{S_1}$ porte l'un des numéros 3, 4, 5 ou 6».
E : « Le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\mathbf{S_2}$ est zéro ».

1) a- Calculer les probabilités p(K) et p(L).

b- Montrer que $p(E \cap K) = \frac{1}{5}$.

c- Calculer $p(E \cap L)$ et déduire p(E).

2) Sachant que le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\mathbf{S_2}$ est zéro, calculer la probabilité que l'on ait tiré trois cartes de $\mathbf{S_2}$.

B- Dans cette partie, on utilise **seulement** le sac $\mathbf{S_2}$.
On tire simultanément et au hasard **trois** cartes de ce sac.

Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros portés par les trois cartes tirées,

ainsi les valeurs possibles de X sont 2, 4 et 5.

Démontrer que $p\,(X= 4) = \frac{3}{10}$ et déterminer la loi de probabilité de X.