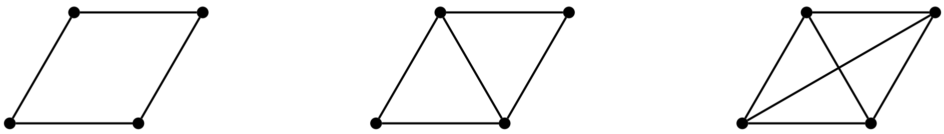
Hintergrundinformationen

Hinweis: Diese Informationen beinhalten teilweise Lösungen zu den Aufgaben. Wer gerne selber rätseln, experimentieren und ausprobieren möchte, sollte die Lektüre auf später verschieben.

Ausgehend von der Konstruktion von Fachwerken in der Statik haben sich Wissenschaftler mit starren Konstrukten auseinander gesetzt. Fachwerke bestehen aus Stäben und Verbindungsstücken. Ein wichtiger Aspekt dabei ist die Starrheit oder umgekehrt die Beweglichkeit eines solchen Objektes (je nach Anwendungsbereich und Art der Verbindungsstücke). Zweiteres kommt in Form von Koppelgetrieben zum Beispiel in der Robotik vor. In diesem Projekt beschäftigen wir uns mit dem ersten Aspekt, der Starrheit. Diese findet, wie aus dem historischen Kontext entstanden, in der Statik, aber auch, wie wir noch sehen werden, in Material- und Biowissenschaften eine Rolle.

Häufig werden Konstrukte mit festen Verbindungsstücken mittels Graphen modelliert. Ein Graph G besteht aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq \{\{v, w\} \,|\, v, w \in E\}$, wobei eine Kante $e = \{v, w\}$ heißt, dass die Knoten v und w durch diese Kante verbunden sind. Die Verbindungsstücke entsprechen einem Knoten und die Stäbe einer Kante des Graphen.

Gegeben sei ein Graph und für jede Kante eine positive reelle Zahl. Dann stellt sich die Frage, ob es ein Tupel an Punkten in der Ebene oder im Raum gibt, sodass der Graph in einer Form gezeichnet werden kann, in der jede Kante die ihr zugeordnete Zahl als Länge hat. Wir beschränken uns dabei auf den ebenen Fall. Des weiteren ist interessant, wie viele solcher Tupel es gibt, wenn Rotationen und Verschiebungen außer Acht gelassen werden. Solche Tupel nennen wir auch eine Einbettung des Graphen in die Ebene. In Abbildung 2 ist ein Graph mit verschiedenen Einbettungen zu sehen. Ein Graph heißt starr, wenn es modulo Rotationen und Verschiebungen nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ihn wie oben beschrieben mit generischen Kantenlängen in die Ebene einzubetten. Ein starrer Graph ist minimal starr oder ein Lamangraph, wenn das Entfernen einer Kante dazu führt, dass der erhaltene Graph nicht mehr starr ist. Graphen, die starr sind, aber kein Lamangraph, nennen wir auch überbestimmt. Jene Graphen, die nicht starr sind, heißen auch flexibel. Abbildung 1 zeigt je ein Beispiel eines Graphen mit diesen Eigenschaften.



(a) flexibel (b) Laman (c) überbestimmt

Abbildung 1: Graphen mit verschiedenen Eigenschaften bezüglich Starrheit

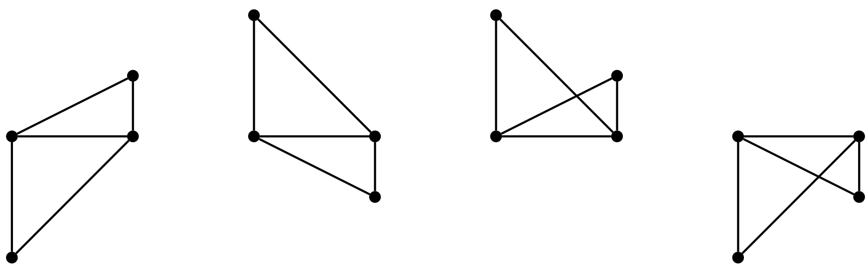


Abbildung 2: Realisierungen eines Graphen.

Georg Grasegger

In der Ebene

Im 19. Jahrhundert begannen Mathematiker und Wissenschaftler diverser Fachdisziplinen, sich mit Berechnungen der Statik in Fachwerken intensiv auseinanderzusetzen. James Clerk Maxwell, August Ritter, Karl Cullmann, Luigi Cremona, August Föppl und Lebrecht Henneberg waren einige der wichtigsten, die sich zu jener Zeit mit diesem Thema beschäftigten. Vor allem letzter wird, wie wir später sehen werden, mit dem Problem der Konstruktion von ebenen starren Fachwerken, also solchen, die in sich nicht beweglich sind, assoziiert. Henneberg gelang es schließlich, diese durch Konstruktionsvorschriften zu charakterisieren. Demnach kann jeder minimal starre Graph, ausgehend von einer einzelnen Kante, mittels endlicher Hintereinanderausführung zweier möglicher Schritte erzeugt werden:

1. Man fügt einen Knoten hinzu und verbindet diesen mit zwei verschiedenen Knoten, die schon im Graphen sind.
2. Man entfernt eine Kante und verbindet deren ursprüngliche Enden mit einem neuen Knoten. Den neuen Knoten verbindet man mit einem beliebigen Knoten im Graphen, der nicht Ende der entfernten Kante war.

Diese beiden Möglichkeiten sind in Abbildung 3 veranschaulicht.

(a) Typ 1 (b) Typ 2

Abbildung 3: Henneberg-Schritte beider Typen; eine graue Verbindung symbolisiert, dass die entsprechende Kante vorhanden sein kann oder nicht.

Minimal starre Graphen, welche nur durch Schritte vom Typ 1 erzeugt werden können, werden auch Lamangraphen vom Henneberg-Typ 1 genannt. Das Komplement davon in der Klasse der Lamangraphen bezeichnen wir als Henneberg-Typ 2. Diese benötigen für die Konstruktion also zumindest einen Schritt vom Typ 2.

Später fand Laman eine Charakterisierung mittels der Anzahl von Kanten und Knoten des Graphen und seiner Untergraphen. Wir bezeichnen dabei die Menge an Knoten mit V und die Menge an Kanten mit E. Die im Nachhinein nach ihm benannten Graphen sind demnach genau jene, für die Folgendes gilt:

- $|E| = 2|V| - 3$
- Für jedes $V' \subseteq V$ und den von V' induzierten Teilgraphen $\mathcal{G}' = (V', E')$ gilt $|E'| \leq 2|V'| - 3$.

Mit Hilfe der Konstruktionsvorschrift für Lamangraphen kann die Anzahl verschiedener Lamangraphen mit gegebener Anzahl an Knoten berechnet werden. Dazu reicht es, alle möglichen Konstruktionen zu erzeugen. Diese Menge beinhaltet jedoch zueinander isomorphe Graphen, da es verschiedene Wege gibt einen Graphen zu konstruieren. Isomorphe Graphen werden nicht extra gezählt. Da die Anzahl an Lamangraphen exponentiell mit der Anzahl der Knoten steigt, waren diese Zahlen bis vor kurzem nur bis zu 8 Knoten bekannt. Mit 12 Knoten gibt es demnach schon 44 176 717 verschiedene Lamangraphen. In ähnlicher Weise wurde die Anzahl der Lamangraphen vom Henneberg-Typ 1 berechnet.

Definition 1.
Eine Markierung *eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Funktion $\lambda \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. Das Paar (G, λ) nennen wir einen* markierten Graphen. *Eine* Realisierung *von G ist eine Funktion $\rho \colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Wir sagen, dass eine Realisierung ρ mit der Markierung λ* verträglich *ist, wenn für jede Kante $e \in E$ die Länge der Kante in der Realisierung ihrer Markierung entspricht.*

Ein markierter Graph (G, λ) *ist* realisierbar *genau dann, wenn es eine mit* λ *verträgliche Realisierung gibt.*

Sei λ_e die Markierung der Kante $e = \{i, j\}$. Dann können wir folgende Gleichungen für die Koordinaten der Knoten i, j aufstellen.

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = \lambda_{i,j}^2$$

Für den Dreiecksgraph erhalten wir etwa

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= \lambda_{1,2}^2\\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 &= \lambda_{2,3}^2\\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 &= \lambda_{3,1}^2\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus drei Gleichungen und 6 Unbekannten, wenn wir die λ als gegeben annehmen. In den komplexen Zahlen hat es also unendlich viele Lösungen. Ein Dreieck ist aber intuitiv stabil und nach den obigen Bedingungen starr. Viele der Lösungen des Gleichungssystems sind ähnlich.

Definition 2.
Zwei Realisierungen ρ_1 *und* ρ_2 *eines Graphen sind* äquivalent *genau dann, wenn es eine direkte euklidische Isometrie* σ *in* $\mathbb{R}^2$ *gibt, sodass* $\rho_1 = \sigma \circ \rho_2$.

Eine direkte euklidische Isometrie ist eine affin-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, welche Längen erhält.*

- Translation (in zwei Richtungen)
- Rotation

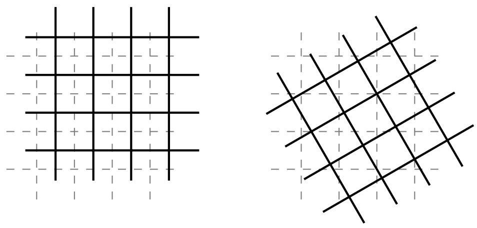


Abbildung 4: Affine Abbildungen, die Längen erhalten

Definition 3.
Ein markierter Graph (G, λ) *heißt* starr*, wenn folgendes gilt:*

- (G, λ) *ist realisierbar;*
- *Es gibt nur endlich viele nicht äquivalente Realisierungen, die mit* λ *verträglich sind.*

Wir nennen einen Graphen minimal starr *oder* Lamangraph*, wenn er starr ist und das Entfernen einer beliebigen Kante dazu führt, dass diese Eigenschaft verletzt wird.*

Wir können also schlussfolgern, dass ein starrer Graph mit n Knoten $2n - 3$ Kanten haben muss.

Um in unserem Gleichungssystem Verschiebungen und Rotationen von vornherein auszuschließen, können wir annehmen, dass ein Knoten im Ursprung liegt und ein anderer Knoten irgendwo auf der x-Achse. Wir erhalten dann für den Dreiecksgraphen etwa

$$\begin{aligned}x_2^2 &= \lambda_{1,2}^2\\ (x_2 - x_3)^2 + (-y_3)^2 &= \lambda_{2,3}^2\\ x_3^2 + y_3^2 &= \lambda_{3,1}^2\end{aligned}$$

Wir haben vorher schon erfahren, dass die Starrheit nur vom Graph nicht aber von den Längen abhängt. Daher wählen wir zufällige Werte für λ. Wenn wir das tun, können wir aber die erste Gleichung auch gleich weg lassen. Es bleiben zwei Gleichungen in zwei Unbekannten übrig.

$$\begin{aligned}(\lambda_{1,2} - x_3)^2 + (-y_3)^2 &= \lambda_{2,3}^2 \\ x_3^2 + y_3^2 &= \lambda_{3,1}^2\end{aligned}$$

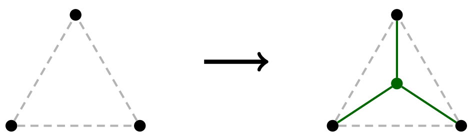
Dieses Gleichungssystem können wir in den komplexen Zahlen lösen. Im Allgemeinen sieht unser Gleichungssystem aber komplizierter aus und ist nicht mehr so einfach lösbar.

Im Raum

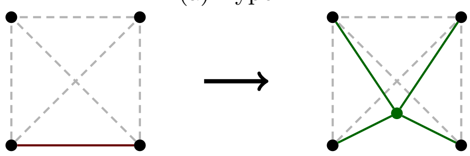
Eine Verallgemeinerung des Abzählkriteriums in Dimension drei würde lauten, dass ein Graph $G = (V, E)$ die Bedingungen $|E| = 3|V| - 6$ und $|E'| \leq 3|V'| - 6$ für jeden Teilgraph $G' = (V', E')$ von G erfüllen muss, um starr zu sein. In 3D haben wir natürlich drei Möglichkeiten für Translationen und wir können um jede Achse rotieren. Daher kommen die -6. Im Gegensatz zu Dimension zwei ist die Eigenschaft der Anzahl der Kanten nur noch notwendig aber nicht mehr hinreichend für minimal starre Graphen.

Definition 4.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wir nennen G einen Geiringergraph, wenn es nur eine endliche Anzahl an räumlichen Realisierungen in $\mathbb{R}^3$ gibt, die verträglich mit einer generischen Markierung $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$ sind.

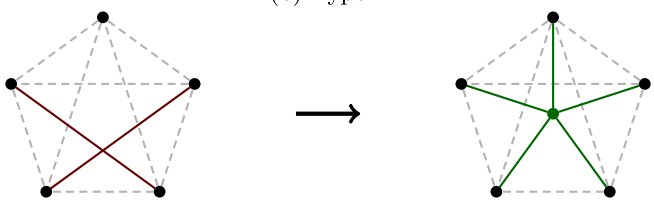
Geiringergraphen sind von einem Dreieck durch drei Typen von Schritten siehe Abbildung 5 konstruierbar. Schritte vom Typ 1 und 2 erhalten die Starrheit. Die Schritte vom Typ 3 können genauer klassifiziert werden, je nach dem ob die beiden gewählten Kanten einen Knoten gemeinsam haben, oder nicht. Jeder Geiringergraph kann so konstruiert werden, aber nicht jeder so konstruierte Graph ist minimal starr. Die Schritte vom Typ 3 erhalten nämlich die Starrheit nicht notwendigerweise. Eine Konstruktion vom Typ 3v erhält nicht einmal die Abzählbedingung der Kanten für Teilgraphen (siehe Abbildung 6).



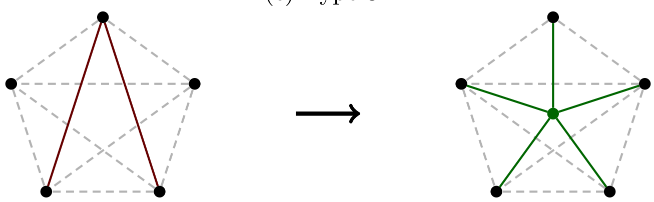
(a) Type 1



(b) Type 2



(c) Type 3x



(d) Type 3v

Abbildung 5: Henneberg Schritte in 3D. Eine strichlierte Linie heißt, dass dort eine Kante sein kann, aber nicht muss.

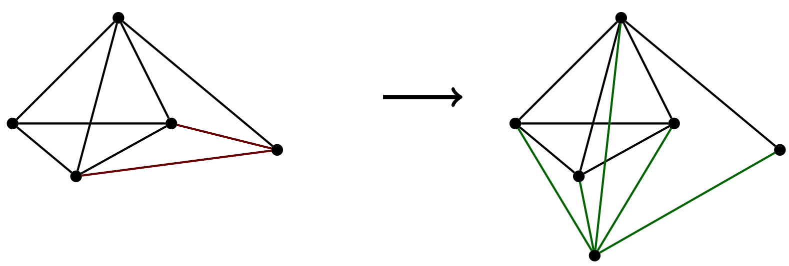


Abbildung 6: Ein flexibler Graph, der durch einen Henneberg-Schritt vom Typ 3 erzeugt wurde.