

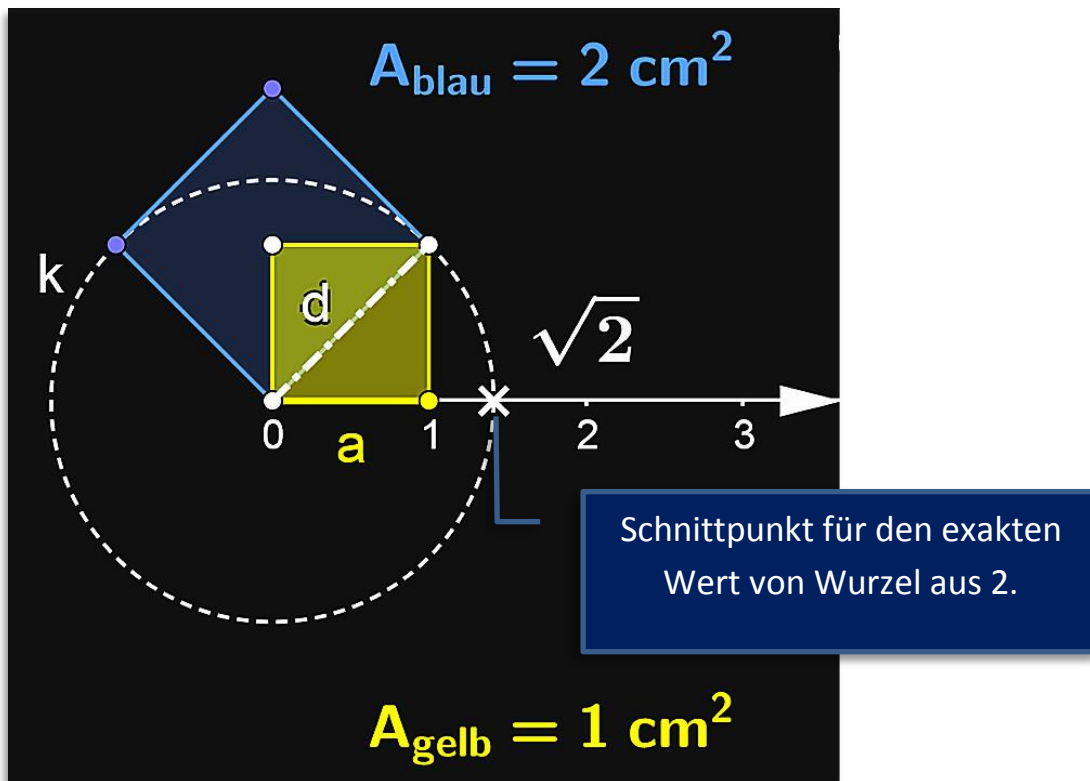
Approximieren von Wurzel aus 2

Wir wissen: Die *exakte Lösung* der Gleichung $x^2 = 2$ für $x > 0$ ist die reelle Zahl $\sqrt{2}$.

Frage 1: Wie findet man den eindeutigen Punkt auf der Zahlengeraden, der zu der irrationalen Zahl x mit $x^2 = 2$ und $x > 0$ gehört?

Lösung:

In der nachfolgenden Abbildung wird gezeigt, wie man diesen Punkt auf der Zahlengerade mit Zirkel und Lineal *eindeutig konstruieren* kann.



Beschreibung:

- (1) Konstruiere über der Strecke $\overline{01}$ ein Quadrat.
- (2) Zeichne um den Punkt für die Zahl 0 einen Kreis k mit dem Radius r gleich der Länge d , der Diagonalen des konstruierten Quadrates aus (1).
- (3) Der Schnittpunkt von Kreis k und der Zahlengeraden ist der gesuchte Punkt für die Zahl Wurzel aus 2.

Die Konstruktion ist eindeutig.

Frage 2: Wie schreibt man den exakten Wert von Wurzel aus 2 auf?

Lösung: Die Schreibweise für die Wurzel aus 2: $\sqrt{2}$.

Frage 3: Kann man den *exakten Wert* von Wurzel aus 2 durch eine Dezimalzahl eindeutig aufschreiben?

Lösung:

Nein.

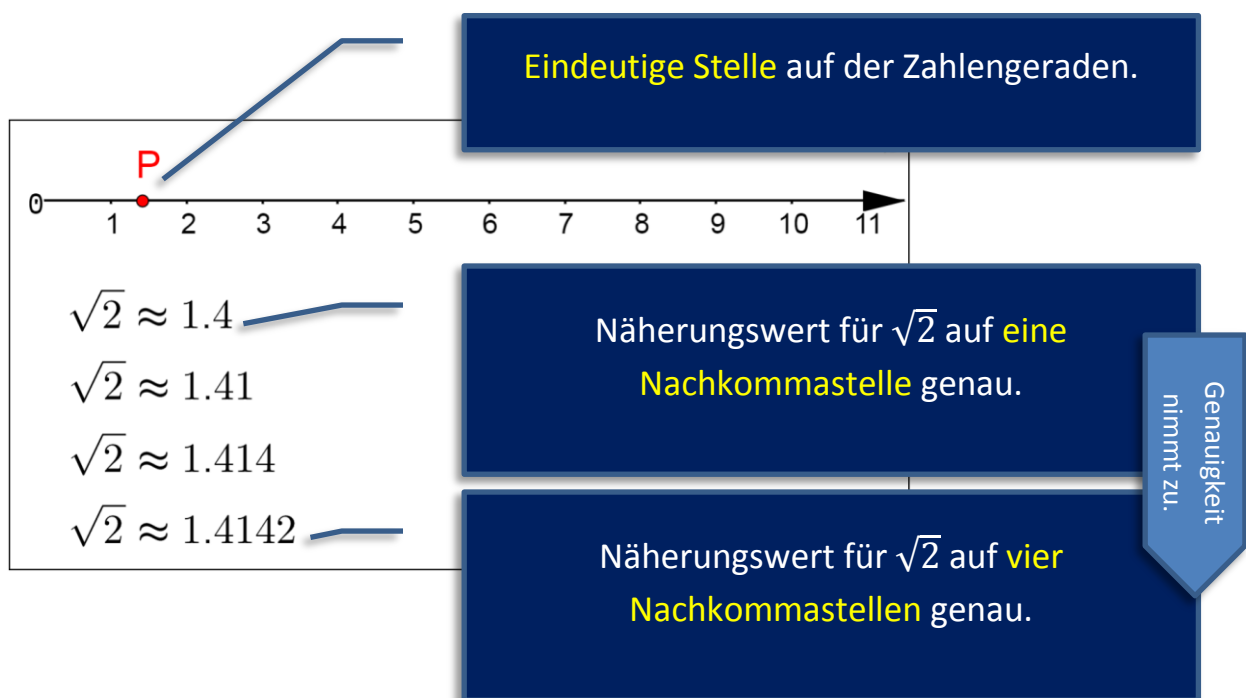
Wir wissen: Wurzel aus 2 ist eine irrationale Zahl und kann demzufolge durch keinen Bruch oder Dezimalzahl exakt (exakter Wert bedeutet: eindeutiger Zahlenwert) aufgeschrieben werden.

Frage 4: Kann man die irrationale Zahl Wurzel aus 2 durch rationale Zahlen approximieren (annähern, Zeichen: \approx)?

Lösung:

Ja.

Wir wissen aus dem Tafelbild „Quadratwurzeln aus 0 bis 100 auf der Zahlengeraden“:



Applet: <http://mathe-innovativ.fschumann.com/applet-quadratwurzeln-aus-0-bis-100-auf-der-zahlengeraden/>

Zu dem exakten (eindeutigen) Wert von $\sqrt{2}$ gibt es *unendliche viele* Näherungswerte. Die Näherungswerte unterscheiden sich in der *Anzahl der Nachkommastelle*.

Je mehr Nachkommastellen ein Näherungswert aufweist, desto genauer beschreibt der Näherungswert den exakten Wert.

Zusammenfassung:

- (1) Der exakte Wert einer beliebigen Quadratwurzel lässt sich näherungsweise mit einer vorgegebenen Anzahl von Nachkommastellen genau genug bestimmen.
- (2) Den absolut genauen Näherungswert gibt es nicht.
- (3) Exakte Werte sind keine Näherungswerte.

Satz: Jeder reellen Zahl - egal ob rational oder irrational - entspricht *genau ein Punkt* auf der Zahlengerade.