Є.П. Нелін

ГЕОМЕТРІЯ

В ТАБЛИЦЯХ

ПЛАНІМЕТРІЯ

СТЕРЕОМЕТРІЯ

КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Є.П. Нелін

ГЕОМЕТРІЯ В ТАБЛИЦЯХ

Навчальний посібник для учнів старших класів

Рекомендовано Головним управлінням
загальної середньої освіти
Міністерства освіти України

Харків
«СВІТ ДИТИНСТВА»
1997

ББК 22.151.0
Н 49

Роботу частково підтримано грантом APU 061075 Міжнародної Соросівської програми підтримки освіти в галузі точних наук в Україні.

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук В.О.Золотарьов,
канд. пед. наук О.І.Грузін

Нелін Є.П.

Н 49 Геометрія в таблицях: Навчальний посібник для учнів старших класів. — Х.: Світ дитинства, 1997. — 64 с.
ISBN 966-544-005-5

Навчальний посібник може бути використано як учнями для повторення шкільного курсу геометрії, так і вчителями на уроці при узагальненні тієї чи іншої теми в роботі за будь-яким підручником з геометрії для середньої школи. У посібнику логічно впорядковано й систематизовано той мінімум основних і додаткових даних із шкільного курсу геометрії (планіметрія, стереометрія, координати й вектори), який дозволяє розв'язувати найскладніші геометричні задачі, що пропонуються на випускних та вступних іспитах.

Н $\frac{1602050000-015}{97}$ **без оголошення** **ББК 22.151.0**

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

ГЕОМЕТРІЯ В ТАБЛИЦЯХ
Навчальний посібник для учнів старших класів

Редактор *А.Г. Піщанська*
Художній редактор *Т.І. Фещенко*
Комп'ютерна верстка *І.В. Макаров, І. Л. Цибульник*
Коректор *Т. П. Сидоренко*

Підписано до друку з оригінал-макета 17.02.97.
Формат 60х84/8. Папір офсет. Друк офсет. Ум. друк. арк. 8.
Тираж 10000 прим. Замовлення № 7-31 . Ціна договірна.

Видавництво «Світ дитинства»,
310001, м. Харків, вул. Плеханівська, 23.

Книжкова фабрика ім. М.В.Фрунзе,
310057, м. Харків-57, вул. Донець-Захаржевського, 6/8.

ISBN 966-544-005-5

ВСТУП

У посібнику логічно впорядковано й систематизовано той мінімум основних і додаткових даних із шкільного курсу геометрії (планіметрія, стереометрія, координати й вектори), який дозволяє розв'язувати найскладніші геометричні задачі, що пропонуються на випускних та вступних іспитах.

Окрім теоретичного матеріалу, поданого тут у таблицях, у додатку до цього посібника розглянуто приклади розв'язання геометричних задач*. Ці розв'язання передбачають безпосереднє застосування не тільки матеріалу відповідних таблиць, а й таких способів та методів, які практично не використовуються у шкільних підручниках: алгебраїчного (введення невідомого відрізка і невідомого кута), векторно-координатного, використання допоміжного кола (при розв'язанні планіметричних задач) тощо.

Для ефективного використання запропонованих таблиць з планіметрії та стереометрії необхідно враховувати деякі особливості логічної будови шкільного курсу геометрії.

Як відомо, шкільний курс геометрії дає уявлення про так звану дедуктивну побудову наукової теорії. Така побудова передбачає, що кожна властивість (теорема) курсу геометрії має бути доведена-виведена шляхом логічних міркувань з уже відомих (раніше доведених) властивостей. При цьому основні властивості основних фігур (у планіметрії це точки й прямі, а в стереометрії — точки, прямі й площини) — аксіоми — постулюються, тобто беруться без доведення.

У таблицях з планіметрії й стереометрії наведено системи аксіом, прийнятих у підручнику з геометрії О.В.Погорєлова (повне їх формулювання наведено в цьому підручнику). Проте і при роботі за іншими підручниками геометрії (наприклад Л.С.Атанасяна та ін.) можна використовувати ці таблиці, незважаючи на те, що в різних підручниках одне й те саме геометричне поняття може означатися по-різному. Наприклад, дотичну до кола можна означити як пряму, що має з колом лише одну спільну точку, або як пряму, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного у цю точку. Взявши за означення якесь одне з цих тверджень, можна довести друге (вже не як означення, а як властивість або ознаку дотичної). З цієї причини в різних підручниках з геометрії можуть наводитись різні означення одного й того самого поняття, проте повний набір властивостей, пов'язаних з даним поняттям, які зафіксовано в його означенні, ознаках та властивостях, є практично однаковим у всіх підручниках (саме цей набір властивостей і виділено в наших довідкових таблицях).

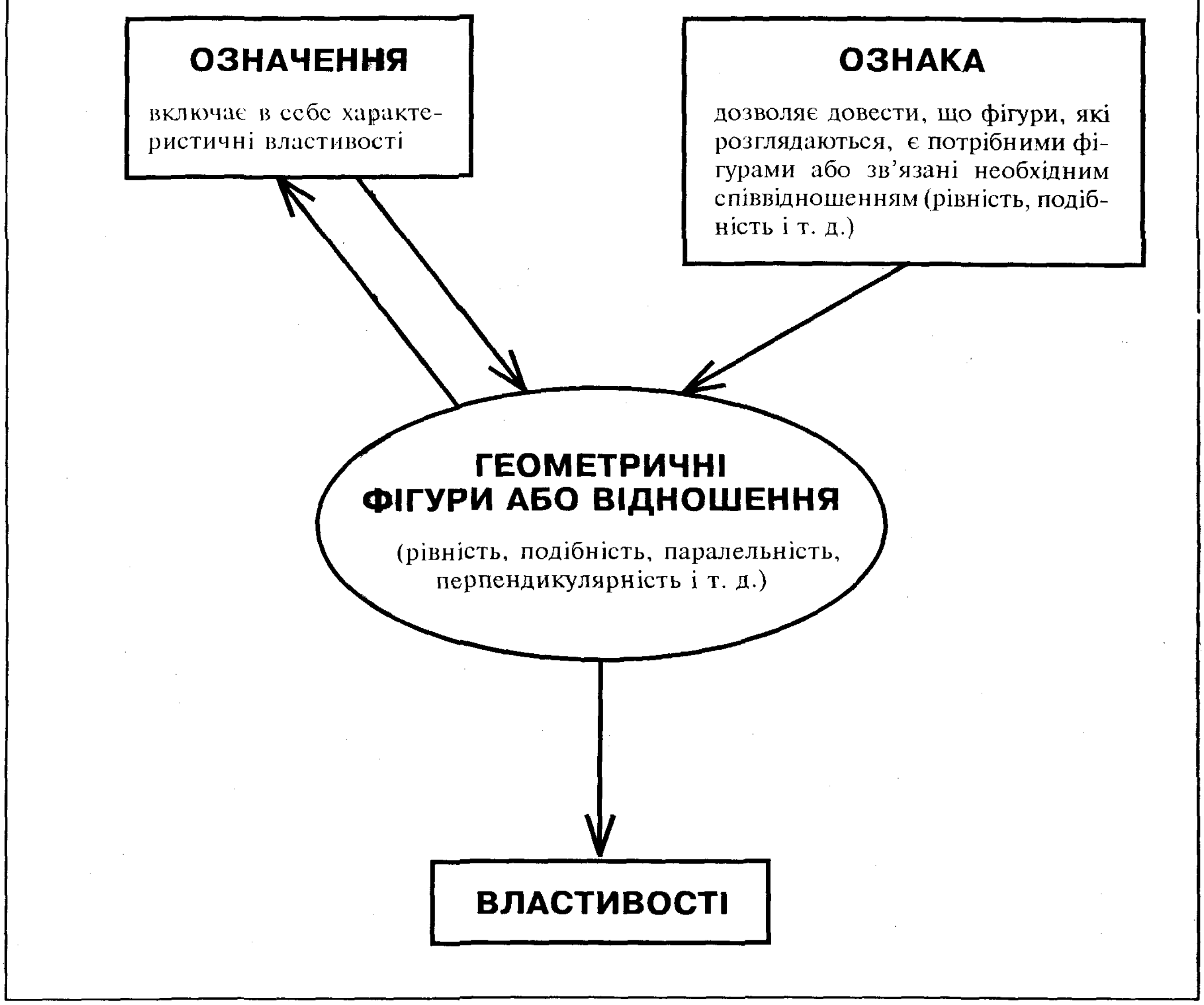
Працюючи з таблицями, слід зважати на те, що, окрім термінів «аксіома» й «теорема», в курсі геометрії вживаються також терміни «означення», «ознака», «властивість». Співвідношення між цими поняттями наведено в табл. 1 (див. також коментарі до цієї таблиці в додатку).

Навчальний посібник може бути використаний як учнями для повторення шкільного курсу геометрії, так і вчителями на уроці при узагальненні тієї чи іншої теми в процесі роботи за будь-яким підручником з геометрії для середньої школи.

* Див. Є.П.Нелін. Методи розв'язування геометричних задач: Додаток до навчального посібника «Геометрія в таблицях». — Харків: Світ дитинства, 1997.

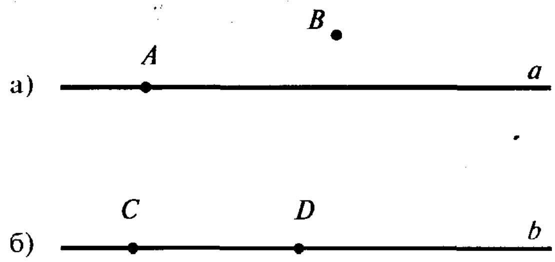
Таблиця 1

ОЗНАЧЕННЯ, ОЗНАКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР І ВІДНОШЕНЬ

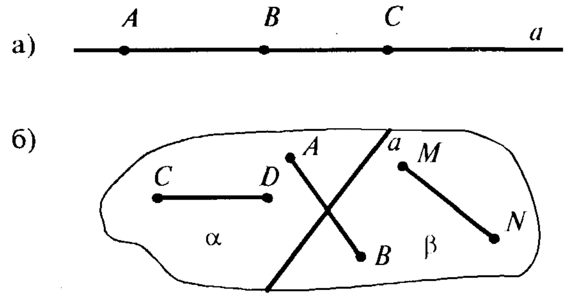


АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

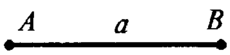
1. Аксіоми належності



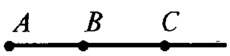
2. Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій та на площині



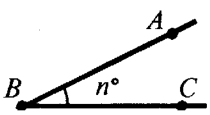
3. Аксіоми вимірювання



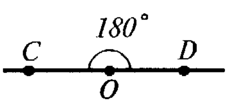
а) $AB = a > 0$



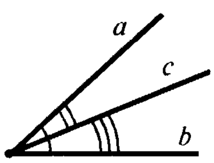
б) $AC = AB + BC$



в) $\angle ABC = n° > 0°$



г) $\angle COD = 180°$



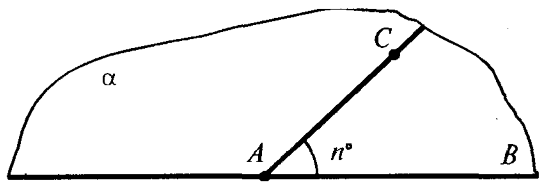
д) $\angle (ab) = \angle (ac) + \angle (cb)$

4. Аксіоми відкладання

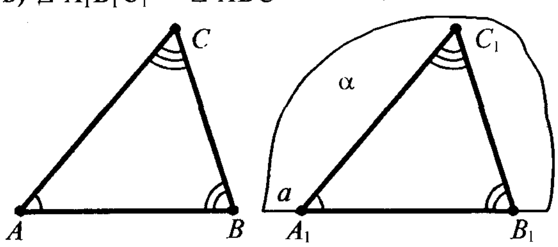
а) відрізок $OA = m$ — єдиний

б) $\angle CAB = n°$ — єдиний

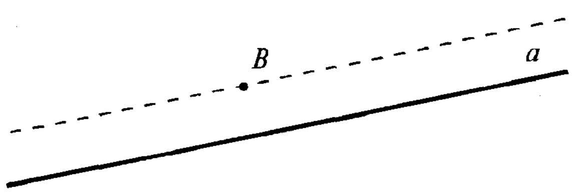
$0 < n < 180$



в) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$

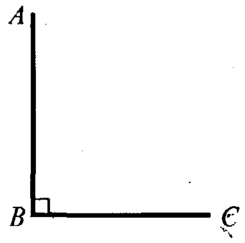


5. Аксіома паралельних



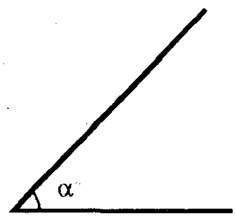
Таблиця 3

КУТИ



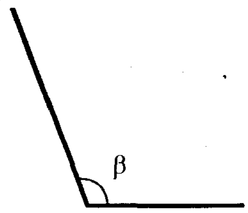
$\angle ABC = 90° = \frac{\pi}{2}$ рад

прямий кут



$\alpha < 90°$

гострий

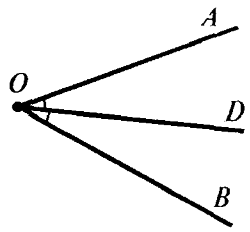


$\beta > 90°$

тупий

$\angle AOB = 180° = \pi$ рад

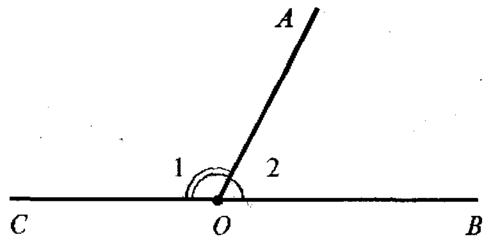
розгорнутий



Промінь *OD* — <u>*бісектриса*</u> $\angle AOB$

(ділить $\angle AOB$ пополам, тобто $\angle AOD = \angle BOD$).

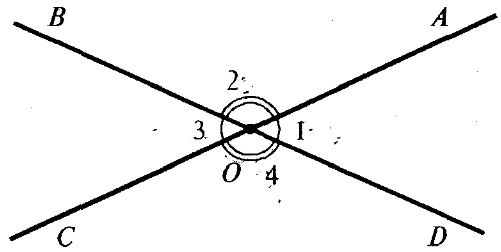
Суміжні кути



$\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні

$\boxed{\angle 1 + \angle 2 = 180°}$

Вертикальні кути

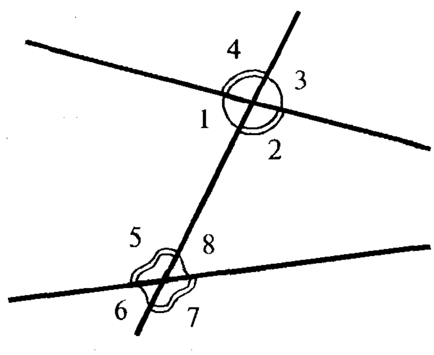


$\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні

$\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні

$\boxed{\angle 1 = \angle 3}$ $\boxed{\angle 2 = \angle 4}$

Кути при перетині двох прямих січною

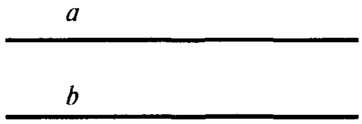


Внутрішні односторонні:
$\angle 1$ і $\angle 5$; $\angle 2$ і $\angle 8$.

Внутрішні різносторонні:
$\angle 1$ і $\angle 8$; $\angle 2$ і $\angle 5$.

Відповідні:
$\angle 4$ і $\angle 5$; $\angle 3$ і $\angle 8$; $\angle 1$ і $\angle 6$; $\angle 2$ і $\angle 7$.

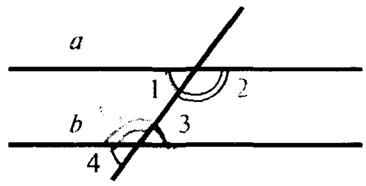
ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

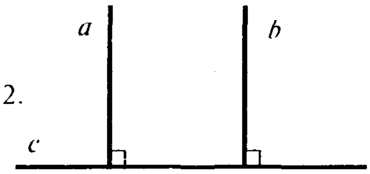


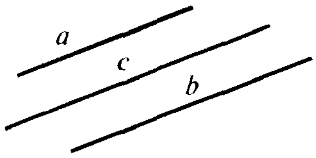
Означення: дві прямі називаються паралельними, якщо вони лежать у одній площині і не перетинаються.

$\boxed{a \parallel b}$

Через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній.

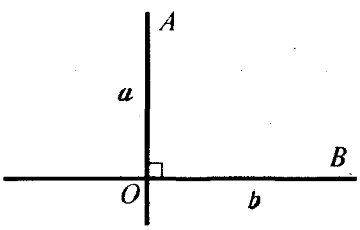
1. 

2. 

3. 

Ознаки паралельності	Властивості
1. Якщо $\angle 1 = \angle 3$, або $\angle 1 = \angle 4$, або $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, **то $a \parallel b$.**	1. Якщо $a \parallel b$, **то $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.**
2. Якщо $a \perp c$, $b \perp c$, **то $a \parallel b$.**	2. Якщо $a \parallel b$, $c \perp a$, **то $c \perp b$.**
3. Якщо $a \parallel c$, $b \parallel c$, **то $a \parallel b$.** ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***	

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

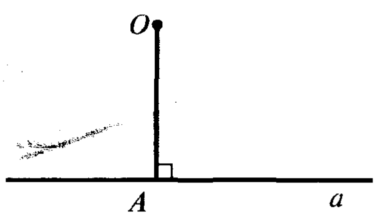


Означення: дві прямі називаються перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

$\boxed{a \perp b} \Leftrightarrow \boxed{\angle AOB = 90°}$

Через задану точку можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР ДО ПРЯМОЇ



Означення: перпендикуляром до даної прямої називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної, від заданої точки до точки перетину цих прямих.

$OA \perp a$	OA — перпендикуляр до a
A — основа перпендикуляра	

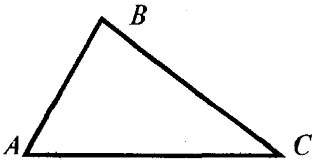
Властивості

1. Відстань від точки до прямої вимірюється по перпендикуляру.

$OA \perp a$	OA — відстань від точки O до прямої a

2. Перпендикуляр — найкоротша відстань від заданої точки до точок даної прямої.

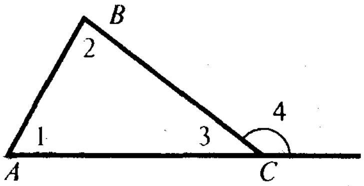
ВЛАСТИВОСТІ СТОРІН ТА КУТІВ ТРИКУТНИКА



$$\boxed{\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ}$$

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Зовнішній кут трикутника



Означення: кут, суміжний з внутрішнім кутом трикутника, називається зовнішнім кутом трикутника при даній вершині.

$\boxed{\angle 4 \text{ — зовнішній (при вершині } C)}$

Властивості

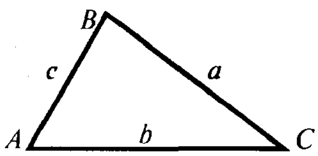
1. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

$$\boxed{\angle 4 = \angle 1 + \angle 2}$$

2. Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.

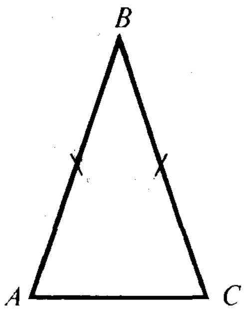
$$\boxed{\angle 4 > \angle 1,\ \angle 4 > \angle 2}$$

Нерівність трикутника



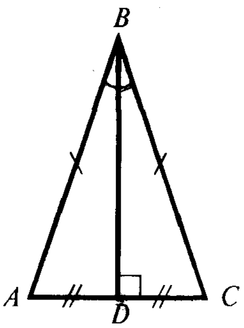
$$\boxed{|b - c| < a < b + c}$$

Рівнобедрений трикутник



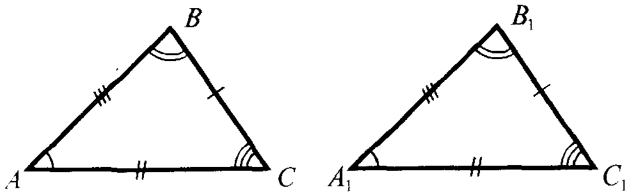
Означення: трикутник називається рівнобедреним, якщо у нього дві сторони рівні.

ΔABC — рівнобедрений ($AB = BC$)
AC — основа, AB і BC — бічні сторони



Властивості	Ознаки
1. Якщо в ΔABC: $AB = BC$, **то $\angle A = \angle C$** (кути при основі рівні). 2. Якщо ΔABC — рівнобедрений і BD — медіана, **то BD — висота й бісектриса.** ***У рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються.***	1. Якщо в ΔABC: $\angle A = \angle C$, **то $AB = BC$.** 2. Якщо в трикутнику збігаються: а) висота й медіана, або б) висота й бісектриса, або в) медіана й бісектриса, **то трикутник рівнобедрений.**

РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



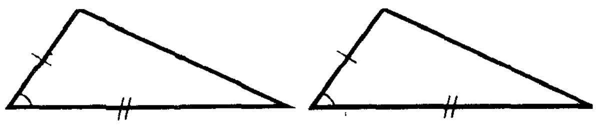
Означення: дві фігури називаються рівними, якщо вони рухом переводяться одна в одну.

$$\boxed{\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c|c} AB = A_1B_1 & \angle A = \angle A_1 \\ AC = A_1C_1 & \angle B = \angle B_1 \\ BC = B_1C_1 & \angle C = \angle C_1 \end{array}}$$

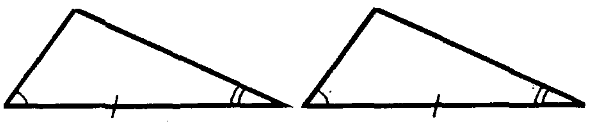
Властивості

1. У рівних трикутників всі відповідні елементи рівні (сторони, кути, медіани, висоти і т. д.).
2. У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів лежать рівні сторони.

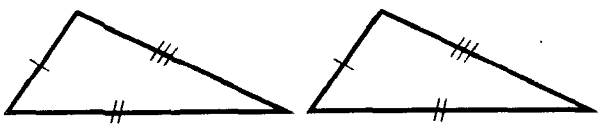
Ознаки рівності трикутників



1. За двома сторонами і кутом між ними.

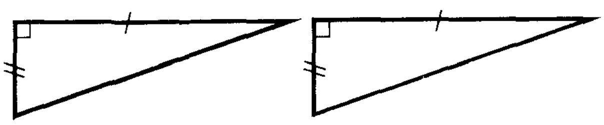


2. За стороною і двома прилеглими до неї кутами.

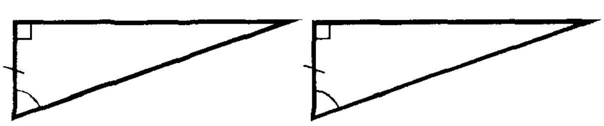


3. За трьома сторонами.

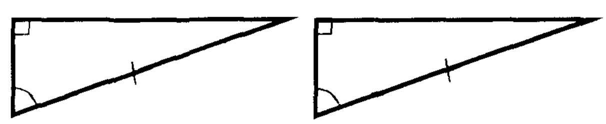
Ознаки рівності прямокутних трикутників



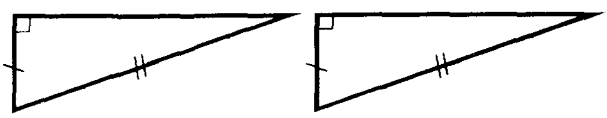
1. За двома катетами.



2. За катетом і гострим кутом.



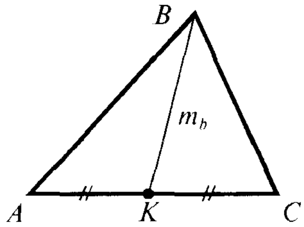
3. За гіпотенузою і гострим кутом.



4. За гіпотенузою і катетом.

Таблиця 7

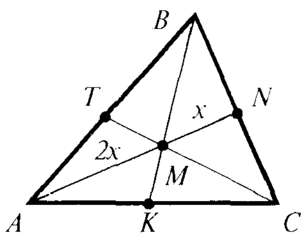
МЕДІАНА ТРИКУТНИКА



Означення: медіана трикутника — відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

BK — медіана	K — середина AC

Властивості

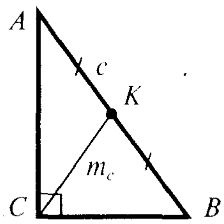


1. Всі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка кожну медіану ділить у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

M — точка перетину медіан (центр ваги трикутника)

$$\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1}$$

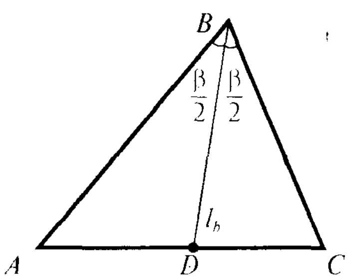
2. $$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$



3. $m_c = \frac{1}{2}c$ — у прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Таблиця 8

БІСЕКТРИСА ТРИКУТНИКА



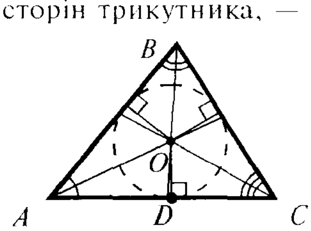
Означення: бісектриса трикутника — відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні.

BD — бісектриса трикутника	$\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle B$

Властивості

1. $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ — бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника.

2. Усі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, рівновіддаленій від трьох сторін трикутника, — центрі вписаного кола.



O — точка перетину бісектрис трикутника, центр вписаного кола.

3. $$\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$$
$$\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$$
$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

Таблиця 9

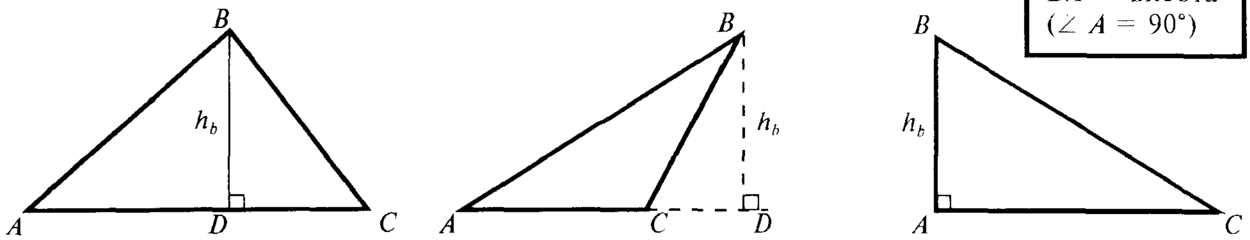
ВИСОТА ТРИКУТНИКА

Означення: висота трикутника — перпендикуляр, проведений з вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.

BD — висота	$BD \perp AC$

Для прямокутного трикутника:

BA — висота ($\angle A = 90°$)



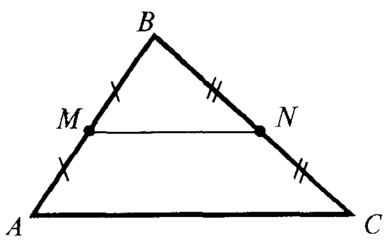
Властивості

1. Прямі, що містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці (ортоцентр).

2. $\boxed{h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}}$ — висоти трикутника обернено пропорційні його сторонам Зокрема, найбільша висота трикутника проведена до його найменшої сторони, а найменша висота — до найбільшої.

Таблиця 10

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА



Означення: середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

MN — середня лінія M — середина AB N — середина BC

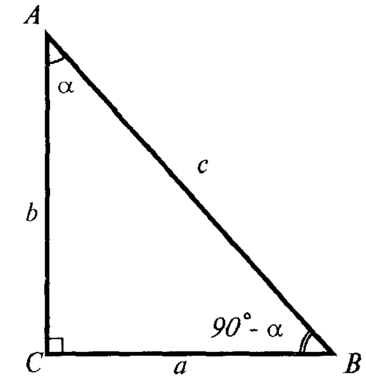
Властивості

1. $MN \parallel AC$
2. $MN = \frac{1}{2} AC$

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони.

Таблиця 11

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ЕЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



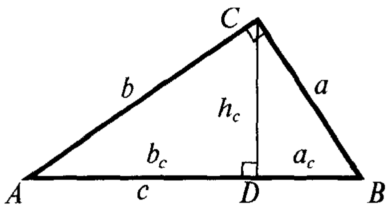
$\angle C = 90°$; a, b — катети; c — гіпотенуза; $\angle A = \alpha$.

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ — **теорема Піфагора**

$\boxed{\angle B = 90° - \alpha}$ $\boxed{c > a,\ c > b}$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha$$
$$b = c \cdot \cos\alpha$$
$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$$



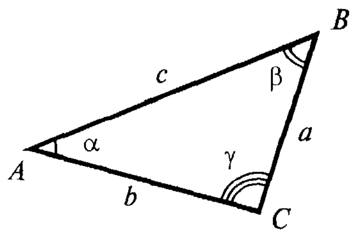
CD — висота

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c$$
$$a^2 = c \cdot a_c$$
$$b^2 = c \cdot b_c$$

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$
$\Delta CBD \sim \Delta ABC$
$\Delta ACD \sim \Delta CBD$

Таблиця 12

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ В ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ



Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

R — радіус описаного кола

Теорема косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Наслідки

1. Якщо $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$, то $\boldsymbol{\gamma = 90°}$, тобто трикутник прямокутний (теорема, обернена до теореми Піфагора).
2. Якщо $c^2 < a^2 + b^2$, то кут γ — гострий ($\cos\gamma > 0$); якщо c — найбільша сторона, то трикутник гострокутний.
3. Якщо $c^2 > a^2 + b^2$, то кут γ — тупий ($\cos\gamma < 0$).
4. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона: $\boldsymbol{a > b} \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

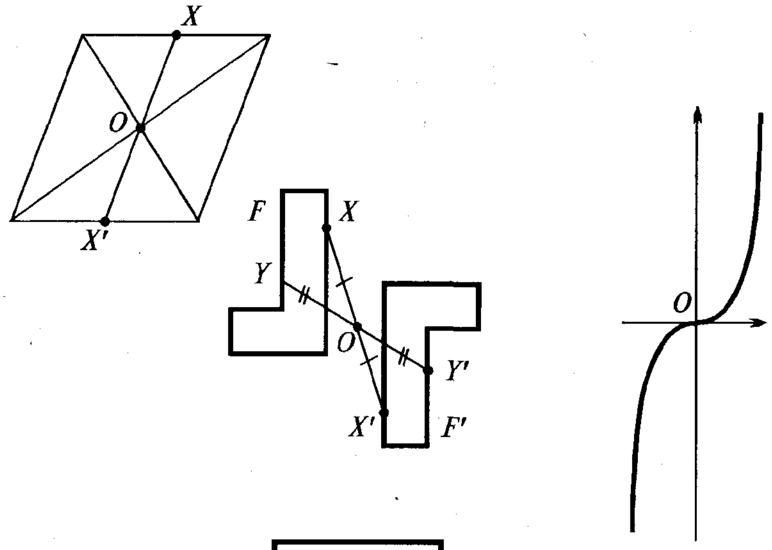
ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР — РУХИ

1. **Означення:** рух — це перетворення, при якому зберігаються відстані між точками фігури.

$\boxed{X'Y' = XY}$

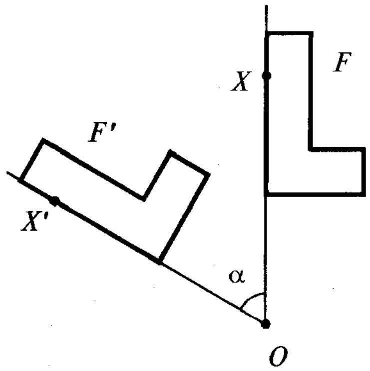
2. Під час руху зберігаються кути між променями.

Симетрія відносно точки



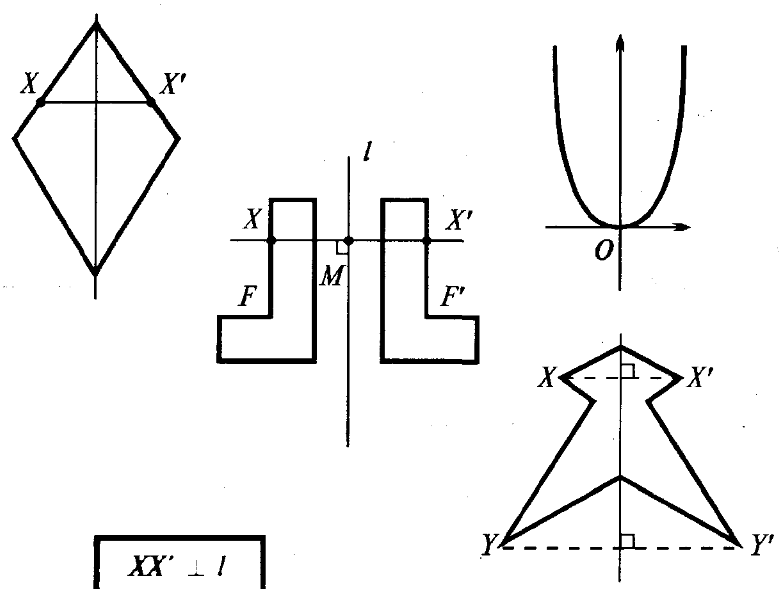
$\boxed{OX' = OX}$

Поворот



$\boxed{OX' = OX}$ $\boxed{\angle XOX' = \alpha}$

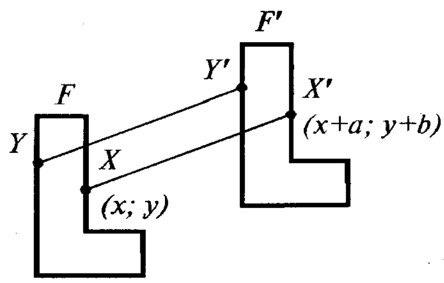
Симетрія відносно прямої



$\boxed{XX' \perp l}$

$\boxed{XM = MX'}$

Паралельне перенесення

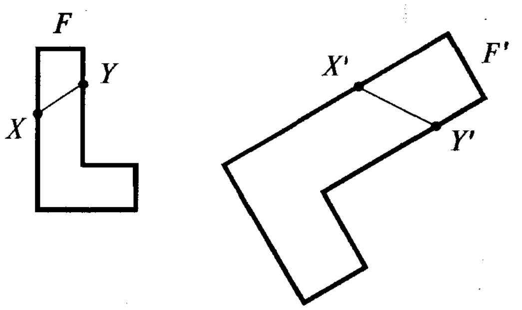


Точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

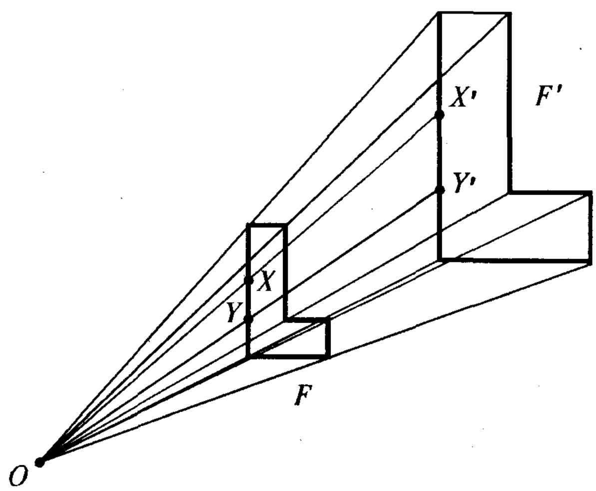
1. **Означення:** перетворення, при якому відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів, називається перетворенням подібності.

2. Перетворення подібності зберігає кути між променями.
3. У подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні.



$$\frac{X'Y'}{XY} = K$$ — коефіцієнт подібності

Гомотетія



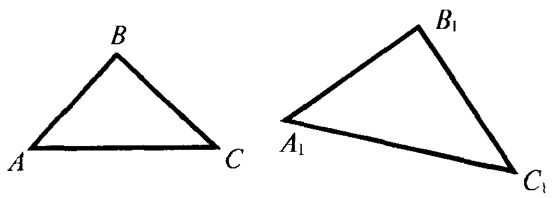
$$\frac{OX'}{OX} = K$$

Властивість

При гомотетії відрізок відображається у паралельний йому відрізок (або у відрізок, який лежить із заданим відрізком на одній прямій).

$$\boxed{X'Y' \parallel XY}$$

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



Означення: два трикутники називаються подібними, якщо вони переводяться один в одний перетворенням подібності.

$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$

Властивість

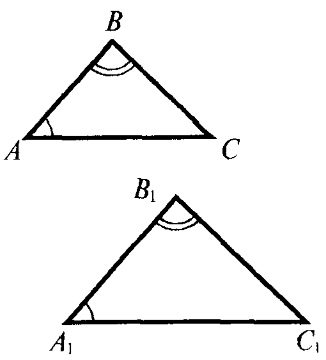
1. У подібних трикутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні.

$\angle A = \angle A_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1$	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{R}{R_1} = \ldots = K$

2. $\boxed{\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = K}$ Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін і дорівнює коефіцієнту подібності.

3. $\boxed{\frac{S_\Delta ABC}{S_\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = K^2}$ Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

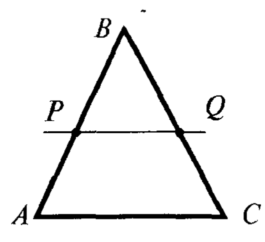
Ознаки подібності трикутників



1. Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то Δ $\boldsymbol{ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$ — за двома рівними кутами.

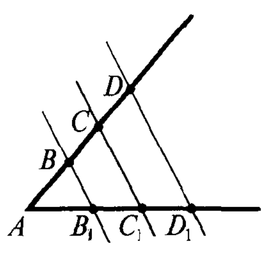
2. Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то Δ $\boldsymbol{ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$ — за двома пропорційними сторонами і кутом між ними.

3. Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то Δ $\boldsymbol{ABC \sim \Delta A_1B_1C_1}$ — за трьома пропорційними сторонами.



Якщо $PQ \parallel AC$, то Δ $\boldsymbol{PBQ \sim \Delta ABC}$.

Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний даному.



Якщо $BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, то $\boldsymbol{AB : BC : CD = AB_1 : B_1C_1 : C_1D_1}$

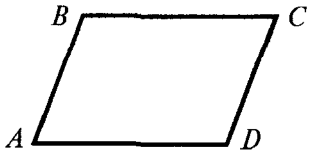
Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки.

Зокрема, якщо $AB = BC = CD$, то $\boldsymbol{AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1}$ — **теорема Фалеса.**

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

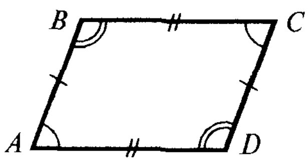
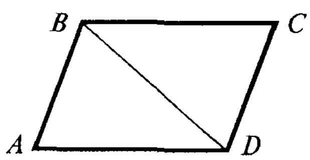
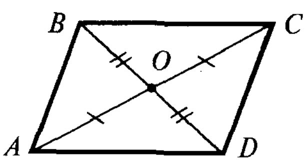
Таблиця 16

ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВИДИ

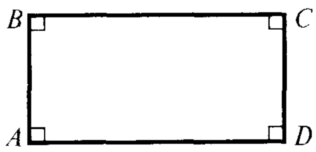


Означення: чотирикутник, у якого протилежні сторони парами паралельні, називається паралелограмом.

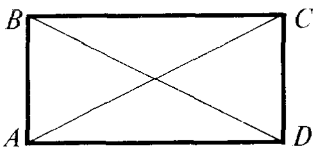
$\boxed{ABCD \text{ — паралелограм}} \Leftrightarrow \boxed{AB \parallel CD,\ BC \parallel AD}$

	Властивості	Ознаки
	1. Якщо $ABCD$ — паралелограм, **то $AB = DC$; $AD = BC$;** **$\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$.** *У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.*	1. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $BC \parallel AD$; $BC = AD$, **то $ABCD$ — паралелограм.** ***Якщо в чотирикутнику дві сторони паралельні й рівні, то він — паралелограм.*** 2. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = DC$; $AD = BC$, **то $ABCD$ — паралелограм.** ***Якщо в чотирикутнику протилежні сторони парами рівні, то він — паралелограм.***
	2. Якщо $ABCD$ — паралелограм і BD — діагональ, **то $\Delta\ ABD = \Delta\ CDB$.**	*Діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника.*
	3. Якщо $ABCD$ — паралелограм, AC і BD — діагоналі, **то $AO = OC$; $BO = OD$.** *Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам.*	3. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AO = OC$, $BO = OD$, **то $ABCD$ — паралелограм.** ***Якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться пополам, то цей чотирикутник — паралелограм.***
	4. $\boxed{AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)}$	***Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін.***

Прямокутник

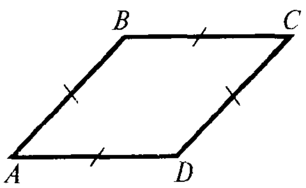


Означення: паралелограм, у якого всі кути прямі, називається прямокутником.

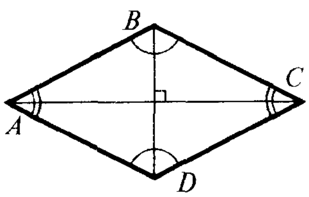


Властивості	Ознаки
1. Всі властивості паралелограма.	1. Якщо $ABCD$ — паралелограм і $\angle A = 90°$, **то $ABCD$ — прямокутник.**
2. Якщо $ABCD$ — прямокутник, **то $AC = BD$** (діагоналі прямокутника рівні).	2. Якщо $ABCD$ — паралелограм і $AC = BD$, **то $ABCD$ — прямокутник.**

Ромб

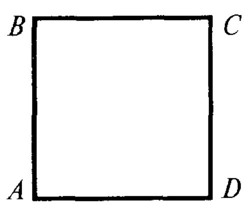


Означення: паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається ромбом.



Властивості	Ознаки
1. Всі властивості паралелограма. 2. Якщо $ABCD$ — ромб, AC і BD — діагоналі, **то а) $AC \perp BD$** — *діагоналі перпендикулярні;* **б) діагоналі є бісектрисами кутів ромба.**	1. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = AD = BC = CD$, **то $ABCD$ — ромб.** *Якщо у чотирикутника всі сторони рівні, то він є ромбом.*

Квадрат

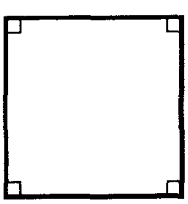
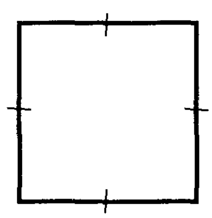
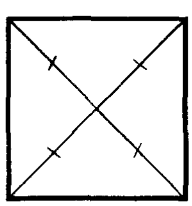
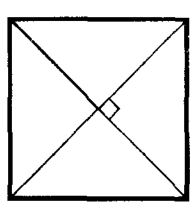
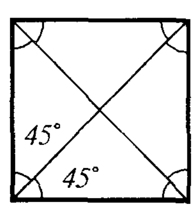


Означення: прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається квадратом.

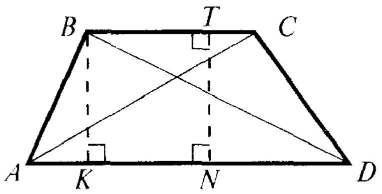
Еквівалентне означення: ромб, у якого всі кути прямі, називається квадратом.

Властивості

Всі властивості прямокутника і ромба.

ТРАПЕЦІЯ

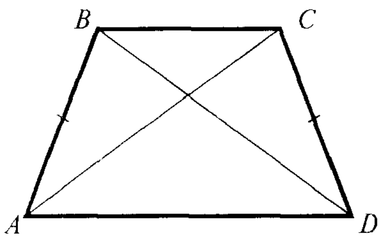


Означення: чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші сторони не паралельні, називається трапецією.

$\boxed{BC \parallel AD}$

$ABCD$ — трапеція, AD і BC — основи, AB і CD — бічні сторони, AC і BD — діагоналі, BK і TN — висоти.

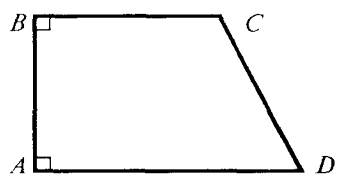
Окремі випадки трапеції



Рівнобічна трапеція — трапеція з рівними бічними сторонами ($AB = CD$).

Властивості

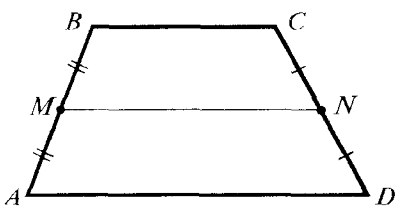
$\angle A = \angle D$	Кути при основі рівні.
$AC = BD$	Діагоналі рівні.



Прямокутна трапеція — трапеція, у якої одна бічна сторсна перпендикулярна до основ.

$\boxed{h_{\text{прямокут. трапеції}} = AB}$

Середня лінія трапеції



Означення: відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називається середньою лінією трапеції.

MN — середня лінія

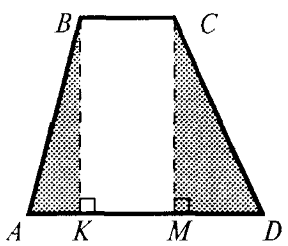
Властивості

$$MN \parallel AD,\quad MN \parallel BC$$

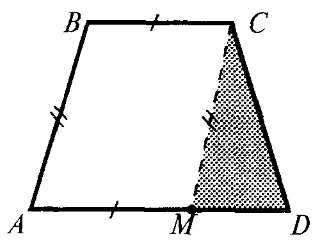
$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

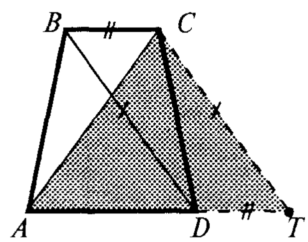
Типові додаткові побудови для трапеції (зображені штриховими лініями)



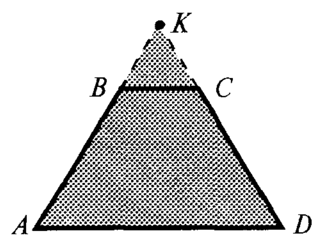
$BK \perp AD$
$CM \perp AD$



$CM \parallel BA$

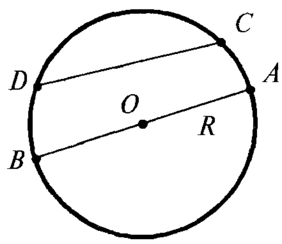


$CT \parallel BD$



AB и DC продовжити до перетину

КОЛО, ХОРДИ І ДУГИ



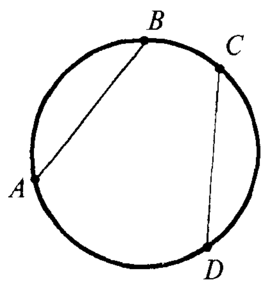
Означення: коло — фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра).

O — центр кола; OA — радіус; AB — діаметр.

CD — хорда (відрізок, що сполучає дві точки кола).

Найбільша хорда — діаметр.

Властивості



Якщо $\smile AB = \smile CD$,

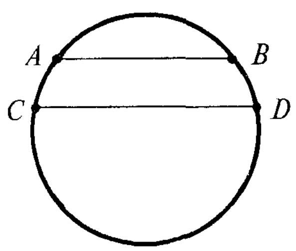
то $AB = CD$

(рівні дуги стягують рівні хорди).

Якщо $AB = CD$,

то $\smile AB = \smile CD$

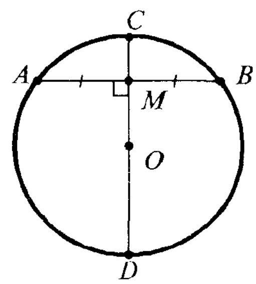
(рівні хорди стягують рівні дуги).



Якщо $AB \parallel CD$,

то $\smile AC = \smile BD$

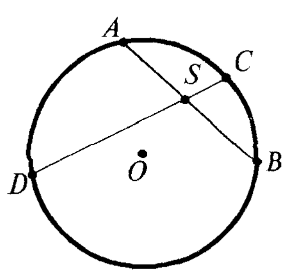
(паралельні хорди відтинають на колі рівні дуги).



Якщо CD — діаметр, AB — хорда,

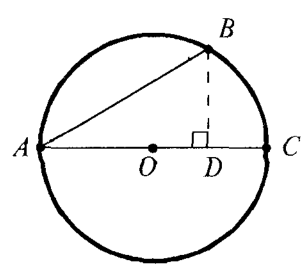
$CD \perp AB$, то $\boldsymbol{AM = MB}$ (і $\smile AC = \smile CB$);	$AM = MB$, то $\boldsymbol{CD \perp AB}$.

Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду (і дуги, які вона стягує) пополам (і навпаки).



$\boxed{AS \cdot SB = CS \cdot SD}$

де S — точка перетину хорд AB і CD.

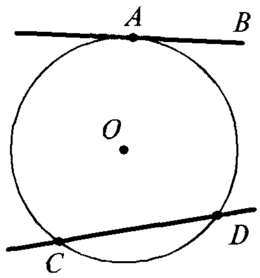


Якщо AB — хорда, AC — діаметр, $BD \perp AC$,

то $\boxed{\begin{array}{l} AB^2 = AD \cdot AC \\ BD^2 = AD \cdot DC \end{array}}$

3*

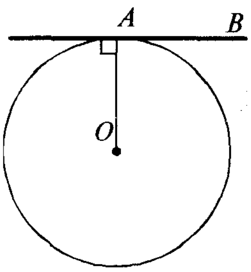
КОЛО, ДОТИЧНІ Й СІЧНІ



Означення: пряма, що має з колом лише одну спільну точку, називається дотичною до кола.

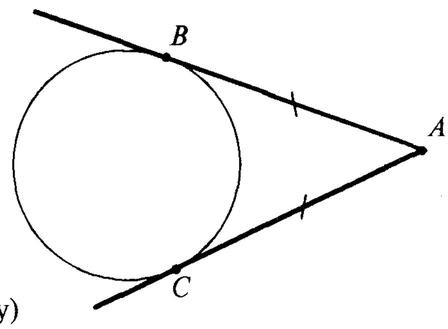
AB — **дотична**; A — точка дотику;
CD — **січна** (пряма, що має з колом дві спільні точки).

Властивості



$\boxed{OA \perp AB}$

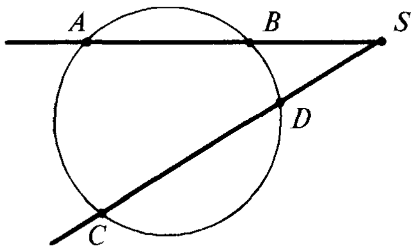
Дотична перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.



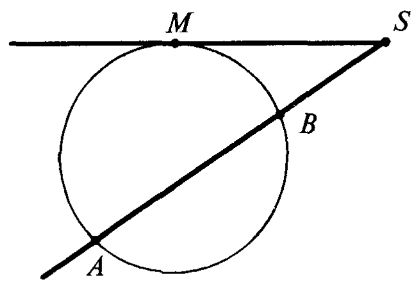
$\boxed{AB = AC}$

(B і C — точки дотику)

Якщо з однієї точки до одного кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних рівні між собою.

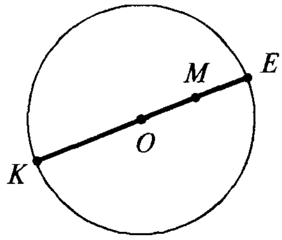


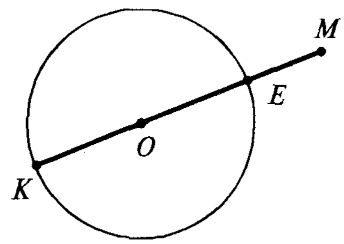
$\boxed{SA \cdot SB = SC \cdot SD}$



$\boxed{SA \cdot SB = SM^2}$,

де SM — дотична, M — точка дотику.





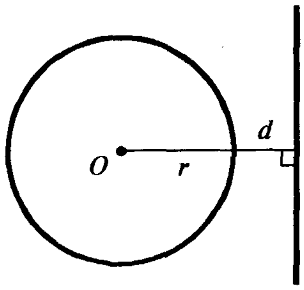
Найбільша і найменша відстані від заданої точки до точок кола вимірюються по прямій, що проходить через задану точку й центр кола.

ME — найменша відстань від точки M до точок кола;

MK — найбільша відстань від точки M до точок кола.

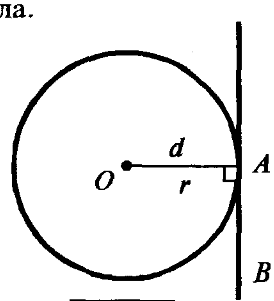
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І КОЛА

Нехай d — відстань від центра кола до прямої, r — радіус кола.



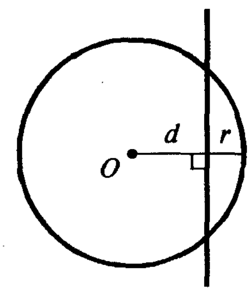
$\boxed{d > r}$

Спільних точок немає.



$\boxed{d = r}$

Одна спільна точка (пряма AB — дотична).



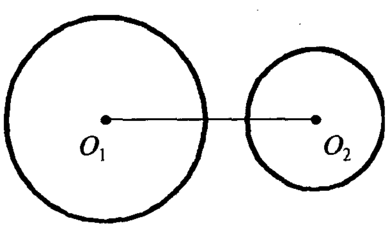
$\boxed{d < r}$

Дві спільні точки.

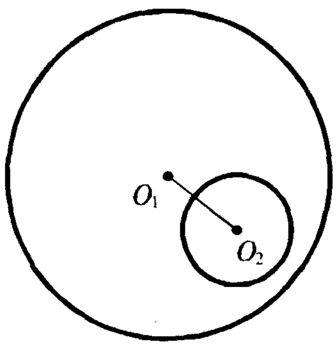
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ КІЛ

Нехай $O_1O_2 = d$ — відстань між центрами кіл, r_1 і r_2 — радіуси кіл ($r_1 > r_2$).

Спільних точок немає.

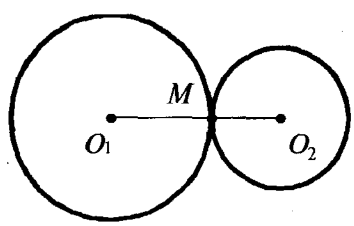


$\boxed{d > r_1 + r_2}$

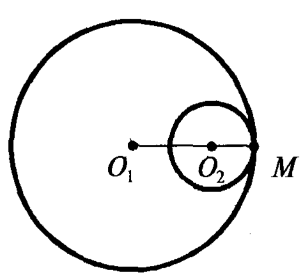


$\boxed{0 < d < r_1 - r_2}$

Одна спільна точка (кола дотикаються у цій точці).



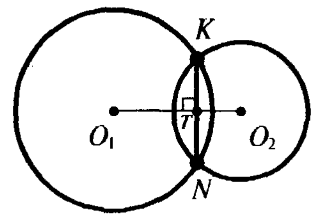
$\boxed{d = r_1 + r_2}$ — зовнішній дотик.



$\boxed{d = r_1 - r_2}$ — внутрішній дотик.

$M \in O_1O_2$ — точка дотику лежить на прямій, що проходить через центри кіл.

Дві спільні точки (кола перетинаються).



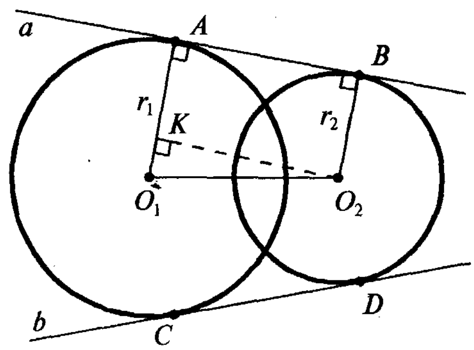
$\boxed{r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2}$

$KN \perp O_1O_2$

$KT = TN$

СПІЛЬНІ ДОТИЧНІ ДО ДВОХ КІЛ

1. Кола перетинаються ($|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$)



Дві спільні дотичні *a* і *b*.

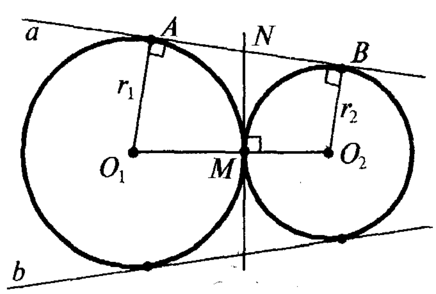
$AB = CD$

Якщо $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$.

Якщо $r_1 \neq r_2$, то a і b **перетинаються на прямій** O_1O_2.

Типова додаткова побудова: $O_2K \perp O_1A$.

2. Кола дотикаються (M — точка дотику)



зовнішній дотик
($O_1O_2 = r_1 + r_2$)

Три спільні дотичні: MN; a; b.

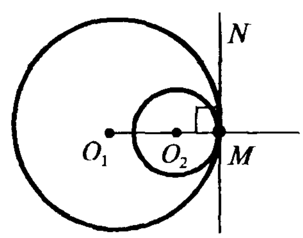
$MN \perp O_1O_2$

Якщо $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$.

Якщо $r_1 \neq r_2$, то a і b **перетинаються на прямій** O_1O_2.

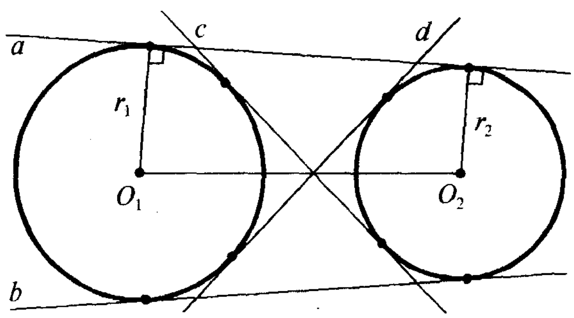
внутрішній дотик
($O_1O_2 = |r_1 - r_2|$)

Одна спільна дотична — MN.



$MN \perp O_1O_2$

3. Одне коло лежить поза другим ($O_1O_2 > r_1 + r_2$)



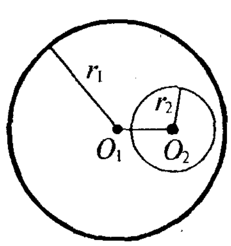
Чотири спільні дотичні: a; b; c; d.

c і d перетинаються на відрізку O_1O_2

Якщо $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$.

Якщо $r_1 \neq r_2$, то a і b **перетинаються на прямій** O_1O_2.

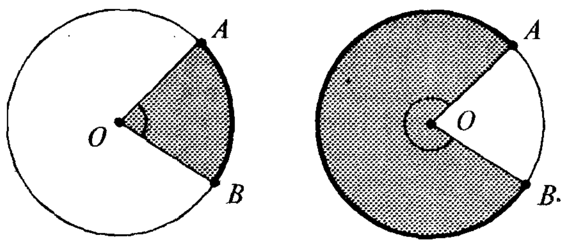
4. Одне коло лежить всередині другого ($O_1O_2 < |r_1 - r_2|$)



Спільних дотичних немає.

Таблиця 22

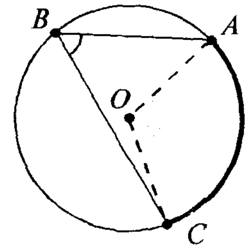
КУТИ У КОЛІ



$\boxed{\angle AOB \text{ — центральний кут}}$

$\boxed{\angle AOB = \cup AB}$

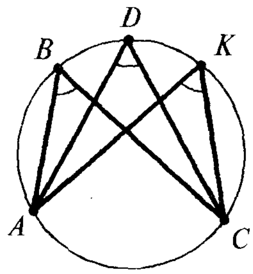
Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається.



$\boxed{\angle ABC \text{ — вписаний кут}}$

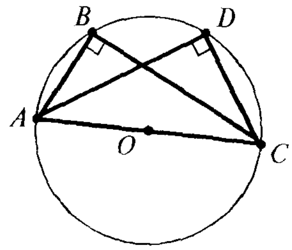
$$\boxed{\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC}$$

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу.



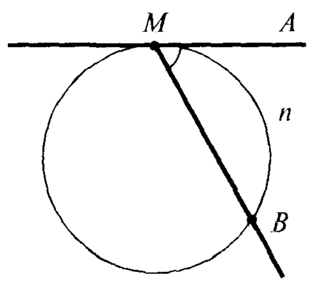
$\boxed{\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC}$

Вписані кути, які спираються на одну і ту саму дугу, рівні між собою.



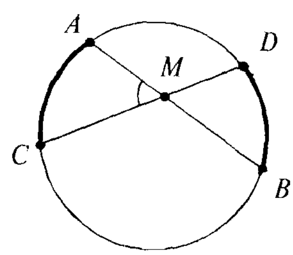
$\boxed{\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ}$

Вписаний кут, який спирається на діаметр, дорівнює 90°.



MA — дотична, MB — січна.

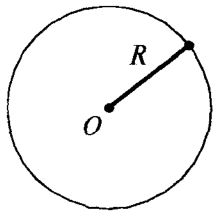
$$\boxed{\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB}$$



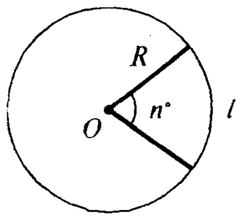
AB і CD — хорди.

$$\boxed{\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup DB)}$$

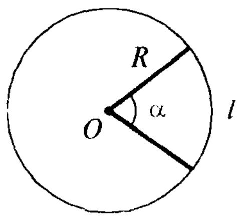
ДОВЖИНА КОЛА ТА ЙОГО ЧАСТИН



$\boxed{C = 2\pi R}$ — довжина **кола.**

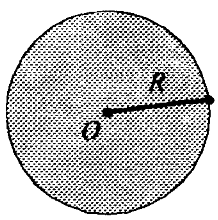


$\boxed{l = \dfrac{2\pi R}{360°} \cdot n° = \dfrac{\pi R n}{180}}$ — довжина **дуги**, яка відповідає центральному куту в n градусів.

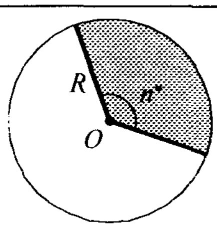


$\boxed{l = \dfrac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R\alpha}$ — довжина **дуги**, яка відповідає центральному куту в α радіан.

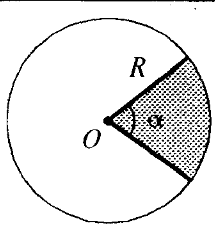
ПЛОЩА КРУГА І ЙОГО ЧАСТИН



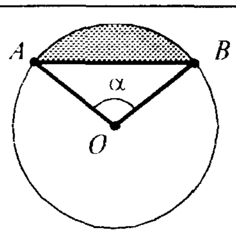
$\boxed{S = \pi R^2}$ — площа **круга.**

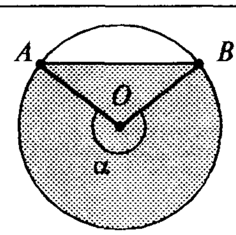


$\boxed{S = \dfrac{\pi R^2}{360} \cdot n}$ — площа **кругового сектора**, який відповідає центральному куту в n градусів.



$\boxed{S = \dfrac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \dfrac{R^2\alpha}{2}}$ — площа **кругового сектора**, який відповідає центральному куту в α радіан.



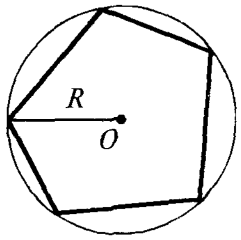


круговий сегмент

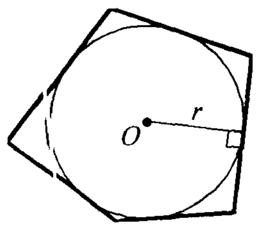
$\boxed{S_{\substack{\text{кругового}\\ \text{сегмента}}} = S_{\substack{\text{кругового}\\ \text{сектора}}} \mp S_{\triangle AOB}}$

(при $\alpha < 180°$ знак «–»,
при $\alpha > 180°$ знак «+»)

ВПИСАНИЙ І ОПИСАНИЙ МНОГОКУТНИКИ
(вписане і описане кола)



Вписаний— всі вершини лежать на колі.

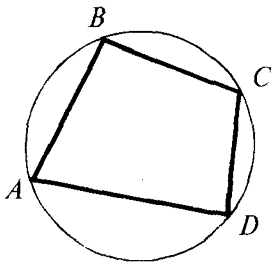


Описаний — всі сторони є дотичними до кола.

$$\boxed{S_{\text{опис.}} = \frac{P \cdot r}{2}},$$

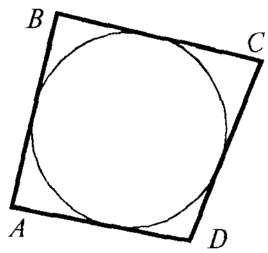
де P — периметр, r — радіус вписаного кола.

ВПИСАНИЙ ТА ОПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИКИ



$$\boxed{\angle A + \angle C = 180°, \quad \angle B + \angle D = 180°}$$

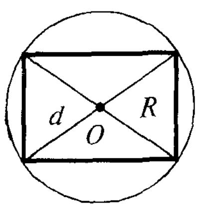
І навпаки: якщо у чотирикутника сума протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.



$AB + CD = BC + AD$
(суми довжин протилежних сторін рівні)

І навпаки: якщо у випуклого чотирикутника суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

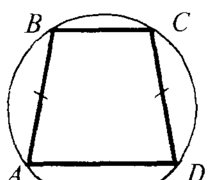
ПРЯМОКУТНИК



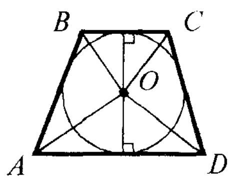
$$\boxed{R = \frac{1}{2}d}$$

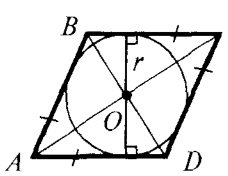
1. Якщо паралелограм вписано в коло, то він прямокутник.
2. Центр кола, описаного навколо прямокутника, — точка перетину діагоналей.

ТРАПЕЦІЯ І РОМБ



Якщо $ABCD$ — вписана трапеція, **то $AB = CD$.**



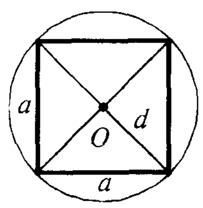


$$\boxed{d_{\text{впис. кола}} = h}$$

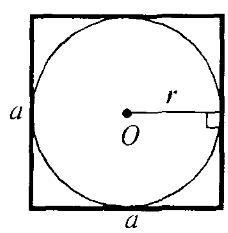
O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів.

$$\boxed{\angle AOB = \angle COD = 90°}$$

КВАДРАТ



$$\boxed{R_{\text{опис.}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

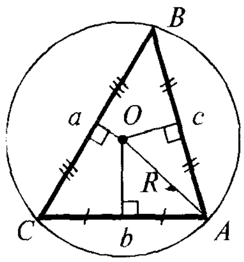


$$\boxed{r_{\text{впис.}} = \frac{1}{2}a}$$

Таблиця 25

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА І ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Описане коло

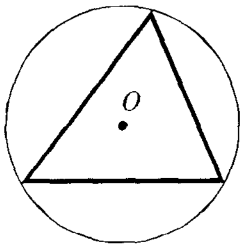


O — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника;
$OA = OB = OC = R$.

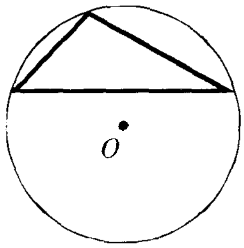
$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin A}} \qquad \boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Положення центра описаного кола

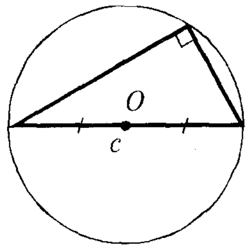
гострокутний трикутник



тупокутний трикутник



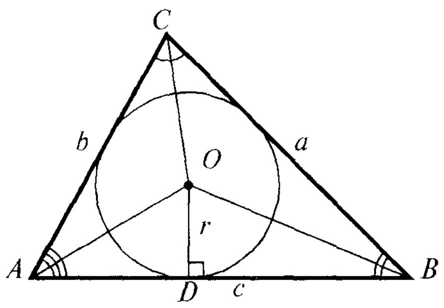
прямокутний трикутник



O — середина гіпотенузи.

$$\boxed{R = \frac{c}{2}}$$

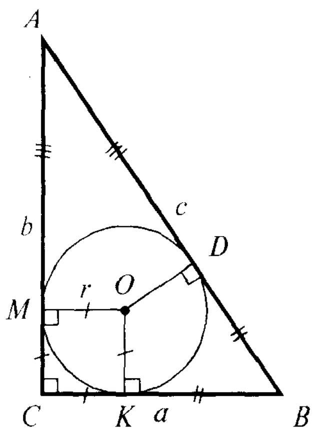
Вписане коло



O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника;
$OD = r$; $OD \perp AB$.

$$\boxed{r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a + b + c}}$$

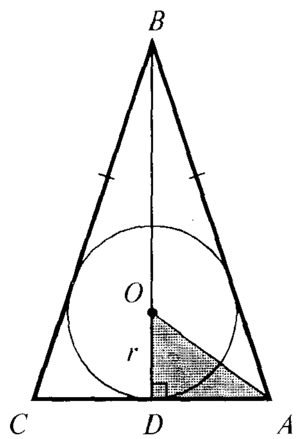
У прямокутному трикутнику



$$\boxed{r = \frac{a + b - c}{2}}$$

$OK = OM = OD = r$
(*OKCM* — квадрат).

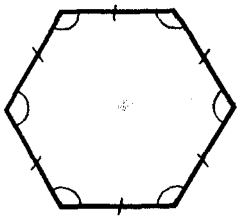
У рівнобедреному трикутнику



$AB = BC$;
BD — висота, медіана і бісектриса;
AO — бісектриса кута *A*.

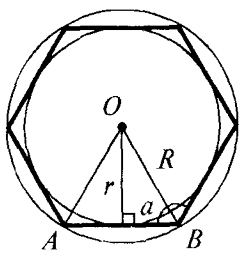
$$\boxed{OD = r}$$

КОЛА, ОПИСАНІ ТА ВПИСАНІ В ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ



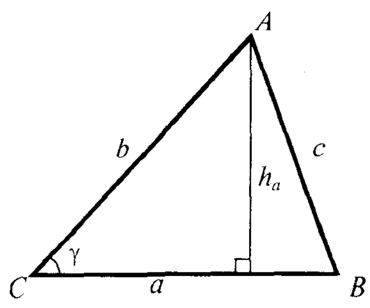
Означення: випуклий многокутник називається правильним, якщо у нього всі сторони і всі кути рівні.

Зв'язок між стороною правильного *n*-кутника і радіусами описаного та вписаного кіл



	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$	a
r	$\dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

ПЛОЩІ ТРИКУТНИКІВ



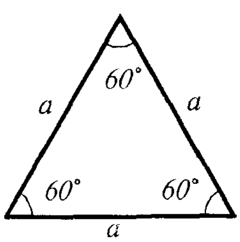
$\boxed{S = \frac{1}{2}a \cdot h_a}$ $\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}$

$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ — формула Герона $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

$\boxed{S = \dfrac{abc}{4R}}$, де R — радіус описаного кола.

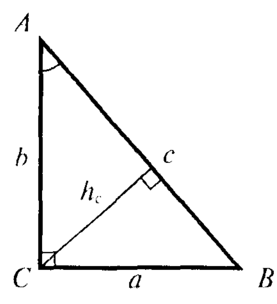
$\boxed{S = r \cdot p}$, де r — радіус вписаного кола.

Правильний трикутник



$$\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

Прямокутний трикутник

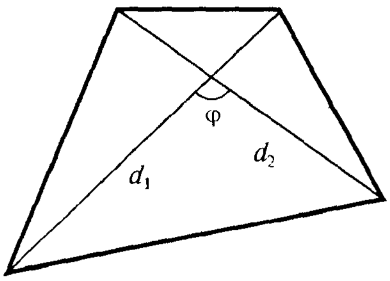


$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}c \cdot h_c}$$

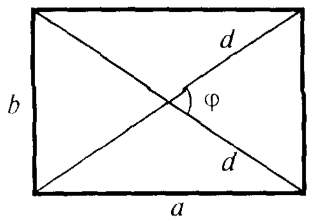
$$\boxed{S = \frac{1}{2}bc\sin A}$$

ПЛОЩІ ЧОТИРИКУТНИКІВ



$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi}$ — половина добутку діагоналей на синус кута між ними.

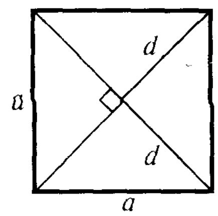
Прямокутник



$\boxed{S = ab}$

$\boxed{S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi}$

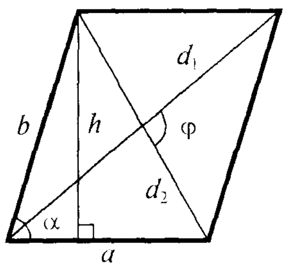
Квадрат



$\boxed{S = a^2}$

$\boxed{S = \frac{1}{2} d^2}$

Паралелограм

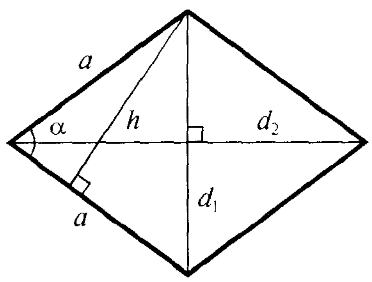


$\boxed{S = a \cdot h}$

$\boxed{S = ab\sin\alpha}$

$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi}$

Ромб

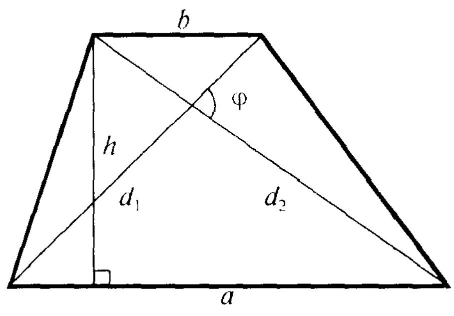


$\boxed{S = a \cdot h}$

$\boxed{S = a^2\sin\alpha}$

$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2}$

Трапеція

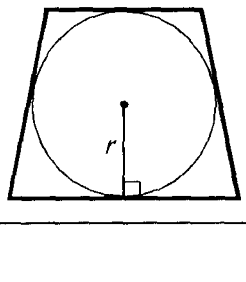


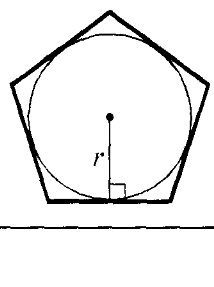
$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$

$\boxed{S = m \cdot h}$ (m — довжина середньої лінії)

$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi}$

Площа описаного многокутника

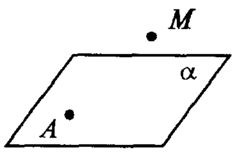




$\boxed{S = p \cdot r}$, де p — півпериметр многокутника, r — радіус вписаного кола.

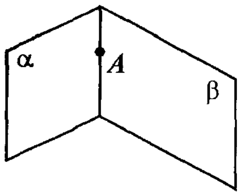
Таблиця 29

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

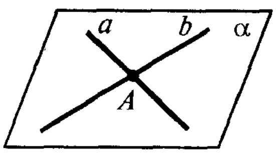


$A \in \alpha$; $M \notin \alpha$

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.



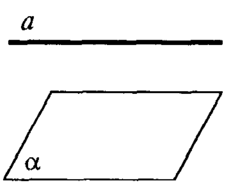
2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.



3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

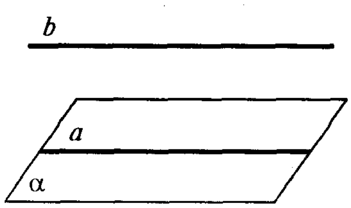
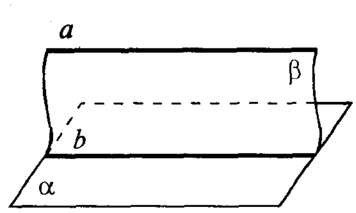
Таблиця 30

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

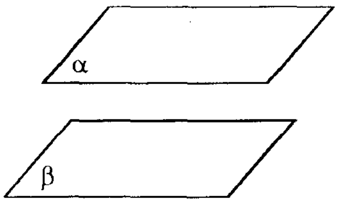


Означення: пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.

$a \parallel \alpha$

Ознака	**Властивість**
Якщо $b \parallel a$ (a в площині α), то $b \parallel \alpha$.	Якщо $a \parallel \alpha$, β проходить через a, β перетинає α по b, то $a \parallel b$.
Якщо пряма, що не належить площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.	*Якщо через пряму, паралельну площині, провести другу площину, яка перетинає першу, то пряма перетину площин паралельна першій прямій.*
	

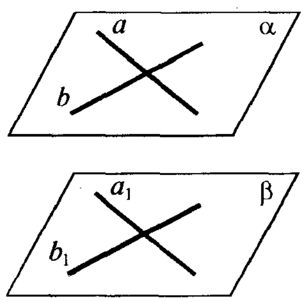
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН



Означення: дві площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.

$\boxed{\alpha \parallel \beta}$

Ознака



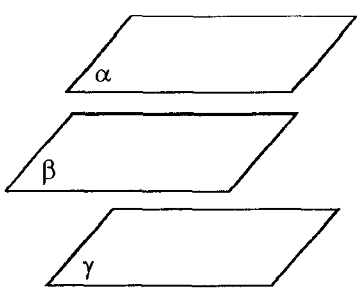
Якщо $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (a і b лежать в α, a_1 і b_1 лежать в β),
то $\alpha \parallel \beta$.

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Властивості

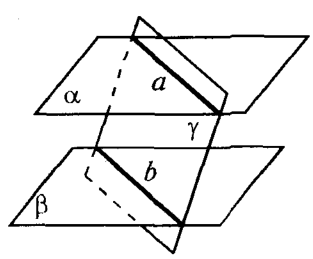
Якщо $\beta \parallel \alpha$ і $\gamma \parallel \alpha$,
то $\beta \parallel \gamma$.

Якщо дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні між собою.



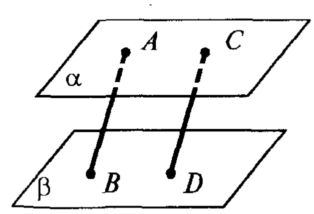
Якщо $\alpha \parallel \beta$ і γ перетинає α по a, γ перетинає β по b,
то $a \parallel b$.

Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.

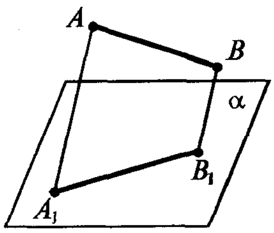


Якщо $AB \parallel CD$ і $\alpha \parallel \beta$ ($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$),
то $AB = CD$.

Відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні.



ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ



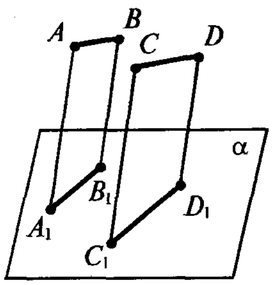
$AA_1 \parallel BB_1$. Пряма AA_1 перетинає α в точці A_1. Точка A проектується в точку A_1 на площині α.

$A \to A_1$	$B \to B_1$	$AB \to A_1B_1$

Відрізок проектується у відрізок
($AB \nparallel AA_1$ — відрізок не паралельний напряму проектування).

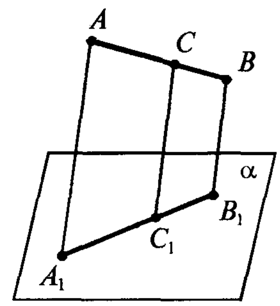
Якщо $AB \parallel CD$
($AB \to A_1B_1$; $CD \to C_1D_1$),
то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

При паралельному проектуванні паралельність відрізків зберігається.



$$\boxed{\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}}$$

При паралельному проектуванні відношення відрізків однієї прямої або паралельних прямих зберігається.



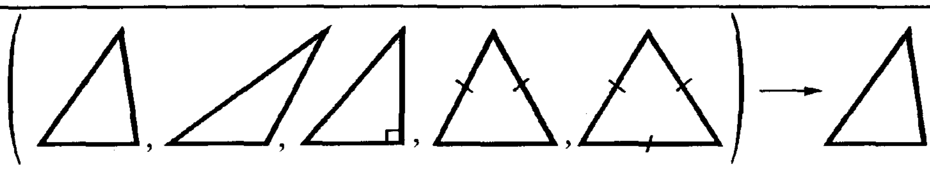
Наслідок

Якщо C — середина AB, $AB \to A_1B_1$, $C \to C_1$,
то C_1 — середина A_1B_1.

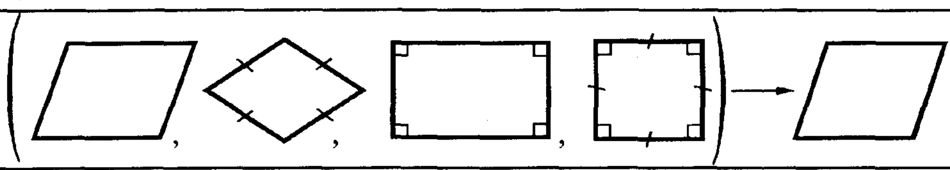
Середина заданого відрізка проектується в середину відрізка його проекції.

Паралельні проекції деяких плоских фігур

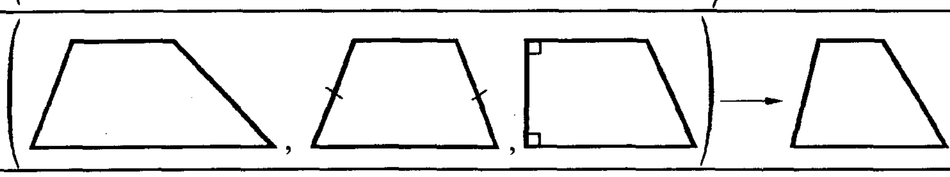
(площина фігури не паралельна напряму проектування)



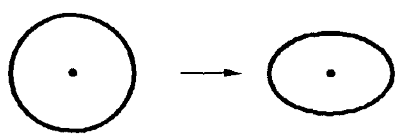
проекція — трикутник будь-якої форми



проекція — паралелограм будь-якої форми

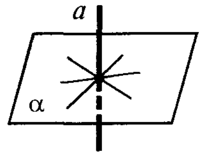


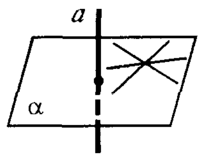
проекція — трапеція будь-якої форми



проекція кола — еліпс

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

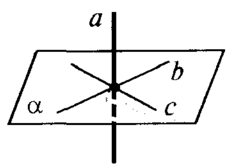


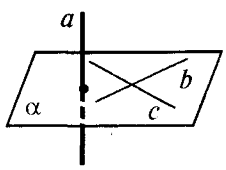


Означення: пряма, що перетинає площину, називається перпендикулярною до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, яка лежить в даній площині.

$\boxed{a \perp \alpha}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{a \perp x, \text{ де } x \text{ — будь-яка пряма площини } \alpha}$

Ознака перпендикулярності прямої і площини

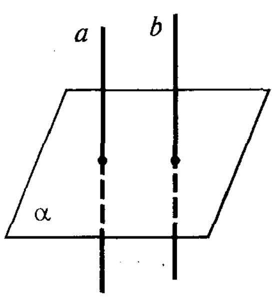




Якщо $a \perp b$ і $a \perp c$ (b і c в площині α),
то $\boldsymbol{a} \perp \alpha$.

Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині і перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.

Властивості перпендикулярних прямої і площини

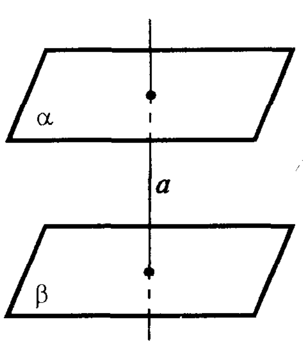


Якщо $a \parallel b$ і $\alpha \perp a$,
то $\alpha \perp \boldsymbol{b}$.

Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.

Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$,
то $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, паралельні.



Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $a \perp \alpha$,
то $\boldsymbol{a} \perp \beta$.

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна й до другої.

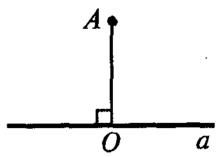
Якщо $\alpha \perp a$ і $\beta \perp a$,
то $\alpha \parallel \beta$.

Дві різні площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні.

Таблиця 34

ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

На площині

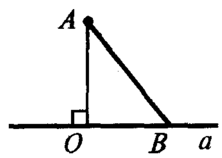


$AO \perp a,\ O \in a$

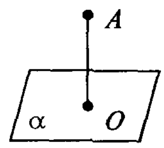
AO — перпендикуляр з точки A до прямої a

AO — відстань від точки A до прямої a

AB — похила

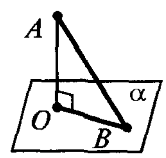


У просторі



$AO \perp \alpha,\ O \in \alpha$

AO — перпендикуляр з точки A до площини α



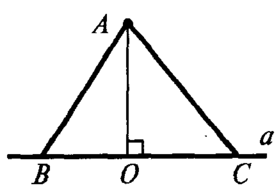
AO — відстань від точки A до площини α

AB — похила

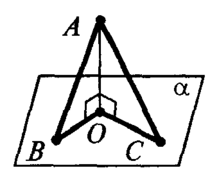
$AO < AB$	Перпендикуляр коротший за похилу	$AO < AB$

OB — проекція похилої AB на пряму a

OB — проекція похилої AB на площину α



$AB = AC$	$\Leftrightarrow$	$BO = OC$
$AB > AC$	$\Leftrightarrow$	$BO > OC$



Якщо із однієї точки до однієї прямої проведено дві похилі, то

Якщо із однієї точки до однієї площини проведено дві похилі, то

рівні похилі мають рівні проекції;

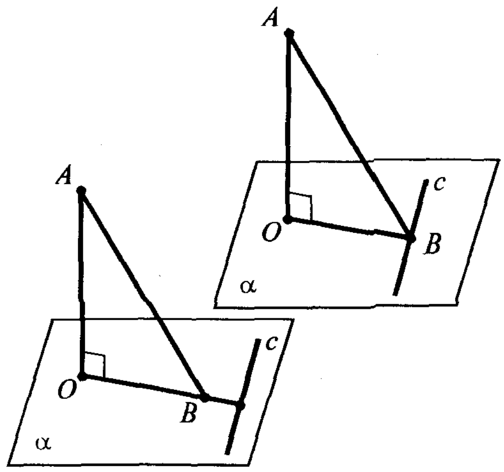
якщо проекції похилих рівні, то й самі похилі рівні;

більша похила має більшу проекцію;

з двох похилих більша та, у якої проекція більша.

Таблиця 35

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ



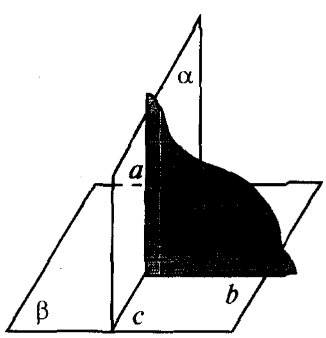
OB — проекція *AB* на площину α, *c* — пряма на площині α, $OB \perp c$.	⇔	$AB \perp c$

Якщо пряма на площині перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, то вона перпендикулярна і до похилої.

І навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

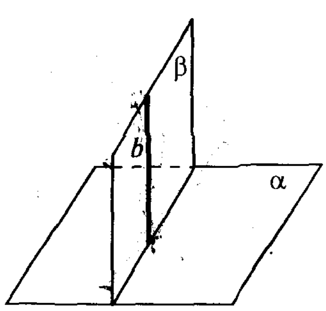
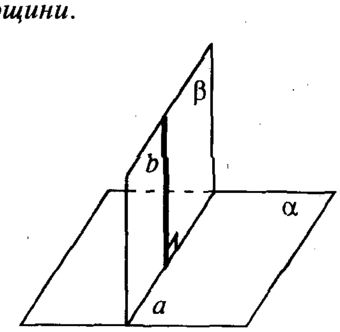
Таблиця 36

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ДВОХ ПЛОЩИН



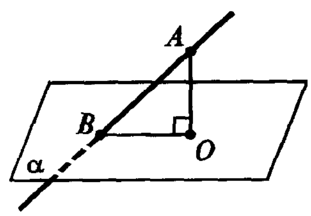
Означення: дві площини, що перетинаються, називаються перпендикулярними, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.

$\alpha \perp \beta$	⇔	α перетинає β по прямій *c*, $\gamma \perp c$, γ перетинає α по прямій *a*, γ перетинає β по прямій *b*, $a \perp b$.

Ознака перпендикулярності площин	**Властивість**
Якщо $b \perp \alpha$ і β проходить через *b*, **то** $\beta \perp \alpha$. *Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.*	Якщо $\beta \perp \alpha$, β перетинає α по *a* і $b \perp a$ (*b* лежить в β), **то** $b \perp \alpha$. *Якщо пряма, що лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до лінії їх перетину, то вона перпендикулярна й до другої площини.*
	

КУТИ У ПРОСТОРІ

1. Кут між прямою і площиною



Означення: кутом між прямою і площиною, що її перетинає, називається кут між цією прямою та її проекцією на площину.

∠ *ABO* — кут між прямою *AB* і площиною α

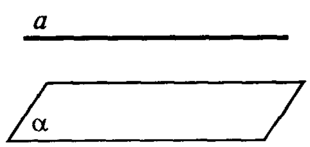
(*BO* — проекція *AB* на площину α, $AO \perp \alpha$)

Особливі випадки

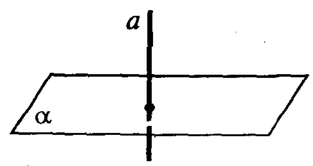
1)

$a \parallel \alpha$
a лежить в α

⇔ $\angle (a, \alpha) = 0$



2) $a \perp \alpha$ ⇔ $\angle (a, \alpha) = 90°$

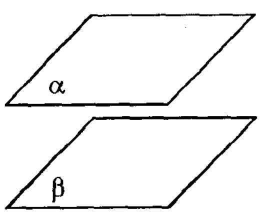


2. Кут між площинами

1)

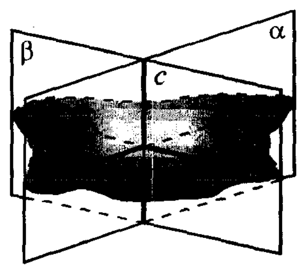
$\alpha \parallel \beta$
$\alpha = \beta$

⇔ $\angle (\alpha, \beta) = 0$



2) α перетинає β по прямій *c*. Проведемо площину $\gamma \perp c$.

Означення: кутом між площинами α і β, що перетинаються, називається кут між прямими, по яких площина γ перетинає площини α і β.

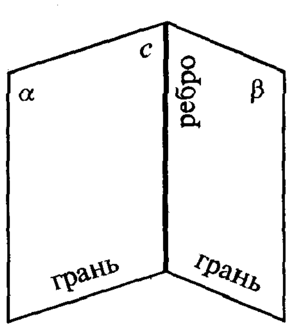


$\angle (\alpha, \beta) = \angle (a, b)$

(γ перетинає α по прямій *a*, γ перетинає β по прямій *b*)

$0° \leqslant \angle (\alpha, \beta) \leqslant 90°$

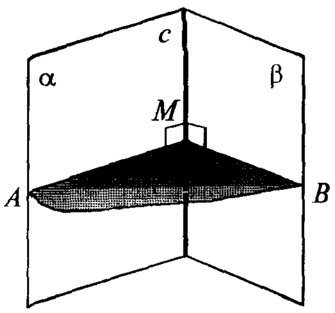
3. Двогранний кут (кут між півплощинами)



Означення: двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує.

Півплощини α і β — грані двогранного кута,
c — ребро двогранного кута.

Лінійний кут двогранного кута



Означення: лінійним кутом двогранного кута називається кут між променями, по яких площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані.

$\angle AMB$ — лінійний кут

($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю MA, γ перетинає β по променю MB)

$0° \leqslant \angle AMB \leqslant 180°$

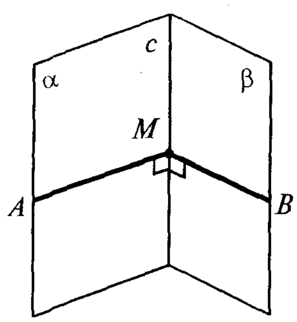
Властивість

Оскільки пл. $AMB \perp c$, то пл. $AMB \perp \alpha$ і пл. $AMB \perp \beta$, тобто
площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута.

Практичні способи побудови лінійного кута

$M \in c$,
$MA \perp c$ (у грані α),
$MB \perp c$ (у грані β).

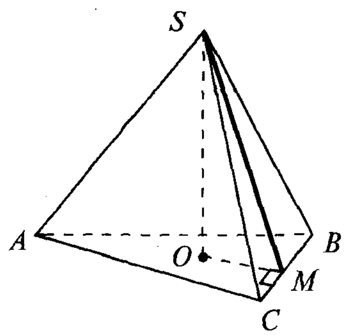
$\angle AMB$ — лінійний



$SO \perp$ пл. ABC
(SO — висота піраміди).

Проводимо $OM \perp BC$ і з'єднуємо точки S і M. Тоді $SM \perp BC$ за теоремою про три перпендикуляри, тому

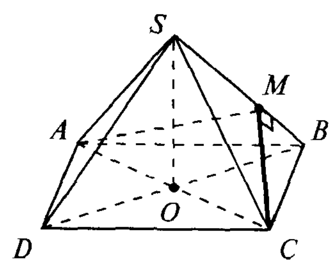
$\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC



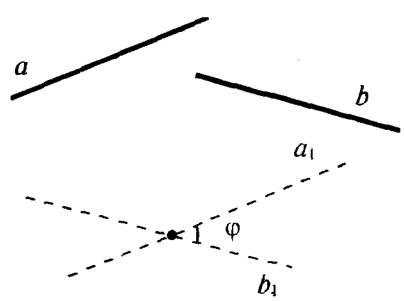
$SABCD$ — правильна піраміда.

Проводимо $CM \perp SB$ і з'єднуємо точки A і M. Тоді
$\Delta AMB = \Delta CMB$
(за двома сторонами і кутом між ними), отже,
$\angle AMB = \angle CMB = 90°$,
тобто $AM \perp SB$ і

$\angle AMC$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі SB



4. Кут між мимобіжними прямими



Означення: кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.

$a_1 \parallel a; \ b_1 \parallel b$

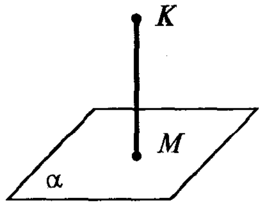
$\angle (a; b) = \angle (a_1; b_1) = \varphi$
(менший із суміжних кутів)

$0° < \angle (a; b) \leqslant 90°$

ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ
(способи, які використовуються для їх обчислення)

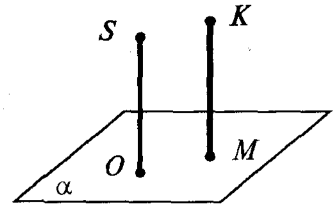
1. Відстань від точки до площини (ρ — відстань)

Проводимо $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$).



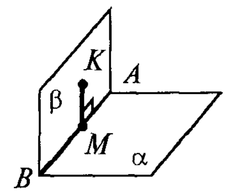
$\boxed{KM = \rho\,(K;\ \alpha)}$

$SO \perp \alpha$. Проводимо $KM \parallel SO$. Тоді $KM \perp \alpha$ і



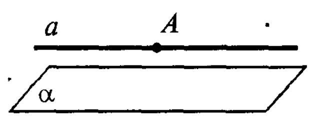
$\boxed{KM = \rho\,(K;\ \alpha)}$

Проводимо через точку K площину $\beta \perp \alpha$ (β перетинає α по AB). Проводимо $KM \perp AB$. Тоді $KM \perp \alpha$ і



$\boxed{KM = \rho\,(K;\ \alpha)}$

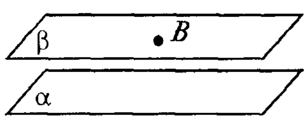
2. Відстань між паралельними прямою і площиною



$a \parallel \alpha$	$A \in a$
$\rho\,(a;\ \alpha) = \rho\,(A;\ \alpha)$	

Вибираємо на прямій a довільну точку A і знаходимо відстань від цієї точки до площини α.

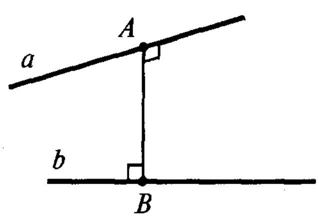
3. Відстань між паралельними площинами



$\beta \parallel \alpha$	$B \in \beta$
$\rho\,(\beta;\ \alpha) = \rho\,(B;\ \alpha)$	

Вибираємо у площині β довільну точку B і знаходимо відстань від цієї точки до площини α.

4. Відстань між мимобіжними прямими



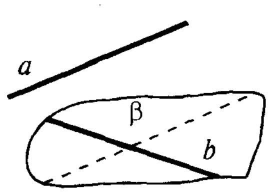
Означення: відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра.

$AB \perp a,\ AB \perp b$	
$\rho\,(a;\ b) = AB$	

прямі a і b — мимобіжні.

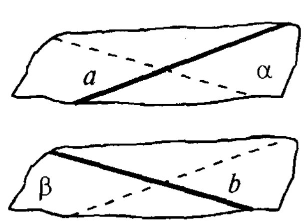
Способи обчислення відстані між мимобіжними прямими

Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.



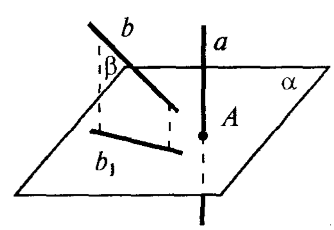
$\boxed{\rho\,(a;\ b) = \rho\,(a;\ \beta)}$

Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.



$\boxed{\rho\,(a;\ b) = \rho\,(\alpha;\ \beta)}$

Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проектуємо прямі a і b на цю площину: $a \to A$, $b \to b_1$.



$\boxed{\rho\,(a;\ b) = \rho\,(A;\ b_1)}$

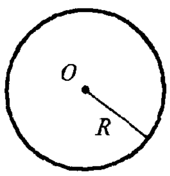
ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК (ГМТ)

Означення: геометричним місцем точок площини (простору) називається фігура, що складається з усіх точок площини (простору), які мають певну властивість.

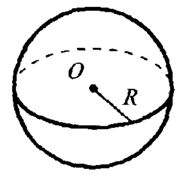
Фігура F — ГМТ, які мають задану властивість.	$\Leftrightarrow$	1. Якщо точка $M \in F$, **то M має задану властивість.** 2. Якщо точка M має задану властивість, **то $M \in F$.**

На площині	У просторі

1. ГМТ, що знаходяться на заданій відстані *R* від даної точки *O* (тобто рівновіддалених від даної точки)

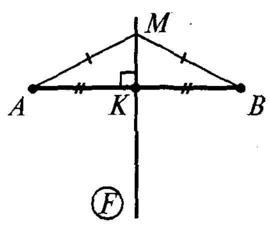


F — коло з центром O і радіусом R.

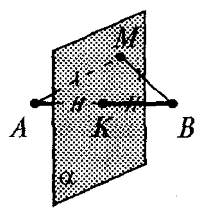


F — сфера з центром O і радіусом R.

2. ГМТ, рівновіддалених від кінців заданого відрізка *AB*



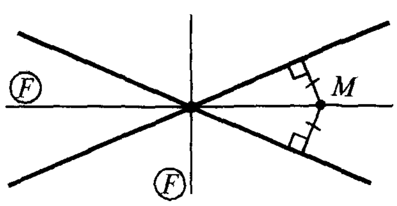
F — серединний перпендикуляр до відрізка AB.



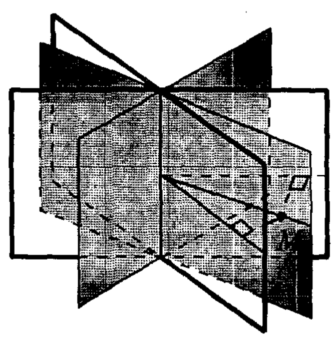
F — площина α, що проходить через середину відрізка AB і перпендикулярна до нього.

3. ГМТ, рівновіддалених від двох перетинних прямих

F — бісектриси всіх кутів, утворених при перетині заданих прямих.

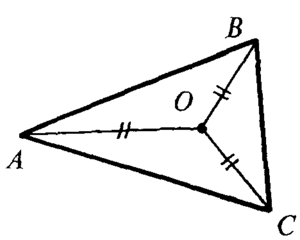


3. ГМТ, рівновіддалених від двох перетинних площин



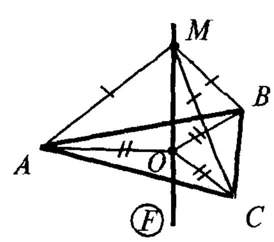
F — бісекторні площини (тобто площини, які ділять двогранні кути пополам і проходять через ребро двогранних кутів) всіх двогранних кутів, утворених при перетині заданих площин.

4. ГМТ, рівновіддалених від вершин трикутника



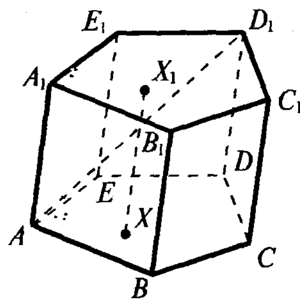
F — центр описаного навколо трикутника кола.

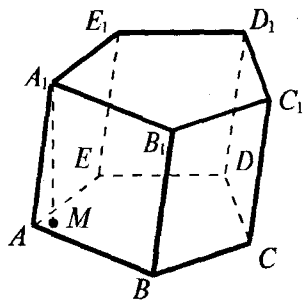
$\boxed{F = O}$



F — пряма, перпендикулярна до площини трикутника, яка проходить через центр описаного навколо трикутника кола.

ПРИЗМА





Означення: призмою називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників.

$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основи призми.
AA_1; BB_1;... — бічні ребра.
ABB_1A_1; BCC_1B_1;... — бічні грані.

AD_1 — діагональ призми (відрізок, який сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані).

Висота призми — відстань між площинами її основ.
$A_1M \perp$ пл. $ABCDE$; $A_1M = H$ — висота.

Властивості

1. Основи призми рівні.

$$ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$$

2. Основи призми лежать у паралельних площинах.

$$\text{пл. } ABCDE \parallel \text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1$$

3. Бічні ребра призми паралельні і рівні.

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \ldots$$
$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots$$

4. Бічні грані призми — паралелограми.

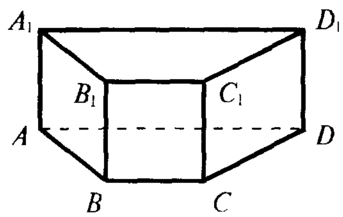
ABB_1A_1 — паралелограм, BCC_1B_1 — паралелограм, ...

5. $V_{\text{призми}} = S_{\text{осн.}} \cdot H_{\text{призми}}$

6. $S_{\text{біч.}} = P_{\text{перпендикулярного перерізу}} \cdot AA_1$ $\quad (S_{\text{біч.}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + \ldots + S_{AEE_1A_1})$

$S_{\text{повна}} = S_{\text{біч.}} + 2\,S_{\text{осн.}}$

ПРЯМА ПРИЗМА



Означення: призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ.

$AA_1 \perp$ пл. $ABCD$, $BB_1 \perp$ пл. $ABCD$, ...

Властивості свойства

1. $H_{\text{прямої призми}} = AA_1 = BB_1 = \ldots$ Висота прямої призми дорівнює бічному ребру.

2. Бічні грані прямої призми — прямокутники.

   ABB_1A_1 — прямокутник, BCC_1B_1 — прямокутник, ...

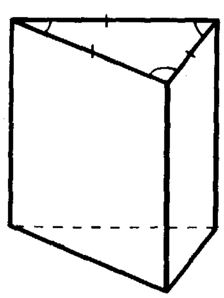
3. $V_{\text{прямої призми}} = S_{\text{осн.}} \cdot H = S_{\text{осн.}} \cdot AA_1$

4. $S_{\text{біч.}} = P_{\text{основи}} \cdot AA_1$

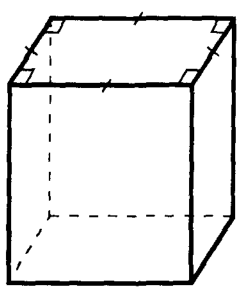
   $S_{\text{повна}} = S_{\text{біч.}} + 2S_{\text{осн.}}$

Правильна призма

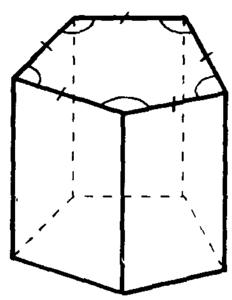
Означення: пряма призма називається правильною, якщо її основи є правильними многокутниками.



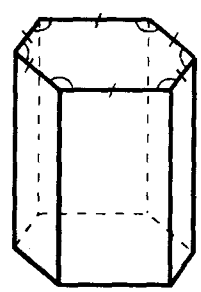
трикутна



чотирикутна

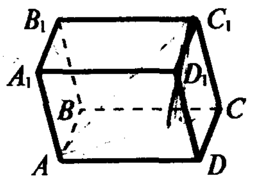


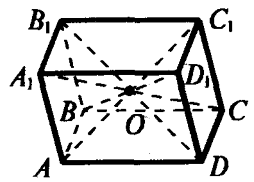
п'ятикутна



шестикутна

ПАРАЛЕЛЕПІПЕД





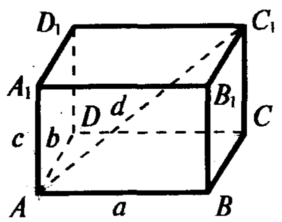
Означення: паралелепіпедом називається призма, в основі якої лежить паралелограм.

Властивості

1. У паралелепіпеда всі грані — паралелограми.
2. У паралелепіпеда протилежні грані паралельні і рівні.
3. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам.

$\boxed{O \text{ — середина } A_1C,\ BD_1,\ AC_1,\ B_1D}$

Прямокутний паралелепіпед



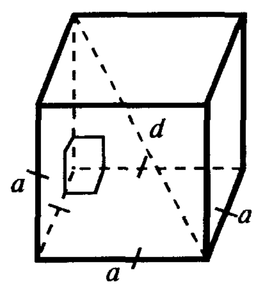
Означення: прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається прямокутним паралелепіпедом.

Властивості

1. У прямокутного паралелепіпеда всі грані — прямокутники.
2. $\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$ $(AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2)$ *у прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.*
3. $\boxed{V_{\text{прямокут. парал.}} = AB \cdot AD \cdot AA_1 = abc}$
4. $\boxed{S_{\text{біч.}} = P_{\text{осн.}} \cdot AA_1 = 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 2(a + b)c}$ $\boxed{S_{\text{повн.}} = S_{\text{біч.}} + 2S_{\text{осн.}}}$

Куб

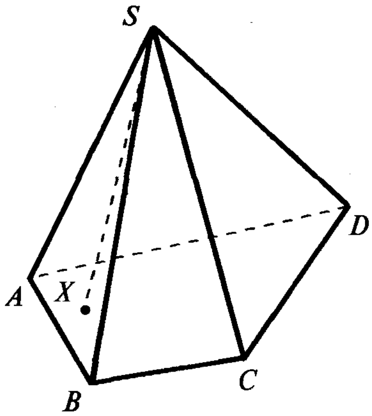
Означення: кубом називається прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні.



Властивості

1. У куба всі грані — квадрати.
2. $\boxed{d = a\sqrt{3}}$ ($d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, де a — ребро куба, d — діагональ куба)
3. $\boxed{V_{\text{куба}} = a^3}$
4. $\boxed{S_{\text{біч. куба}} = 4a^2}$ $\boxed{S_{\text{повн. куба}} = 6a^2}$

ПІРАМІДА

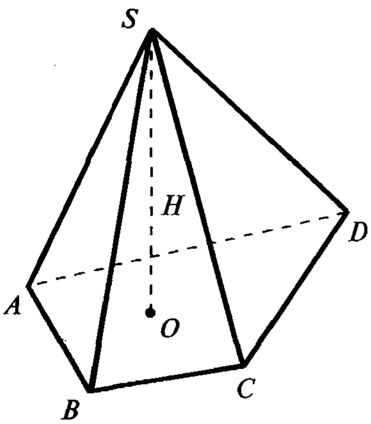


Означення: пірамідою називається многогранник, який складається з плоского многокутника (основи піраміди), точки, яка не лежить у площині основи (вершини піраміди), і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи.

ABCD — основа піраміди	*S* — вершина піраміди

SA, SB, SC, SD — бічні ребра

$\Delta\, ASB$, $\Delta\, BSC$, $\Delta\, CSD$, $\Delta\, ASD$ — бічні грані



Висота піраміди — перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи.

SO — висота піраміди
$SO = H$

($SO \perp$ пл. $ABCD$)

$$V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$$

$$S_{\text{біч. пір.}} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta CSD} + S_{\Delta ASD}$$

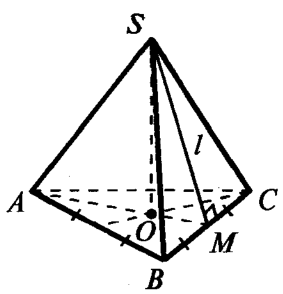
$$S_{\text{повн. пір.}} = S_{\text{біч.}} + S_{\text{осн.}}$$

ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА

Означення: піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.

Деякі види правильних пірамід

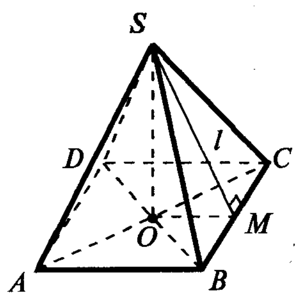
Трикутна



$\Delta\, ABC$ — правильний

O — точка перетину медіан (висот і бісектрис), центр вписаного й описаного кіл.

чотирикутна

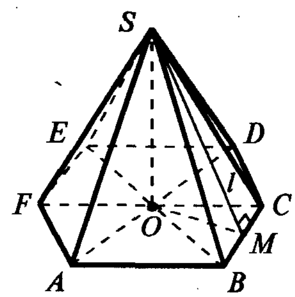


$ABCD$ — квадрат

O — точка перетину діагоналей.

...

шестикутна



$ABCDEF$ — правильний шестикутник

O — точка перетину діагоналей AD, BE і FC.

...

SO — висота правильної піраміди ($SO \perp$ пл. ABC; O — центр основи)
SM — апофема правильної піраміди ($SM \perp BC$) (висота бічної грані)

Властивості

1. У правильної піраміди бічні ребра рівні й однаково нахилені до площини основи.

   $\boxed{SA = SB = SC = \ldots}$ $\boxed{\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots}$

2. Бічні грані правильної піраміди — рівні один одному рівнобедрені трикутники, однаково нахилені до основи.

   $\boxed{\Delta\, ASB = \Delta\, BSC = \ldots}$

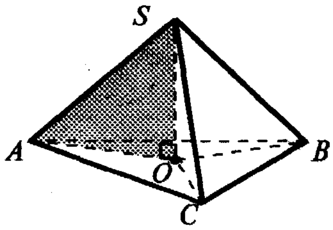
3. $\boxed{S_{\text{біч.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot SM = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot l}$, де l — апофема.

4. $\boxed{S_{\text{біч.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi}}$, де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи. $\boxed{S_{\text{біч.}} = S_{\text{біч.грані}} \cdot n}$, де n — кількість граней.

5. $\boxed{S_{\text{повн.}} = S_{\text{біч.}} + S_{\text{осн.}}}$

6. $\boxed{V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H}$

ПОЛОЖЕННЯ ВИСОТИ В ДЕЯКИХ ВИДАХ ПІРАМІД



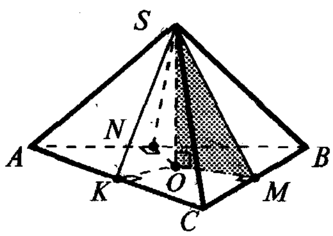
1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні або нахилені під одним кутом до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди,
то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи (і навпаки).

Якщо в піраміді *SABC*:
$SA = SB = SC$,
або $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$,
або $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$ і $SO \perp$ пл. ABC,
то O — центр описаного навколо основи кола ($OA = OB = OC$).

Якщо в піраміді *SABC*:
$SO \perp$ пл. ABC і O — центр кола, описаного навколо основи,
то $SA = SB = SC$ і $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$ і $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$.

Для розв'язування використовують прямокутний $\Delta\ SAO$, в якому:

$SO \perp AO$, $AO = R_{\text{опис.}}$ навколо основи кола,
$\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи.



2. Якщо всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи,
то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу (і навпаки).

Якщо в піраміді *SABC*:
грані *SAB*, *SAC* і *SBC* однаково нахилені до основи *ABC* (тобто $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — відповідні лінійні кути рівні) і $SO \perp$ пл. ABC,
то O — центр кола, вписаного в основу ($OK = OM = ON = r_{\text{впис.}}$).

Якщо в піраміді *SABC*:
$SO \perp$ пл. ABC і O — центр кола, вписаного в основу,
то $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ (тобто всі бічні грані піраміди нахилені під одним кутом до основи піраміди).

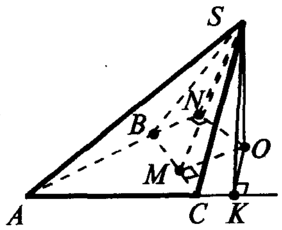
Для розв'язування використовують прямокутний $\Delta\ SOM$, в якому:

$SO \perp OM$, $OM = r_{\text{впис.}}$ в основу кола ($OM \perp BC$),
$\angle SMO$ — кут нахилу бічної грані SBC до основи
($\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC).

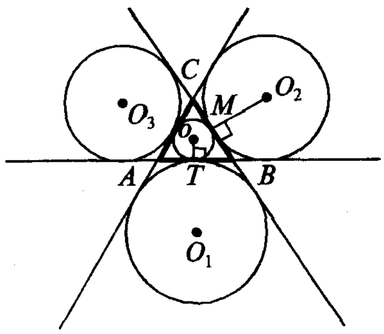
Для такого виду пірамід виконується формула:

$$\boxed{S_{\text{біч.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi}}$$, де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи.

3. Якщо всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи, **то основою висоти піраміди є точка, рівновіддалена від усіх прямих, які містять сторони основи.**



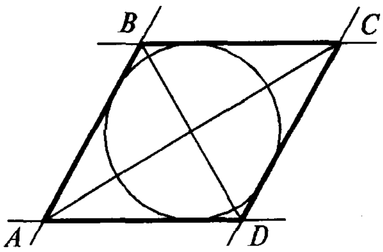
Якщо в піраміді $SABC$ грані SAB, SAC і SBC однаково нахилені до площини основи ABC
(тобто $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — відповідні лінійні кути рівні) і $SO \perp$ пл ABC,
то O — точка, рівновіддалена від прямих AB, BC і AC ($OK = OM = ON$).

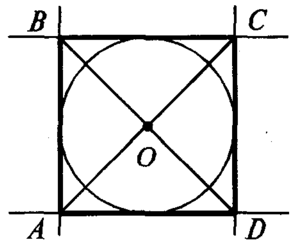


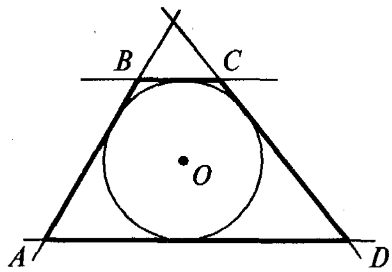
Для трикутника ABC точок, рівновіддалених від прямих AB, BC и AC, чотири:
центр вписаного кола — O;
три центри зовнівписаних кіл — O_1, O_2, O_3.

$OT = r_{\text{впис.}} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

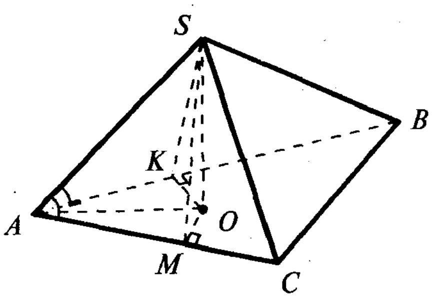
$O_2M = r_a = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p-a}$.

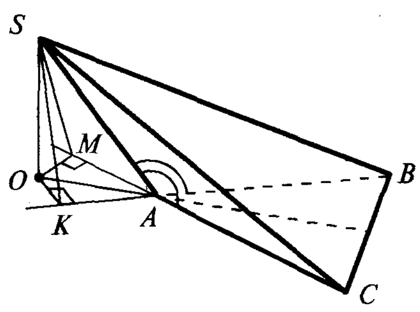






Для ромба (квадрата) і трапеції $ABCD$ точка, рівновіддалена від прямих AB, BC, CD и AD, єдина — центр вписаного кола — O.

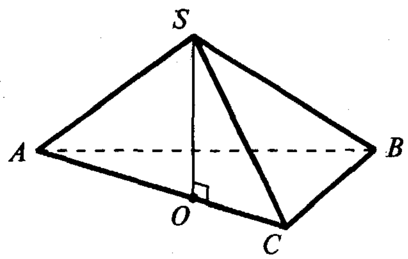




4. Якщо лише дві бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основи, **то це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними з цим ребром сторонами основи (і навпаки).**

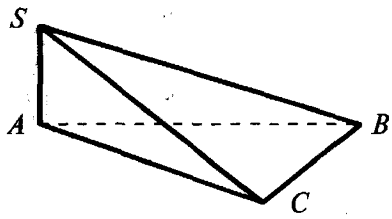
Якщо в піраміді $SABC$ грані SAB і SAC однаково нахилені до основи ABC (тобто $\angle SKO = \angle SMO$) або $\angle SAB = \angle SAC$ і $SO \perp$ пл. ABC,
то AO — бісектриса $\angle BAC$ (або пряма AO містить бісектрису $\angle BAC$).

Якщо в піраміді $SABC$
$SO \perp$ пл. ABC і AO — бісектриса $\angle BAC$
(або пряма AO містить бісектрису $\angle BAC$),
то $\angle SKO = \angle SMO$ (грані SAB і SAC однаково нахилені до основи) і $\angle SAB = \angle SAC$.



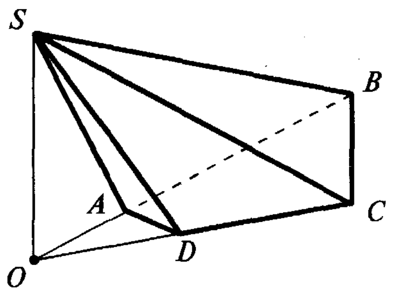
5. Якщо лише одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи,
то висотою піраміди буде висота цієї грані.

Якщо у піраміді $SABC$:
пл. $SAC \perp$ пл. ABC
і $SO \perp AC$ ($O \in AC$),
то SO — висота піраміди ($SO \perp$ пл. ABC).



6. Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,
то висотою піраміди буде їх спільне бічне ребро.

Якщо пл. $SAB \perp$ пл. ABC
і пл. $SAC \perp$ пл. ABC,
то SA — висота піраміди ($SA \perp$ пл. ABC).

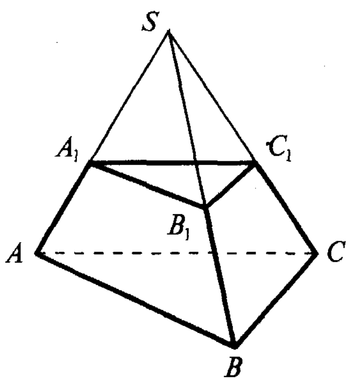


7. Якщо дві не суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,
то висотою піраміди буде відрізок прямої, по якій перетинаються площини цих граней.

Якщо пл. $SAB \perp$ пл. $ABCD$,
пл. $SCD \perp$ пл. $ABCD$
і пл. SAB перетинає пл. SCD по прямій SO
($O \in$ пл. $ABCD$),
то SO — висота піраміди.

Таблиця 46

ЗРІЗАНА ПІРАМІДА



Утворення зрізаної піраміди

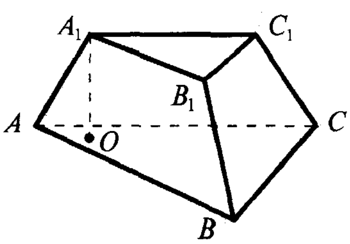
Якщо задано піраміду $SABC$ й проведено площину $A_1B_1C_1$, паралельну основі піраміди (пл. $A_1B_1C_1 \parallel$ пл. ABC), то ця площина відтинає від заданої піраміди піраміду $SA_1B_1C_1$, подібну даній.

(З коефіцієнтом подібності $K = \dfrac{SA_1}{SA} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$.)

Друга частина заданої піраміди — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — називається **зрізаною пірамідою**.

Грані ABC і $A_1B_1C_1$ — основи (пл. $ABC \parallel$ пл. $A_1B_1C_1$).

Трапеції ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — бічні грані.



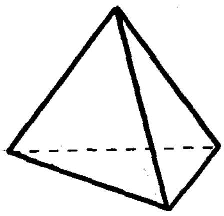
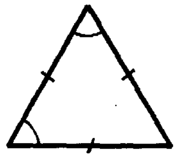
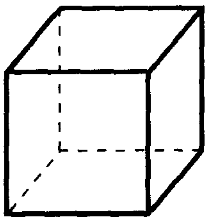
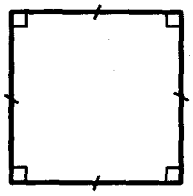
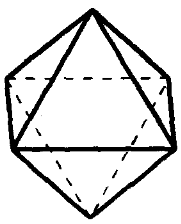
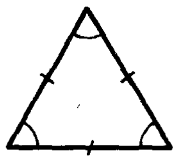
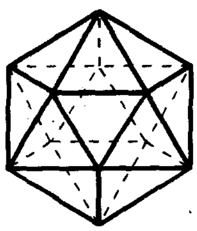
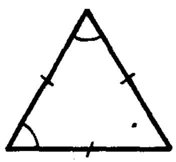
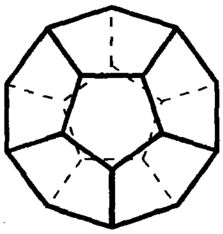
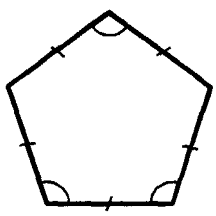
Висотою зрізаної піраміди називається відстань між площинами її основ.

$A_1O \perp$ пл. ABC	$A_1O = H$ — висота

$$V_{\text{зріз. піраміди}} = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$$, де S_1, S_2 — площі основ.

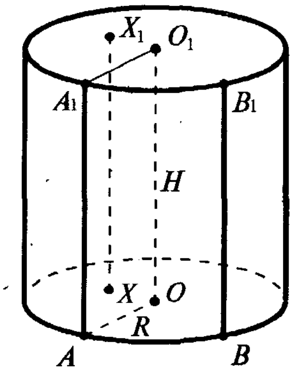
Таблиця 47

ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

№	Тип правильного многогранника	Форма грані	Кількість граней	Кількість вершин	Кількість ребер
1	**Правильний тетраедр (чотиригранник)** 		4	4	6
2	**Гексаедр (шестигранник), куб** 		6	8	12
3	**Октаедр (восьмигранник)** 		8	6	12
4	**Ікосаедр (двадцятигранник)** 		20	12	30
5	**Додекаедр (дванадцятигранник)** 		12	20	30

ЦИЛІНДР

Означення: циліндром (круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.



Круги — основи циліндра.

Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів,— **твірні**.

AA_1; BB_1 — твірні циліндра.

Циліндр називається **прямим**, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ.

У шкільних підручниках:

циліндр = прямий круговий циліндр.

Властивості

1. Основи циліндра рівні й паралельні.

$OA = O_1A_1 = R$
пл. $AOB \parallel$ пл. $A_1O_1B_1$

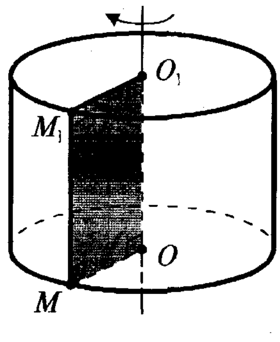
— O — центр нижньої основи, O_1 — центр верхньої основи.

2. Твірні циліндра паралельні і рівні.

$AA_1 \parallel BB_1$	$AA_1 = BB_1$

3. Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює твірній.

$H_{\text{цил.}} = AA_1 = OO_1$



4. При обертанні прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр.

OMM_1O_1 — прямокутник

— OO_1 — вісь утвореного циліндра ($OO_1 \parallel MM_1$).

$R_{\text{цил.}} = OM = O_1M_1$	$H_{\text{цил.}} = MM_1 = OO_1$

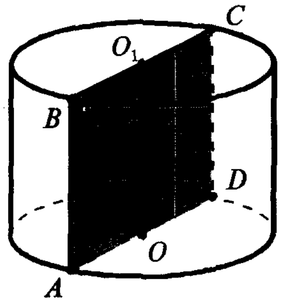
5. $S_{\text{осн. цил.}} = \pi R^2$ | $S_{\text{біч. цил.}} = 2\pi RH$ | $S_{\text{повн.}} = S_{\text{біч.}} + 2S_{\text{осн.}} = 2\pi R(H+R)$

6. $V_{\text{цил.}} = S_{\text{осн.}} \cdot H = \pi R^2 H$

Таблиця 49

ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНАМИ

Осьовий переріз циліндра



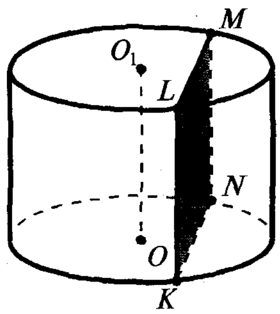
$ABCD$ — осьовий переріз (переріз, який проходить через вісь OO_1)

$ABCD$ — прямокутник

$AD = d_{осн.} = 2R$ | $AB = H_{цил.}$

AB і CD — твірні циліндра

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі



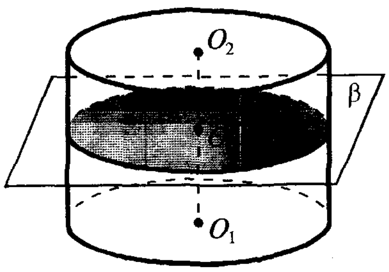
пл. $KLMN \parallel OO_1$

$KLMN$ — прямокутник

KL і MN — твірні циліндра

$KL = H_{цил.}$

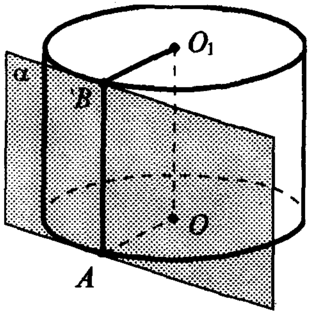
Переріз циліндра площиною, паралельною його основам



Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи.

$R_{пер.} = R_{цил.}$

Дотична площина до циліндра



Означення: дотичною площиною до циліндра називається площина, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до площини осьового перерізу, що містить цю твірну.

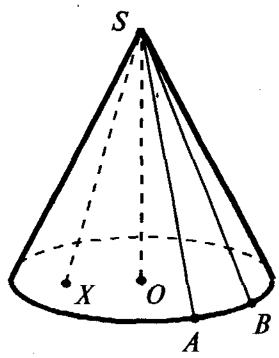
α — дотична площина до циліндра

AB — твірна, α проходить через AB

$\alpha \perp$ пл. AOO_1B

Таблиця 50

КОНУС



Означення: конусом (круговим конусом) називається тіло, яке складається з круга, точки, яка не лежить у площині цього круга, і всіх відрізків, що сполучають задану точку з точками круга.

Круг — основа конуса.
Точка S — вершина конуса.

Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, — **твірні**.

SA; SB — твірні конуса.

Конус називається прямим, якщо $SO \perp$ пл. AOB (O — центр круга основи).

У шкільних підручниках:

конус = прямий круговий конус.

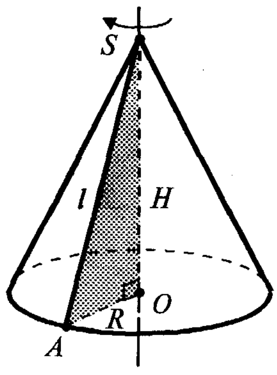
Властивості

1. Твірні конуса рівні.

$SA = SB = \ldots$

2.

$H_{\text{конуса}} = SO$	($SO \perp$ пл. AOB)



3. При обертанні прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус.

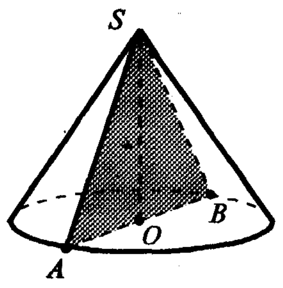
$\Delta\, AOS$ — прямокутний, $\angle\, AOS = 90°$	
пряма SO — вісь конуса	
$R_{\text{конуса}} = AO$	$H_{\text{конуса}} = SO$
AS — твірна, $AS = l$	

4. $S_{\text{осн. кон.}} = \pi R^2$ $\quad$ $S_{\text{біч. кон.}} = \pi R l$ $\quad$ $S_{\text{повн.}} = S_{\text{біч.}} + S_{\text{осн.}} = \pi R(l + R)$

5. $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

ПЕРЕРІЗИ КОНУСА ПЛОЩИНАМИ

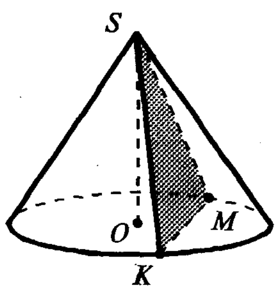
Осьовий переріз конуса



Δ SAB — осьовий переріз (переріз, який проходить через вісь SO)

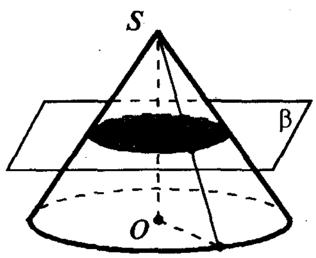
Δ SAB — рівнобедрений
$SA = SB$ (SA і SB — твірні)

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину



Δ SMK — рівнобедрений
$SM = SK$ (SM і SK — твірні)

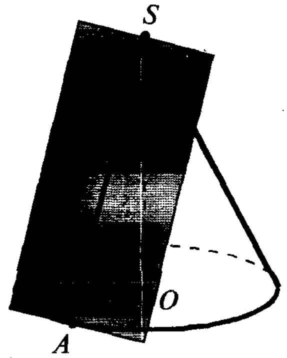
Переріз конуса площиною, паралельною його основі



Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса.

$$\boxed{\frac{R_{\text{пер.}}}{R_{\text{кон.}}} = \frac{SO_1}{SO}}$$

Дотична площина до конуса

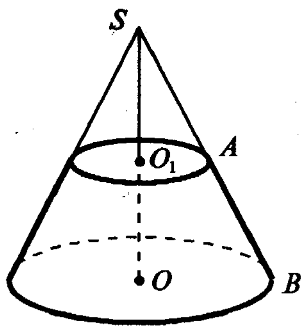


Означення: дотичною площиною до конуса називається площина, яка проходить через твірну конуса і перпендикулярна до площини осьового перерізу, що містить цю твірну.

α — дотична площина до конуса
SA — твірна, α проходить через SA, α ⊥ пл. SAO

ЗРІЗАНИЙ КОНУС

Утворення зрізаного конуса



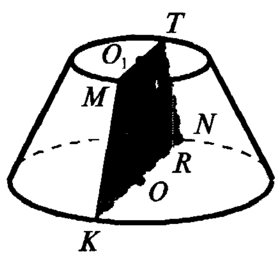
Якщо задано конус (з вершиною S і кругом основи з центром O) і проведено площину, яка паралельна його основі й перетинає конус, то ця площина відтинає від нього менший конус (з вершиною S і кругом основи з центром O_1).

Частина заданого конуса, що залишилася, називається **зрізаним конусом** (на малюнку виділено жирною лінією).

Висотою зрізаного конуса називається відстань між площинами його основ.

Зокрема, $\boxed{OO_1 = H_{\text{зріз.конуса}}}$, де O і O_1 — центри основ зрізаного конуса.

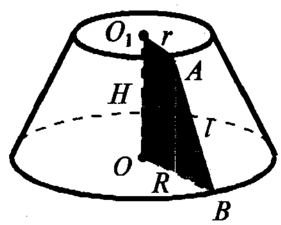
Властивості



1. Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція.

$MKNT$ — осьовий переріз	$MT \parallel KN$, $MK = TN$ (твірні)

$MT = 2r$; $KN = 2R$	$OO_1 \perp KN$; $OO_1 = H$



2. При обертанні прямокутної трапеції ($OBAO_1$) навколо осі, яка проходить через бічну сторону, перпендикулярну до основ, утворюється зрізаний конус.

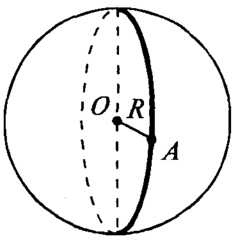
3. $\boxed{S_{\text{біч.зріз.конуса}} = \pi(R + r)l}$, де R і r — радіуси нижньої і верхньої основ, $l = AB$ — твірна.

$$\boxed{S_{\text{повн.}} = S_{\text{біч.}} + S_{1\text{осн.}} + S_{2\text{осн.}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2}$$

4. $\boxed{V_{\text{зріз. конуса}} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)}$

Таблиця 53

СФЕРА І КУЛЯ

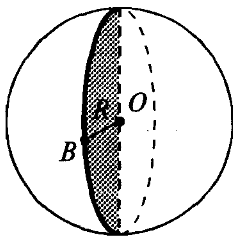


Означення: сферою називається тіло, що складається з усіх точок простору, що знаходяться на даній відстані (R) від даної точки (O).

O — центр сфери; OA — радіус сфери, $OA = R$

При обертанні півкола навколо його діаметра одержуємо сферу.

$S_{\text{сфери}} = 4\pi R^2$



Означення: кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться на відстані, не більшій за дану (R), від даної точки (O).

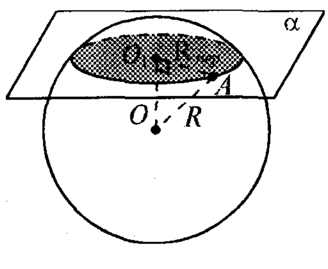
O — центр кулі; OB — радіус кулі, $OB = R$

При обертанні півкруга навколо його діаметра одержуємо кулю.

$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Таблиця 54

ПЕРЕРІЗ КУЛІ ПЛОЩИНОЮ

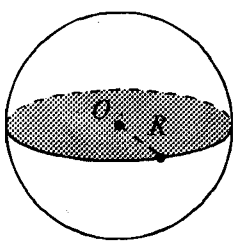


Будь-який переріз кулі площиною є круг.

Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

O — центр кулі, O_1 — центр круга перерізу.

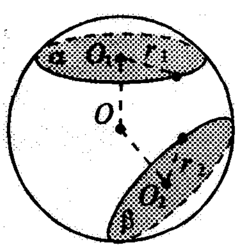
$OO_1 \perp \alpha$ З $\Delta\ OO_1A$ $R_{\text{пер.}} = \sqrt{R^2_{\text{кулі}} - OO_1^2}$



Переріз, що проходить через центр кулі, — **великий круг**.

$R_{\text{великого круга}} = R_{\text{кулі}}$

Переріз кулі двома площинами



$OO_1 \perp \alpha$; $OO_2 \perp \beta$; r_1 і r_2 — радіуси кругів перерізів.

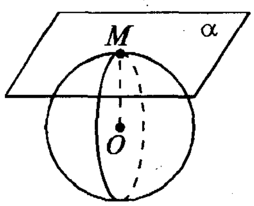
$OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$

$OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$

$OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$

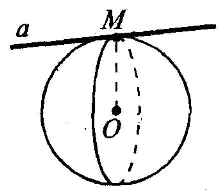
ДОТИЧНІ ПЛОЩИНА І ПРЯМА ДО КУЛІ (СФЕРИ)

Дотична площина



Означення: площина, що має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається дотичною площиною.

Дотична пряма



Означення: пряма, що має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається дотичною до кулі (сфери).

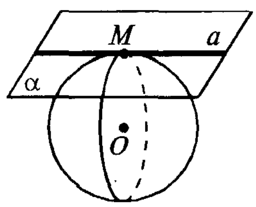
Властивості

1. Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику.
І навпаки: якщо площина (пряма) проходить через точку сфери і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до сфери.

α — дотична площина, M — точка дотику $\Leftrightarrow$ $OM \perp \alpha$ (OM — радіус кулі)

a — дотична пряма, M — точка дотику $\Leftrightarrow$ $OM \perp a$, (OM — радіус кулі)

2. Дотична пряма до кулі лежить в дотичній площині, проведеній через точку дотику.



α дотикається до кулі в точці M,
a дотикається до кулі в точці M

---

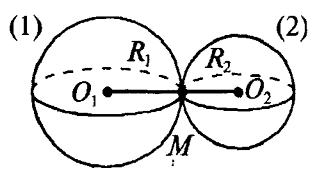
a лежить у площині α

Дотик двох сфер

Означення: дві сфери дотикаються одна до одної, якщо вони мають лише одну спільну точку.

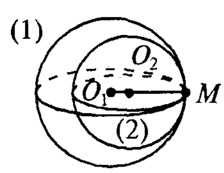
Зовнішній дотик

Сфера (1) дотикається до сфери (2) в точці M. $\Leftrightarrow$ $M \in O_1O_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$

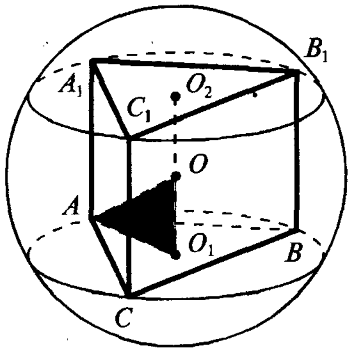


Внутрішній дотик

Сфера (1) дотикається до сфери (2) в точці M. $\Leftrightarrow$ $M \in O_1O_2$, $O_1O_2 = R_1 - R_2$



КУЛЯ, ОПИСАНА НАВКОЛО ПРИЗМИ



Означення: куля називається описаною навколо призми, якщо всі вершини призми лежать на поверхні кулі.

O — центр описаної кулі,
$OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. кулі}}$.

Властивості

1. Кулю можна описати тільки навколо прямої призми, навколо основи якої можна описати коло.

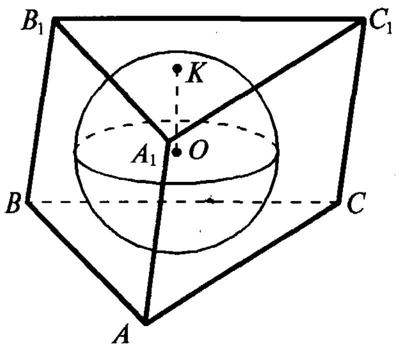
2. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить на середині відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

Якщо в призмі $ABCA_1B_1C_1$:
O_1 — центр кола, описаного навколо основи ABC,
O_2 — центр кола, описаного навколо основи $A_1B_1C_1$,
і O — середина відрізка O_1O_2,
то O — центр описаної кулі
($OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис.кулі}}$).

Для розв'язування звичайно використовують прямокутний $\Delta\ AOO_1$, в якому:

$AO = R_{\text{опис.кулі}}$,
$AO_1 = R_{\text{кола, опис. навколо основи}}$,
$$OO_1 = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} H_{\text{призми}}.$$

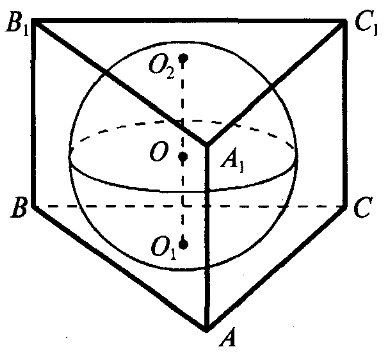
КУЛЯ, ВПИСАНА В ПРИЗМУ



Означення: куля називається вписаною в призму, якщо всі грані призми дотикаються до цієї кулі.

> O — центр вписаної кулі,
> K — точка дотику до грані $A_1B_1C_1$,
> $OK = r_{\text{впис. кулі}}$ ($OK \perp$ пл. $A_1B_1C_1$).

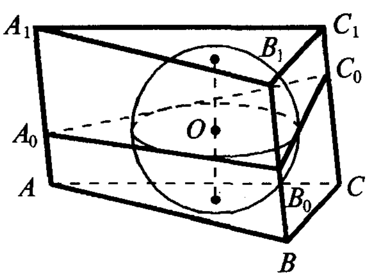
1. Пряма призма



Центр кулі, вписаної в пряму призму, лежить на середині відрізка, який сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Причому радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.

> Якщо $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма і O_1 — центр кола, вписаного в основу ABC,
> O_2 — центр кола, вписаного в основу $A_1B_1C_1$,
> O — середина відрізка O_1O_2,
> **то O — центр вписаної кулі,**
> $r_{\text{впис.кулі}} = r_{\text{кола, впис. в основу}}$,
> $d_{\text{впис.кулі}} = H_{\text{призми}}$.

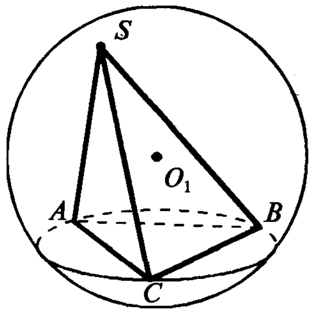
2. Похила призма



Якщо у похилу призму вписано кулю, то радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.

> Якщо у призму $ABCA_1B_1C_1$ вписано кулю і
> $A_0B_0C_0$ — перпендикулярний переріз (пл. $A_0B_0C_0 \perp AA_1$),
> **то** $r_{\text{впис.кулі}} = r_{\text{кола, впис. в перпенд. переріз } A_0B_0C_0}$,
> $d_{\text{впис.кулі}} = H_{\text{призми}}$.

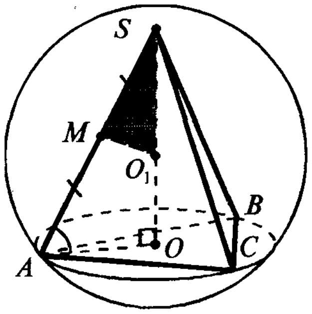
КУЛЯ, ОПИСАНА НАВКОЛО ПІРАМІДИ



Означення: куля називається описаною навколо піраміди, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.

O_1 — центр описаної кулі, $AO_1 = BO_1 = CO_1 = SO_1 = R_{\text{опис.кулі}}$

1. Піраміда, у якої основою висоти є центр описаного навколо основи кола



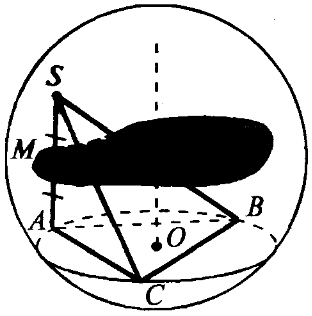
SO — висота піраміди $SABC$, O — центр кола, описаного навколо основи піраміди.
M — середина ребра SA, $MO_1 \perp SA$ (у площині ASO), MO_1 перетинає пряму SO в точці O_1.
O_1 — центр описаної кулі.
$SO_1 = R_{\text{опис.кулі}}$
$AO = R_{\text{кола, опис. навколо основи}}$

В такій піраміді центр описаної кулі лежить на прямій, що містить висоту піраміди, в точці перетину цієї прямої з серединним перпендикуляром до бічного ребра.

Шляхи розв'язування:

1) враховуючи те, що $\angle SO_1M = \angle SAO$, обчислюємо елементи прямокутних $\Delta\, SAO$ і $\Delta\, SMO_1$...;
2) враховуючи те, що $\Delta\, SMO_1 \sim \Delta\, SAO$, записуємо відповідні пропорції...

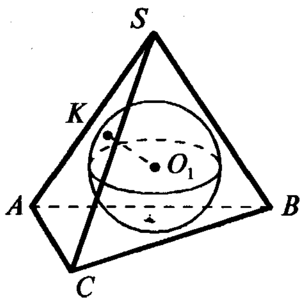
2. Довільна піраміда



Центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, лежить на прямій, перпендикулярній до площини основи, що проходить через центр кола, описаного навколо основи, в точці перетину цієї прямої з площиною, яка перпендикулярна до бічного ребра і проходить через його середину.

O — центр кола, описаного навколо основи.	
$OO_1 \perp$ пл. ABC	
M — середина ребра SA	$\alpha \perp SA$ ($M \in \alpha$)
α перетинає OO_1 у точці O_1, O_1 — центр описаної кулі.	

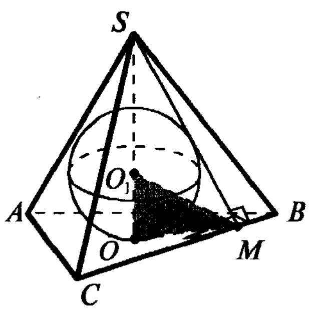
КУЛЯ, ВПИСАНА В ПІРАМІДУ



Означення: куля називається вписаною в піраміду, якщо всі грані піраміди дотикаються до цієї кулі.

O_1 — центр вписаної кулі,
K — точка дотику до грані SAC,
$O_1K = r_{\text{впис.кулі}}$ ($O_1K \perp$ пл. SAC)

1. Піраміда, у якої основою висоти є центр вписаного в основу кола



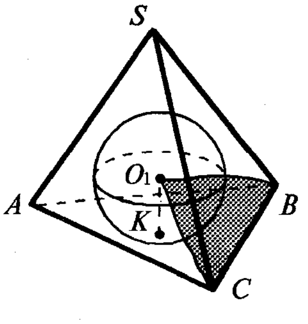
SO — висота піраміди $SABC$ (O — центр кола, вписаного в основу).
$\angle SMO$ — лінійний ($OM \perp BC$, $SM \perp BC$).
MO_1 — бісектриса $\angle SMO$, MO_1 перетинає SO в точці O_1.
O_1 — центр вписаної кулі.
$OO_1 = r_{\text{впис.кулі}}$
$OM = r_{\text{кола, впис. в основу}}$

В такій піраміді центр вписаної кулі лежить на висоті піраміди в точці перетину висоти з бісектрисою лінійного кута двогранного кута при основі.

Шляхи розв'язування:

1) $\angle OMO_1 = \frac{1}{2}\angle SMO$. Розглядаємо прямокутні $\Delta\ OMO_1$ і $\Delta\ SOM$...;
2) оскільки MO_1 — бісектриса $\Delta\ SMO$, то $\frac{SO_1}{OO_1} = \frac{SM}{OM}$...;
3) $r_{\text{впис.кулі}} = \frac{3V_{\text{пір.}}}{S_{\text{повн.пір.}}}$.

2. Довільна піраміда

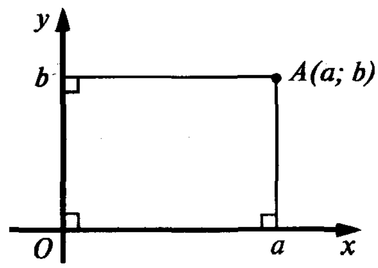
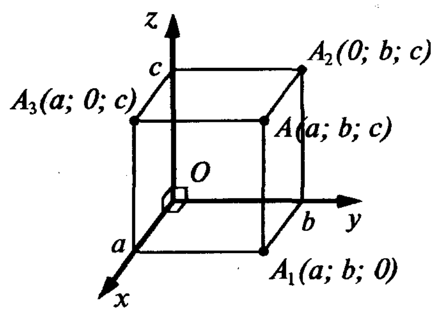


$r_{\text{впис. кулі}} = \frac{3V_{\text{пір.}}}{S_{\text{повн.пір.}}}$

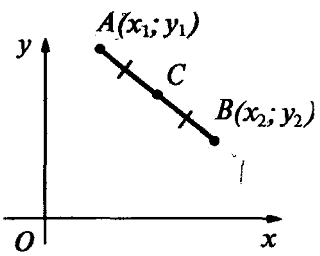
Центр кулі, вписаної в довільну піраміду, лежить в точці перетину бісекторних площин двогранних кутів при ребрах піраміди.
Досить розглянути три бісекторні площини.
O_1 — центр вписаної кулі, пл. BCO_1 — бісекторна площина двогранного кута при ребрі BC.

$O_1K \perp$ пл. ABC	$O_1K = r_{\text{впис. кулі}}$

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ

На площині	**У просторі**
	

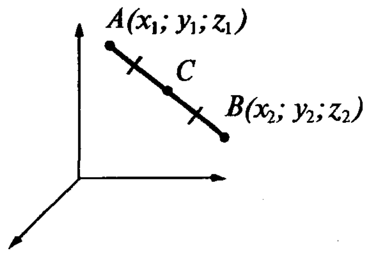
Координати середини відрізка



C — середина *AB*

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



C — середина *AB*

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

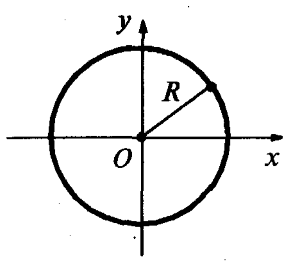
$$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Відстань між точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

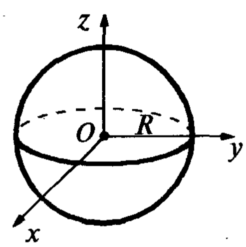
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Рівняння кола	**Рівняння сфери**



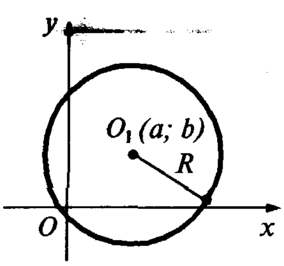
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Центр кола — початок координат.



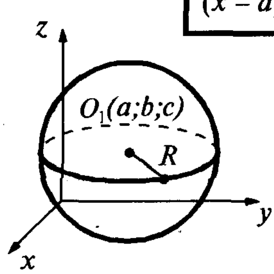
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Центр сфери — початок координат.



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Центр кола — точка O_1 (a, b).



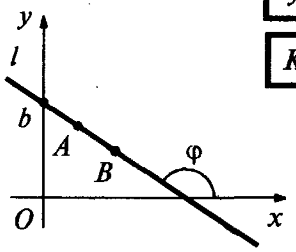
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Центр сфери — точка O_1 (a, b, c).

Рівняння прямої на площині

У загальному вигляді: $\boxed{ax + by + c = 0}$

З кутовим коефіцієнтом (при $b \neq 0$)



$\boxed{y = Kx + b}$ — пряма l,

$\boxed{K = \operatorname{tg}\varphi}$ — кутовий коефіцієнт.

Для прямої AB:

$$\boxed{K_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Рівняння площини у просторі

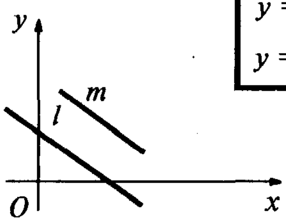
$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ — площина α

$\boxed{\alpha \perp \vec{n}\,(a,\ b,\ c)}$

Якщо площина α проходить через точку $M\,(x_o,\ y_o,\ z_o)$ і $\alpha \perp \vec{n}$,
то рівняння площини α:

$$\boxed{a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0}$$

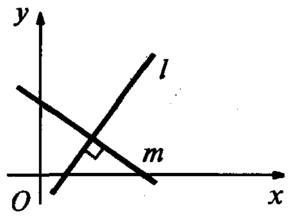
Умови паралельності і перпендикулярності прямих на площині



$\boxed{y = k_1x + b_1}$ — пряма l

$\boxed{y = k_2x + b_2}$ — пряма m

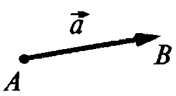
$$\boxed{l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}}$$



$$\boxed{l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1}$$

Таблиця 61

ВЕКТОРИ



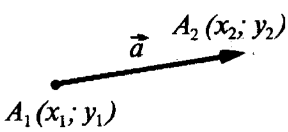
Означення: вектором називається напрямлений відрізок.

$\boxed{\vec{AB} = \vec{a}}$

Довжина цього відрізка називається довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора.

$\boxed{|\vec{a}| = AB}$

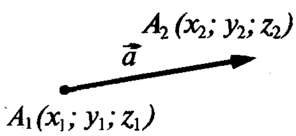
Координати вектора на площині



$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$

$\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$, де
$a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$

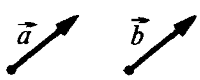
Координати вектора у просторі



$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

$\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$, де
$a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$

Рівні вектори



$\boxed{\vec{a} = \vec{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \text{вектори } \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ однаково напрямлені} \end{cases}$

У координатах:

$\vec{a}\,(a_1;\ a_2) = \vec{b}\,(b_1;\ b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

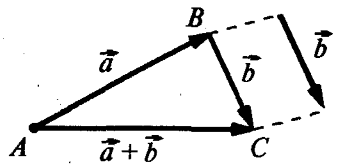
$\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3) = \vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Сума векторів

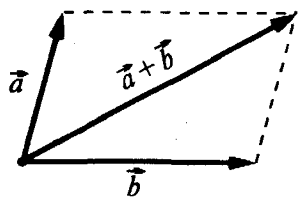
На площині	У просторі
$\vec{a}(a_1;\ a_2) + \vec{b}(b_1;\ b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$	$\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3) + \vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) =$ $= \vec{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$

Правило трикутника

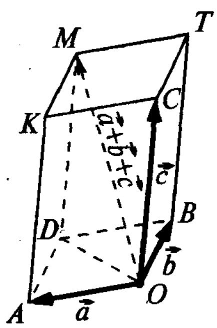


$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Правило паралелограма



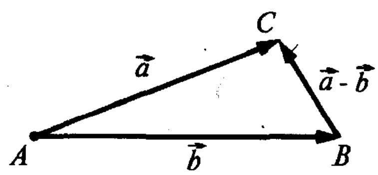
Правило паралелепіпеда



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}$$

Різниця векторів

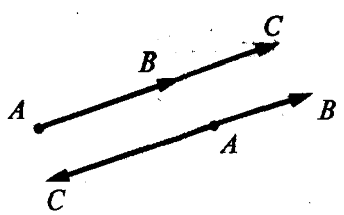
$\vec{a}(a_1;\ a_2) - \vec{b}(b_1;\ b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$	$\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3) - \vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3) = \vec{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$



$$\boxed{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}}$$

Множення вектора на число

$\boxed{\lambda \cdot \overline{(a_1; a_2)} = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2)}}$	$\boxed{\lambda \cdot \overline{(a_1; a_2; a_3)} = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}}$



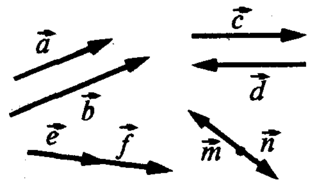
$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}}$$

При $\lambda > 0$ вектор $\lambda\vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ однаково напрямлені.

При $\lambda < 0$ вектор $\lambda\vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ протилежно напрямлені.

$$\boxed{|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|}$$

Колінеарні вектори

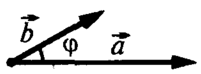


Означення: ненульові вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.

$$\boxed{\vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ колінеарні} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \ \left(\begin{array}{l}\text{відповідні коорди-}\\ \text{нати пропорційні}\end{array}\right)}$$

Скалярний добуток векторів



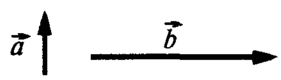
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}$$

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

У координатах

На площині	У просторі
$\vec{a}(a_1;\ a_2)$; $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$	$\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$; $\vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$

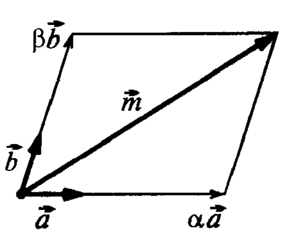
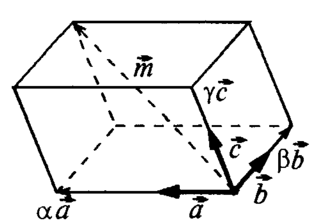
Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат.



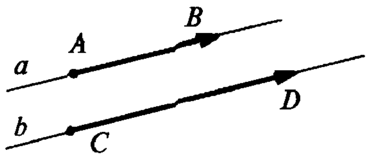
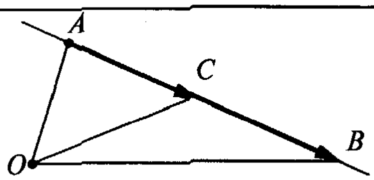
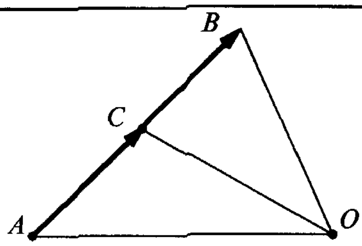
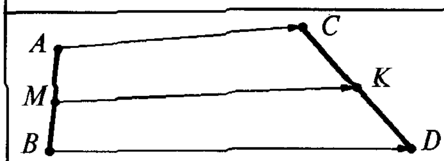
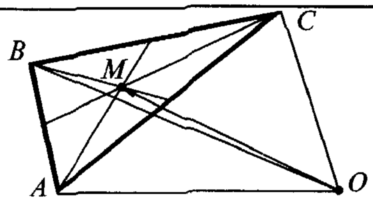
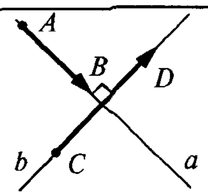
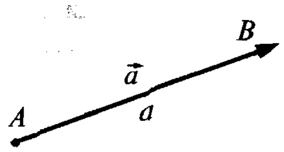
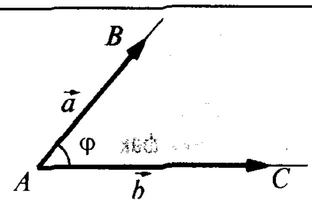
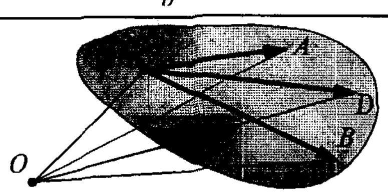
При $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$ $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$

Таблиця 63

РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА

На площині	У просторі
$\vec{m}$ — довільний вектор площини, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — не колінеарні вектори. Завжди існує розклад: $\boxed{\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \ (\alpha \text{ і } \beta \text{ — єдині}).}$	$\vec{m}$ — довільний вектор простору, $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — не компланарні (тобто не паралельні одній площині) вектори. Завжди існує розклад: $\boxed{\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \ (\alpha,\ \beta \text{ і } \gamma \text{ — єдині}).}$
	

Переклад геометричних фактів на векторну мову і векторних співвідношень на геометричну мову

	прямі паралельні $a \parallel b$ (прямі a і b не збігаються)	вектори колінеарні $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$
	$C \in AB$ $\left(\dfrac{AB}{AC} = \lambda\right)$	вектори колінеарні $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ або $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\cdot\overrightarrow{OB}$
	$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$	а) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{m}{n}\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OC} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.
	C — середина AB, $\left(\dfrac{AC}{CB} = 1\right)$	$\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
	M — середина AB K — середина CD	$\overrightarrow{MK} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$
	M — точка перетину медіан $\Delta\ ABC$ O — довільна точка	$\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$
	$a \perp b$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ $(\overrightarrow{AB} \neq \vec{0},\ \overrightarrow{CD} \neq \vec{0})$
	$AB = a$	$\vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$, де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\lvert\vec{a}\rvert = a$ (у координатах: $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ — на площині; $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$ — у просторі).
	$\angle\ BAC = \varphi$	$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, де $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
	$D \in$ пл. ABC $C \notin AB$, O — довільна точка	а) $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} +$ $+ (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$.

ЗМІСТ

І. Планіметрія

ІІ. Стереометрія

ІІІ. Координати і вектори