

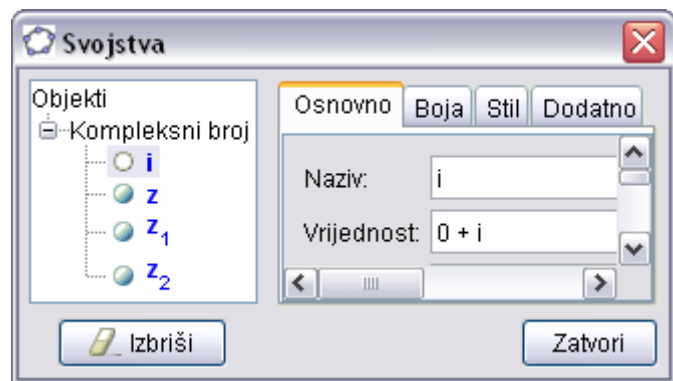
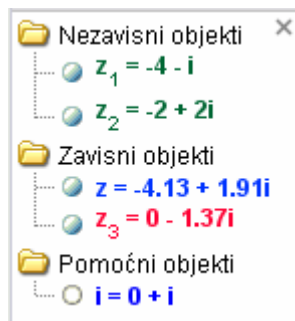
## Kompleksni brojevi u GeoGebri

S kompleksnim se brojevima u srednjoškolskim programima matematike susrećemo u drugom i četvrtom razredu. Dohvaćamo se pritom i prikaza kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini. Može li Geogebri koordinatni sustav, odnosno njen grafički prikaz, poslužiti za prikaz kompleksnih brojeva? Može li interpretirati računске operacije s tim brojevima na način na koji se definira računске operacije s kompleksnim brojevima? Odgovor je potvrđan, čak štoviše vrlo složene izračune možete izvesti veoma brzo i pouzdano uz istovremenu predodžbu rezultat i međukoraka.

### 'Paljenje' kompleksne ravnine

GeoGebra ne podržava kompleksne brojeve izravno, ali vi možete koristiti točke koje će simulirati operacije s kompleksnim brojevima.

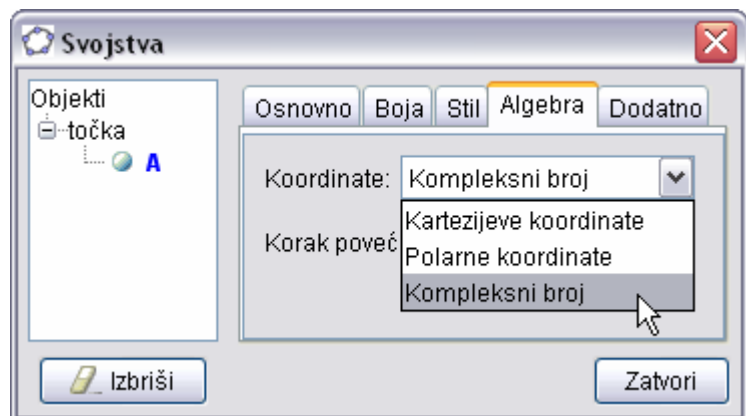
**Primjer.** Upišete li kompleksni broj  $z_1 = -4 - i$  u traku za unos dobit ćete točku  $(-4, 1)$  u grafičkom prikazu. U algebarskom prozoru koordinate ove točke bit će prikazane kao  $-4 - i$ .



**Napomena.** Nakon prvog definiranog kompleksnog broja program će automatski rezervirati varijablu  $i$  za uređeni par  $(0, 1)$ , odnosno kompleksni broj  $0 + 1i$ , koji neće biti prikazan a njegov će se algebarski zapis naći u mapi *Pomoćni objekti*.

### Pretvaranje već konstruiranih točaka u kompleksne brojeve.

Ako već imate nacrtanu točku koordinatnog sustava i u *algebarskom prikazu* vidite njene Kartezijeve koordinate možete u bilo kojem trenutku prijeći na algebarski zapis kompleksnog broja. Otvorite dijaloški okvir *Svojstva* za točku i odaberite 'Kompleksni broj' iz padajućeg izbornika 'Koordinate' na kartici *Algebra*.



**Polarne koordinate.** Primijetite na slici da u padajućem izborniku imamo na raspolaganju i polarne koordinate za točke. Geogebra razlikuje polarne koordinate od Kartezijevih po 'točka zarezu' među koordinatama. To značajno može olakšati unos kompleksnih brojeva. Na

primjer, kompleksni broj  $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  možemo zadati polarnim koordinatama  $(1; \pi/4)$  ili

$(1; 45^\circ)$ , umjesto da upisujemo  $\text{sqrt}(2)/2 + \text{sqrt}(2)/2 i$ . Na kartici *Algebra* dijaloškog okvira *svojstva* potom prebacite polarne koordinate točke u kompleksni broj.

## Računske operacije

### Primjeri zbrajanja i oduzimanja

$(2 + 1i) + (1 - 2i)$  daje kompleksni broj  $3 - 1i$ .

$(2 + 1i) - (1 - 2i)$  daje kompleksni broj  $1 + 3i$ .

GeoGebra u izrazima prepoznaje realne i kompleksne brojeve.

$3 + (4 + 5i)$  daje kompleksni broj  $7 + 5i$ .

$3 - (4 + 5i)$  daje kompleksni broj  $-1 - 5i$ .

### Primjeri množenja i dijeljenja

$(2 + 1i)(1 - 2i)$  ili  $(2 + 1i) * (1 - 2i)$  daje kompleksni broj  $4 - 3i$ .

$(2 + 1i) / (1 - 2i)$  daje kompleksni broj  $0 + 1i$ .

$3 / (0 + 1i)$  daje kompleksni broj  $0 - 3i$ .

$3 * (1 + 2i)$  daje kompleksni broj  $3 - 6i$ .

Napomena: Uobičajeno množenje  $(2, 1) * (1, -2)$  daje skalarni umnožak dviju točaka (dvaju vektora).

### Potenciranje kompleksnih brojeva

$(1 + 2i)^2$  daje kompleksni broj  $-3 + 4i$ .

$i^{100}$  daje broj  $1 + 0i$ .

$(\text{sqrt}(2)/2 + \text{sqrt}(2)/2 i)^4$  daje broj  $-1 + 0i$ .

**Modul kompleksnog broja** dobije se funkcijom  $\text{abs}()$ .

$\text{abs}(\text{sqrt}(2)/2 + \text{sqrt}(2)/2 i)$  daje vrijednost  $1$ .

### Složeniji primjeri

- Izračunajte  $\frac{z^6 + |z| + i^{-111}}{|z|^2 + i^{111}}$ , gdje je  $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .

Upišite u traku za unos:  $z = -\text{sqrt}(3)/2 + 1/2 i$

I potom:  $(z^6 + \text{abs}(z) + i^{(-111)}) / ((\text{abs}(z))^2 + i^{111})$

Geogebra daje rezultat:  $-0.5 + 0.5i$ .

- Izračunajte  $\left[ \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \right]^{42}$

Upišite:  $(\text{cbrrt}(2)(\cos(5\pi/12) + i \sin(5\pi/12)))^{42}$ . Rezultat je broj  $z = 0 - 16384i$ .

## Skup točaka kompleksne ravnine

Često u našim srednjoškolskim zbirkama zadataka, na kraju cjeline kompleksnih brojeva, nalazimo na zadatke s određivanjem skupa brojeva u Gaussovoj ravnini koji zadovoljavaju

određeni uvjet. Zadatak na koji sam naišao prateći jedan od hrvatskih web foruma sličan je tim zadacima, a teži utoliko što nije zadan s točno određenim brojevima.

**Zadatak.** Odredi skup svih kompleksnih brojeva  $z$  određenih uvjetom  $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$ .

### Algebarsko rješenje

Uzmemo li da je  $z = x + yi$ ,  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$ , onda nakon uvrštavanja dobivamo:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \frac{(x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_2)}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}i$$

Kako je  $z \neq z_2$ , slijedi:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

Ovu jednakost možemo pisati i u obliku

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2.$$

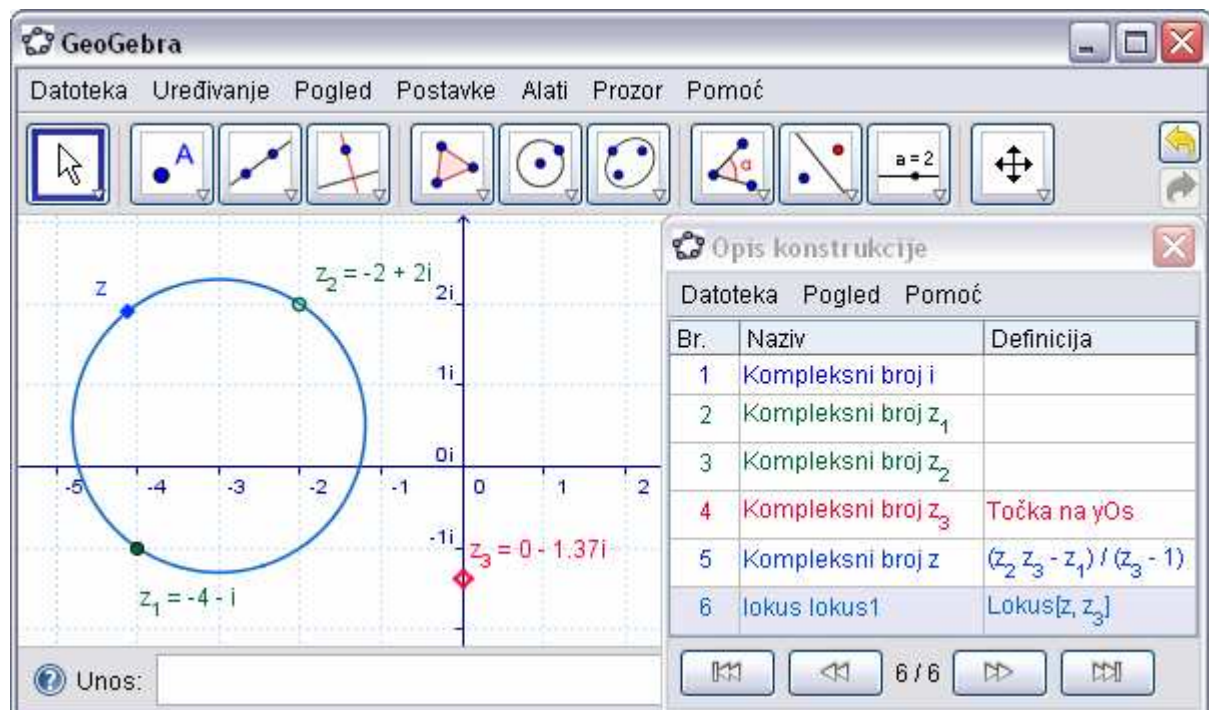
Desna strana te jednakosti zapravo je kvadrat polovine udaljenosti  $z_1$  i  $z_2$ . Traženi skup točaka je kružnica sa središtem u točki

$$z_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}i,$$

S promjerom koji je udaljenost  $z_1$  i  $z_2$  ali bez točke  $z_2$ .

### Rješenje uz pomoć GeoGebre

Tijekom rješavanja zadatka na forumu došlo je, u jednom trenutku, do pogrešne interpretacije dobivenog ispravnog algebarskog rješenja, a s druge strane e učenik koji je postavio zadatak zamolio je da mu se pomogne problem riješiti u računalnom programu dinamične geometrije. Učinio mi se to krupan zalogaj na prvi pogled, ali kako ćete se i sami uvjeriti uz malo prilagodbe 'filozofiji' računalnog programa, možemo dobiti veoma jednostavno i elegantno rješenje.

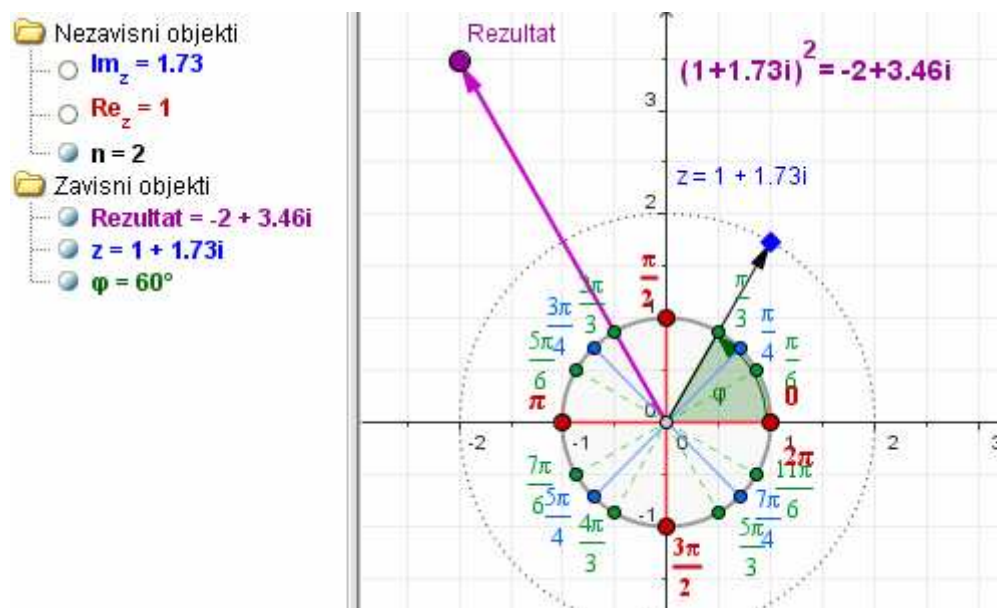


Na priloženoj slici, iz otvorenog programskog prozora *Opisa konstrukcije*, vidi se da je riječ o svega šest koraka konstrukcije. Zapravo o pet koraka jer definiranje točke (0, 1) kao broja  $i$  izvrši program automatski dočim korisnik stane zadavati kompleksne brojeve. Dakle, ova je konstrukcija izvedena na sljedeći način:

1. Zadan je kompleksni broj  $z_1$  kao nezavisna točka, odnosno točka koja se slobodno može povlačiti po koordinatnom sustavu.
2. Na isti je način zadan kompleksni broj  $z_2$ .
3. Broj  $z$  treba predstavljati skup svih brojeva koji moraju ispunjavati zadani uvjet, pa njega nećemo konstruirati kao nezavisan objekt već kao zavisan. Osnovni je problem kako postaviti uvjet da  $\operatorname{Re} \frac{z-z_1}{z-z_2}$  bude jednak nuli. Izraz  $\frac{z-z_1}{z-z_2}$  je zapravo kompleksni broj koji označimo kao  $z_3$ . Ako je realni dio tog broja jednak nuli onda je on u kompleksnoj ravnini smješten na imaginarnoj osi, pa stoga taj broj zadamo naredbom kroz traku za unos:  $z_3 = \text{Točka}[yOs]$ .
4. Iz relacije  $z_3 = \frac{z-z_1}{z-z_2}$  izrazimo  $z$  i taj broj kroz traku za unos zadamo naredbom  $z = (z_2 z_3 - z_1) / (z_3 - 1)$ .
5. Povlačimo li sada točku  $z_3$  po osi ordinata možemo uočiti da točka  $z$  izvodi kružno gibanje. Bit ćemo sigurniji u to da je riječ o kružnici ukoliko zadamo naredbu  $\text{Lokus}[z, z_3]$ , kojom ćemo dobiti upravo skup svih kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju postavljene uvjet zadatka.

Iz dobivenog *lokusa* vidi se da je riječ o kružnici, čiji je promjer dužina s rubnim točkama  $z_1, z_2$ . Njeno polovište središte je kružnice. Do jednadžbe te kružnice možemo doći naredbom  $k = \text{Kružnica}[z, z_1, z_2]$ , a do koordinata središta naredbom  $S = \text{Središte}[k]$ .

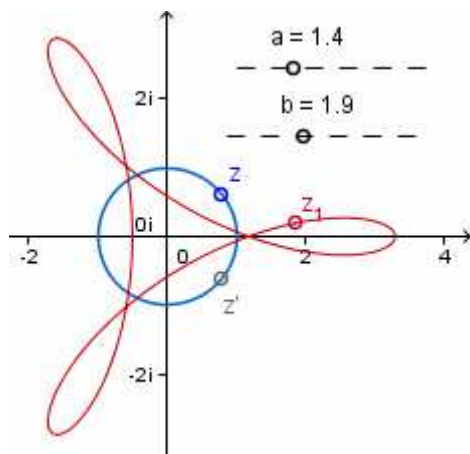
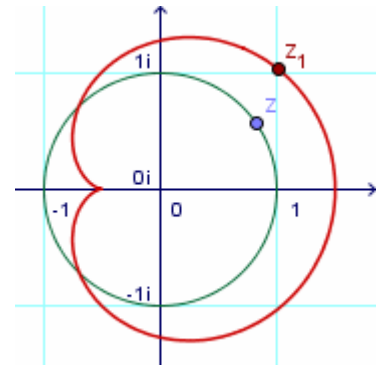
## Potenciranje kompleksnih brojeva



Ova je slika preuzeta s *Riznice matematičkih apleta* (<http://apleti.normala.hr>), a predstavlja alat u kojem korisnik može izračunati potenciju kompleksnog broja, uz predodžbu njegovog modula i argumenta u trigonometrijskom zapisu broja. Dovoljno je da korisnik izmjeni realni i imaginarni dio broja, te zada eksponent potencije. Cijeli postupak određivanja rezultata krajnje je jednostavan. Dvoklikom na aplet na toj stranici možete preuzeti datoteku na svoje računalo i zavirit u izbornik *Opis konstrukcije*.

## Transformacije u kompleksnoj ravnini

Neke poznate figure koje možemo inače opisati mehaničkim gibanjem točaka u ravnini ili ih zadati jednadžbama, u kompleksnoj ravnini možemo dobiti krajnje jednostavnim transformacijama. Tako **kardioidu** dobijemo preslikavanjem kružnice polumjera jedan po formuli  $\frac{1}{2}z^2 + z$ . U GeoGebri točku na kružnici preslikamo po toj formuli, a potom koristimo naredbu *Lokus*.



**Transformacije kružnice.** U jednom od ranijih brojeva MiŠ-a pokazali smo kakve se sve oblike može dobiti naredbom

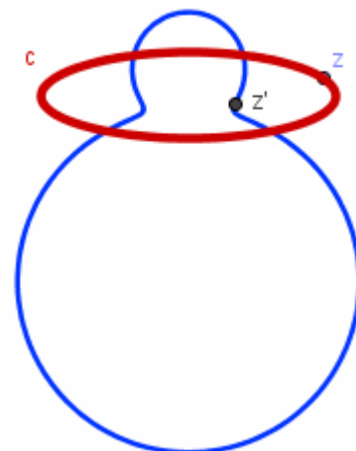
Krivulja  $[a \cos(2t) + b \cos(t), a \sin(2t) - b \sin(t), t, 0, 2\pi]$  mijenjajući parametre  $a$  i  $b$ . Te zanimljive oblike možemo postići i u kompleksnoj ravnini. Neka je  $z$  točka na kružnici i  $z'$  konjugirani broj broja  $z$ .

Definirajmo broj  $z_1 = az^2 + bz'$ , gdje su  $a$  i  $b$  ranije definirani parametri u intervalu od 0 do 5. Naredbom *Lokus*[ $z_1, z$ ] dobijemo krivulju kakvu vidite na slici i razne druge oblike kad se mijenjaju vrijednosti parametara.

**Igra sa savitljivom tikvicom.** Pogledajte sliku 'tikvice' i elipse. Može li se tikvica provući kroz elipsu? Da može, jer sve se odvija u kompleksnoj ravnini i tikvica se na vrlo zanimljiv način izobličuje kada mijenjate koeficijente u jednadžbi elipse. Ova tikvica je zapravo skup točaka koji dobijemo kada točke elipse transformiramo po formuli:

$$z' = \frac{20z}{|z|^2}$$

Evo zapisa cijele konstrukcije rađene prema ideji kolege Marca Rouxa ([www.apmep.asso.fr](http://www.apmep.asso.fr)).



Br.	Naziv	Naredba	Vrijednost
1	broj a		a = 8
2	broj b		b = 2.3
3	broj p		p = 0
4	broj q		q = 1.2
5	elipsa c	$(x - p)^2 / a^2 + (y - q)^2 / b^2 = 1$	c: $0.03x^2 + 0.38y^2 - 0.91y = 1.46$
6	Kompleksni broj z	Točka[c]	$z = 7.34 + 2.11i$
7	Kompleksni broj i		$i = 0 + i$
8	Kompleksni broj z'	$20 z / \text{abs}(z)^2$	$z' = 2.52 + 0.72i$
9	lokus tikvica	Lokus[z', z]	tikvica

Ugodna zbava!