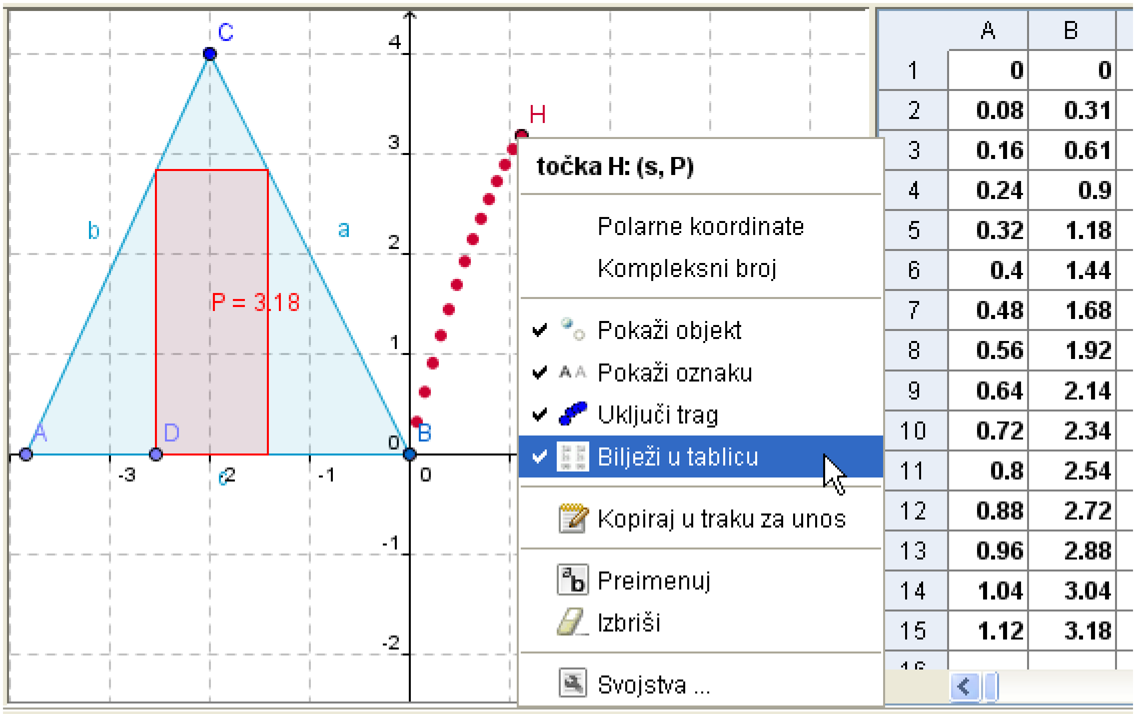
Šime Šuljić

GeoGebra 3.2

otvara širom vrata statistici i vjerojatnosti

Za razne internetske servise prije bi se moglo reći da su odmoć u učenju nego pomoć. Zarazno su zabavni, a često isprazni. Zbog njih učenici često budu nenaspavani na nastavi, a obrazovni sadržaji njima najčešće ne kolaju. Jedan od izuzetaka su web forumi na kojima se rješavaju i matematički zadaci. Jedan takav zove se *Matematika – pomoć*. Baš neki dan je odgovor na postavljeno pitanje sadržavao skicu izrađenu GeoGebrom. Zahvalni učenik iz Vinkovaca tada je zapitao: „Vidim da dobro barataš GeoGebrom. Postoje li kakvi *tutorijali* za taj program jer ja niš ne kužim?“. Zanimljiv mi je bio odgovor vrlo aktivnog forumaša iz Rijeke, vrsnog matematičkog znalca koji nije školarac, a koji očito nije ni nastavnik. On piše: „Ja sam naučio raditi u GeoGebri bez ikakvih tutorijala i priručnika. Moraš imati **malo volje, mašte i znanja matematike** i shvatit ćeš jer je GeoGebra jednostavan program“. Čitatelji ovog članka sigurno imaju volje i matematičkog znanja. Kada pokrenete program Geogebra njegov je prozor poput *tabule rase*. Očekuje vaše ideje, čeka vašu kreativnost da s raspoloživim alatima pristupite matematičkim sadržajima na jedan nov način.



U istoj sam situaciji i ja kao autor ovog članka. Nemam nekog gotovog uzora što točno iz matematičkih sadržaja izabrati i kako tome pristupiti s ovim izvrsnim programom. Postoji opasnost da vođen maštom ne opišem sve novosti koje donosi nova verzija programa. Novosti je toliko da ih ionako ne možemo opisati u ovom broju. Zato je korisnije na nekom primjeru maštovito ih upotrijebiti nego samo taksativno opisati. Najveća novost u novoj verziji GeoGebre je treći prozor s proračunskom tablicom nalik onoj u *Excelu* i čitav niz statističkih funkcija. Stoga ćemo se u ovom članku pozabaviti s nekoliko primjera iz vjerojatnosti i statističkim obradom i prikazom podataka. Može vam se učiniti kako onda to nije sadržaj za vas jer se u srednjoj školi više skoro nigdje ne uči vjerojatnost, a statistika još i manje. Sjetimo se *Matematičareve jadikovke* iz prošlog broja MiŠ-a i pouke da matematiku radimo prije svega jer nam je lijepa i zabavna ta vrsta umjetnosti. Kad-tad i sadašnji program matematike morat će se mijenjati. U osnovnoj je školi, doduše, od prije nekoliko godina uvedena cjelina *Vjerojatnost i statistika*. Odabrani primjeri mogu vam svojim naslovom izgledati neprimjereni za osnovnu školu ali vjerujem da ćete se uvjeriti kako pristup kroz Geogebru stvari prilično pojednostavnjuje.

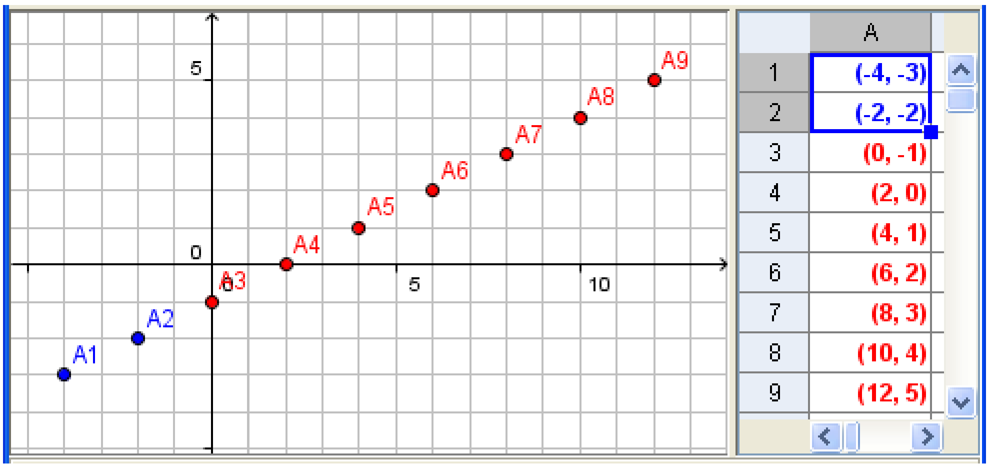
Interaktivnost GeoGebrinih prikaza

Od ranije vam je poznato da svaku promjenu objekta ili promjenu njegovog položaja u desnom *grafičkom prikazu* prati promjena u algebarskom zapisu tog objekta u lijevom prozoru. Pomakom točke u koordinatnom sustavu mijenjaju se njene dijagonale. Promjeni li kružnica položaj ili poveća li se njen polumjer, to se odrazi na jednadžbu kružnice. I obratno, ako u *algebarskom prikazu* interveniramo odrazi se na *grafički prikaz*. Sada s novim prozorom, koji ćemo zvati grafički prikaz, ta se dinamična interaktivnost nastavlja i to u oba smjera između bilo koja dva prikaza. Većini korisnika raznih proračunskih tablica poznato je da iz tabličnih podataka može nastati graf. U GeoGebri također ali i obratno, iz vaše se konstrukcije mogu podacima dinamično puniti ćelije proračunske tablice.

Primjer 1. Pogledajte sliku s poznatim zadatkom traženja pravokutnika maksimalne površine upisanog u trokut. Desni klik na točku, čija ordinata predstavlja površinu pravokutnika, omogućuje dinamično zapisivanje koordinata te točke dok u konstrukciji izvodimo animaciju. Sada je opet moguće desnim kliko na stupac u proračunskoj tablici izraditi takozvanu *listu objekata* prikazanu u *algebarskom prikazu*:

L_1 = {0, 0.31, 0.61, 0.9, 1.18, 1.44, 1.68, 1.92, 2.14, 2.34, 2.54, 2.72, 2.88, 3.04, 3.18, 3.3, 3.42, 3.52, 3.6, 3.68, 3.74, 3.78, 3.81, 3.83, 3.84, 3.83, 3.81, 3.78, 3.73, 3.67, 3.6, 3.51, 3.41, 3.29, 3.17, 3.02, 2.87, 2.7, 2.52}.

Nad listom je opet moguće izvršavati naredbe kakva je na primjer Maksimum[L_1] = 3.84.



Primjer 2. Neke objekte Geogebra izravno crta dočim ih upisujete u ćelije proračunske tablice. Tako su nastale točke A1 i A2 na slici. Uobičajenim razvlačenjem plavog pravokutnika nastale su crvene točke u nizu. Naknadnim promjenama koordinata dviju nezavisnih točaka u *tabličnom prikazu*, mijenjat će se izgled cijelog niza u koordinatnom sustavu. Pomicanjem nezavisnih točaka u *grafičkom prikazu* doći će do promjena koordinata u *tabličnom prikazu*.

Bacanje dviju kocki

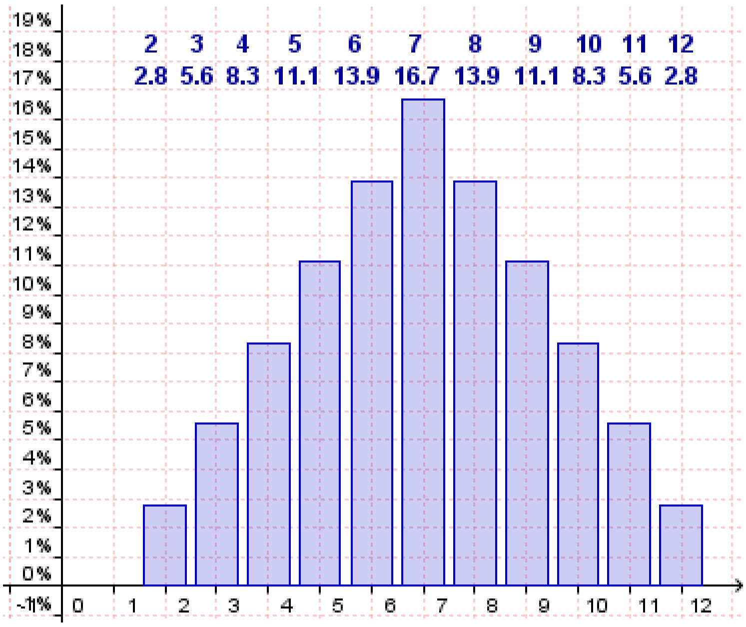
Zadatak. Pri bacanju dviju kocki kolika je vjerojatnost da će pasti zbroj 2, 3, 4, …, 12?

	A	B	C	D	E	F
1	prva	druga	Zbroj	Ishodi	Frekv.	Rel.f.(%)
2	1	1	2	2	1	2.8
3	1	2	3	3	2	5.6
4	1	3	4	4	3	8.3
5	1	4	5	5	4	11.1
6	1	5	6	6	5	13.9
7	1	6	7	7	6	16.7
8	2	1	3	8	5	13.9
9	2	2	4	9	4	11.1
10	2	3	5	10	3	8.3
11	2	4	6	11	2	5.6
12	2	5	7	12	1	2.8
13	2	6	8			
14	3	1	4			
15	3	2	5			
16	3	3	6			
17	3	4	7			

Iskoristit ćemo novi GeoGebrin prozor za tablični prikaz kako bismo sustavno i što jednostavnije riješili ovaj zadatak s ciljem da osim numeričkog prikaza izradimo i zorni grafički prikaz razdiobe.

1. Otvorite izbornik *Pogled* > *Tablični prikaz* (kratica Ctrl+Shift+S).
2. U prvi redak upišite nazive stupaca.
3. U ćeliju A2 upišite 1 i kopirajte do A7 razvlačenjem vrha plavog pravokutnika. Zatim nastavite s brojem 2 u A8 i sve tako redom do broja 6 u posljednjoj ćeliji A37.
4. U ćeliju B2 upišite 1, a u ćeliju B3 broj 2. Označite obje ćelije pa razvucite do B7 da dobijete vrijednosti svih strana kocke. Označite sada ćelije u rasponu od B2 do B7 i kopirajte ih na ćeliju B8. Koristite kratice Ctrl+C i Ctrl+V ili desnom tipkom miša na označene ćelije otvorite skočni izbornik.
5. Zbroj na dvije kocke dobit ćemo upisom formule u ćeliju C2. Formula počinje sa znakom jednakosti. Upišite =A2+B2. Označite dobivenu vrijednost i razvucite plavi pravokutnik sve do ćelije C37.
6. U stupcu D navedite niz mogućih ishoda. U ćeliju D2 upišite 2, a u D3 unesite 3. Označite obje i razvucite do vrijednosti 12.
7. Svaki stupac ili redak tablice može se prikazati kao lista podataka u algebarskom prikazu. Označite raspon ćelija C2:C37 i desnim klikom otvorite skočni izbornik. Odaberite naredbu *Izradi listu* tako ćete dobiti objekt 'lista1'.
8. Potrebno je utvrditi frekvenciju pojavljivanja pojedinog zbroja u 'listi1'. Za to koristite naredbu za uvjetno prebrajanje preko *trake za unos* na dnu programskog prozora. Upišite: `E2 = UvjetnoPrebrajanje[x ≟ D2, lista1]`. Pritisnite tipku *Enter*, a zatim razvucite plavi pravokutnik s ćelije E2 sve do E12. Simbol ≟ naći ćete u padajućem izborniku pored *trake za unos*. Možete umjesto njega koristiti dva znaka jednakosti (= =).

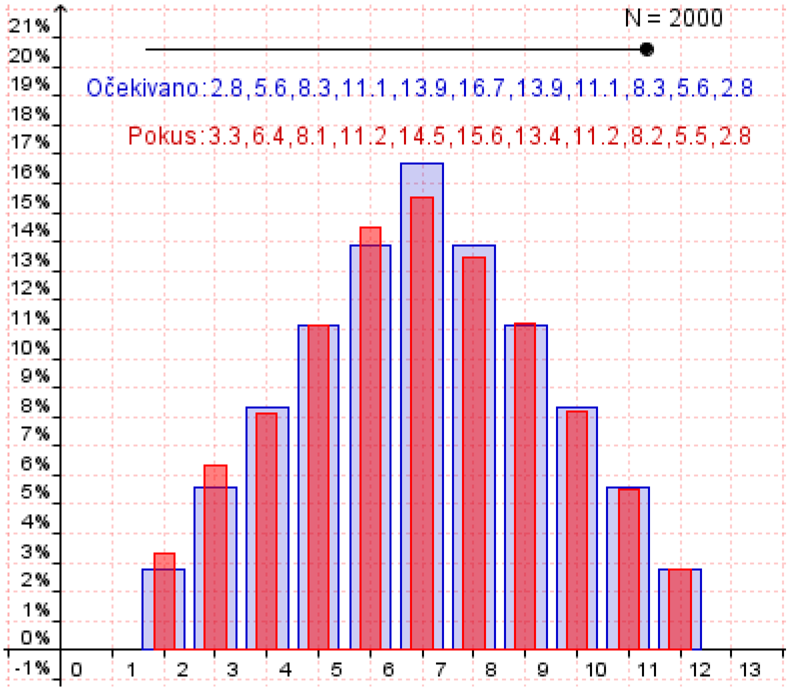
9. U narednom stupcu prikažite relativnu frekvenciju izraženu postotkom. Dovoljno je u ćeliju F2 upisati 100 E2 / 36. Kopirajte ćeliju sve do F12. Time je numerički zadatak riješen!
10. Za grafički prikaz relativnih frekvencija potrebna je tek jedna naredba koju se upisuje u *traku za unos*: `StupčastiDijagram[D2:D12, F2:F12, 0.8]` i pritisnite tipku *Enter*. Prvi raspon ćelija u naredbi određuje vrijednosti koje se nanose na apscisu, drugi raspon su vrijednosti koje se prikazuju kao ordinate i broj 0.8 je širina stupca.
11. Grafičkom prikazu možete pridružiti vrijednosti relativnih frekvencija. To se postiže naredbom `TekstKaoTablica[D2:D12, F2:F12, „c“]`. Ovdje „c“ znači centrirano a moguće su još vrijednost „r“ i „l“ za desno i lijevo poravnanje.



Kada jednom steknete rutinu rada s GeoGebrinim *tabličnim prikazom* ovaj cijeli postupak možete izvesti veoma brzo. Daleko brže, ugodnije i s većom sigurnošću u pogledu točnosti nego se to može napraviti kalkulatorom. Naravno, dodatno estetsko uređenje traži i dodatno vrijeme. Napomenimo samo da stupce ili retke tablice možete bojati klikom na slovo na vrhu stupca ili broj na početku retka, a zatim otvorite dijaloški okvir *Svojstva* preko izbornika *Uređivanje*.

Virtualni eksperiment bacanja kocki

U prošlom smo primjeru došli do numeričkog i grafičkog prikaza distribucije vjerojatnosti pojedinih ishoda, a koja se zasniva na teoretskom pristupu. Očekujemo da bi se približno takva distribucija i dogodila ako izvedemo eksperiment s velikim brojem bacanja kocki. Iz povijesti Vjerojatnosti je poznato da su takvi pokusi fizički i izvođeni. Već dugo računalo omogućuje simulaciju. Vjerojatno ste takve eksperimente i vidjeli. No, da bi numerički funkcioniralo i grafički bilo oku ugodno, trebalo bi prilično umijeća i vremena. Ali ne i u novoj GeoGebri. U ovoj vježbi više ćemo se osloniti na naredbu 'Niz[ ]' i definiranje listi podataka. Konstrukciju izvedite na prethodno izrađenoj datoteci tako da možete uspoređivati eksperimentalnu distribuciju s onom teoretskom. Krenimo redom:



1. Odaberite alat *Klizač* iz pretposljednje skupine alata pa kliknite mišem negdje na grafički prikaz, pa u otvorenom dijaloškom okviru definirajte broj *N*. Minimalna vrijednost i korak povećanja su prirodno vrijednosti 1, a maksimalnu slobodno stavite na 2000. Ukoliko je vaše računalo snažno može i puno više.
2. Sada je potrebno generirati niz slučajnih parova prirodnih brojeva od 1 do 6. Upišite u *traku za unos*: `Bacanja = Niz[ceil(6 random()) + ceil(6 random()) + 0 i, i, 1, N]`. Objašnjenje
   a. 'Bacanja' je proizvoljni naziv liste podataka
   b. funkcija random() generira slučajan broj između 0 i 1
   c. faktor 6 je potreban zbog proširenja skupa vrijednosti funkcije random() od 0 do 6
   d. Funkcija ceil() daje najmanje cijelo veće od ili jednako, dakle cijele brojeve od 1 do 6.
   e. *i* je indeks koji omogućuje izvršenje naredbe Niz *N* puta. Izraz koji generira zbroj potrebno je dodati umnožak broja nule i indeksa *i*, jer u suprotnom bi se ponavljao prvi generirani zbroj.s
3. Sada je potrebno prebrojiti pojedine ishode u dobivenim 'bacanjima'. Koristite se ugniježđenom naredbom: `FrekPokusa = Niz[UvjetnoPrebrajanje[x ≟ Element[D2:D12, i], Bacanja], i, 1, 11]`. 'FrekPokusa' je proizvoljan naziv liste. Naredba Element[D2:D12, i] daje *i*-ti element stupca D iz tablice za usporedbu s elementima liste 'Bacanja'.
4. Izračun relativnih frekvencija izraženo u postocima također se postiže ugniježđenom naredbom, tako da se elemente liste frekvencija množi sa 100 i dijeli s *N*: `RelFrekPokusa = Niz[100 Element[FrekPokusa, i]/N, i,1,11]`.
5. Grafički prikaz postiže se naredbom: `StupčastiDijagram[D2:D12, RelFrekPokusa, 0.4]`.
6. Svakom promjenom vrijednosti klizača, ali i svakim pomakom klizača po zaslonu, izvodi se novi virtualni pokus, odnosno preračunavaju se vrijednosti bacanja kocki. Isto možete postići izbornikom *Pogled > Preračunaj sve objekte* ili najjednostavnije funkcijskom tipkom F9 na tipkovnici.

Kockarske muke ponavljajućih pokusa

Često se ispituju vjerojatnosti pojavljivanja događaja u pokusima koji se ponavljaju. Primjerice, povijesno je poznati zadatak:

Je li veća vjerojatnost da se u 4 bacanja jedne kocke pojavi barem jedna jedinica ili da se u 24 bacanja dviju kocki pojavi barem jednom par jedinica. Chevalier de Méré je bio uvjeren da su jednako vjerojatni događaji:
A = {u 4 bacanja jedne kocke pojavila se barem jedna jedinica},
B = {u 24 bacanja dviju kocki pojavi barem jednom par jedinica}.

Naravno, vjerojatnosti se ne izračunavaju teško. Izračunamo suprotne vjerojatnost tj.
$\overline{A}$ = {u 4 bacanja jedne kocke jedinica se nije pojavila niti jednom}
$\overline{B}$ = {u 24 bacanja dviju kocki niti jednom se nije pojavio par jedinica}

Vjerojatnosti dobivanja jedinice u bacanju jedne kocke je $\frac{1}{6}$, a pojavljivanja para jedinica kod bacanja dviju kocki je $\frac{1}{36}$. Prema Bernoullijevoj shemi je $p\left(\overline{A}\right) = \binom{4}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^0 \approx 0.482253$.

Tražena je vjerojatnost $p\left(A\right) = 1 - p\left(\overline{A}\right) \approx 0.517747$. Kod bacanja dviju kocki je $p\left(\overline{B}\right) = \binom{24}{0}\left(\frac{35}{36}\right)^4\left(\frac{1}{36}\right)^0 \approx 0.508596$, pa je $p\left(B\right) = 1 - p\left(\overline{B}\right) \approx 0.491404$. Znači da je vjerojatnost prvog događaja ipak veća.

Ovdje se nameće pitanje moramo li svaki puta iznova izračunavati vjerojatnosti makar uz pomoć kalkulatora ako već imamo zadanu shemu? Naravno ne. U GeoGebri, nakon prethodna dva primjera to bi mogao biti zadatak za vježbu. Za bilo koji broj *n* ponavljanja pokusa i zadanu vjerojatnost *p* izračunavat ćemo vjerojatnosti pojavljivanja događaja *k* puta ($0 \le k \le n$) u samo jednoj naredbi:

```
Niz[BinomniKoeficijent[n, k] p^k (1  - p)^(n - k),  k, 0, n].
```

Ova će naredba stvoriti listu od n+1 brojeva koji predstavljaju vjerojatnosti pojavljivanja traženog događaja *k* puta (k = 0, 1, 2, …, n). Naravno, prije ove naredbe moraju biti definirani brojevi *p* i *n*, bilo kao klizači ili samo brojevi u *algebarskom prikazu*. Upis nove vrijednosti za neki broj možete unijeti dvostrukim klikom miša na pripadno polje u *algebarskom prikazu*. Naredbu za crtanje dijagrama sada možete zadati s drugačijim argumentima:

```
StupčastiDijagram[0, n + 1, lista1].
```

Ovdje 0 ima značenje početne vrijednosti na osi *x*, $n + 1$ završne vrijednosti, a *lista*1 određuje visine stupaca. Bilo bi dobro podsjetiti se da za bilo koju konstrukciju GeoGebra izrađuje *opis koraka konstrukcije*, koji se nalazi u izborniku *Pogled*. Riječ je o tablici ovakvog izgleda:

Br.	Naziv	Definicija	Algebra
1	broj p		p = 0.16667
2	broj n		n = 4
3	lista lista1	Niz[BinomniKoeficijent[n, k] p^k (1 - p)^(n - k), k, 0, n]	lista1 = {0.48225, 0.3858, 0.11574, 0.01543, 0.00077}
4	broj a	StupčastiDijagram[0, n + 1, lista1]	a = 1

Preuzmite opisane primjere

Primjere opisane u ovom članku, kao *ggb* datoteke, možete slobodno preuzeti na *Geogebrinom međunarodnom skladištu* (http://www.geogebra.org/en/upload). Otvorite mape *hrvatski > MiS*. Tamo ćete u mapi *Dokumenti* naći i prijevod najnovijeg službenog priručnika *GeoGebra pomoć* 3.2 na hrvatski jezik.